



پاسخ تشریحی دفترچه سوم — کنکور سراسری ۱۴۰۵

گروه آزمایشی علوم تجربی • ریاضی (۱۱۱ تا ۱۴۰) و زمین‌شناسی (۱۴۱ تا ۱۵۵) • دفترچه ۸۳۷۵

medicalstus.ir

راهنما: در بخش ریاضی صورت هر سؤال، گزینه‌ها و راه‌حل کامل آمده و گزینه درست مشخص شده است (گزینه‌های نادرست تحلیل نشده‌اند). در بخش زمین‌شناسی تنها گزینه درست تحلیل شده است. کلید فشرده پاسخ‌ها در پایان هر بخش آمده است.

بخش اول: ریاضی — سؤال‌های ۱۱۱ تا ۱۴۰

۱۱۱ به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد $\frac{1}{5}$ در بازه $(\frac{1}{2a-3}, \frac{1}{2a+1}]$ قرار دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

حل: شرط عضویت در بازه یعنی $\frac{1}{2a-3} < \frac{1}{5} \leq \frac{1}{2a+1}$. از نامساوی سمت راست چون کران راست باز است، مقدار $\frac{1}{5}$ باید اکیداً کوچک‌تر باشد.

نامساوی اول: چون $2a+1 > 0$ است، با معکوس کردن داریم $2a+1 \geq 5$ یعنی $a \geq 2$.
نامساوی دوم: باید $2a-3 > 0$ باشد (وگرنه کسر منفی می‌شود) و $2a-3 < 5$ ، پس $4 < a < 1.5$.
اشتراک دو شرط: $a = 2, 3$. برای $a = 4$ بازه $(\frac{1}{5}, \frac{1}{9}]$ می‌شود که چون کران راست باز است، $\frac{1}{5}$ در آن نیست.

پاسخ: ۲ مقدار — گزینه ۴

۱۱۲ میانگین جملات دنباله حسابی ۱۷۲، a ، b ، c ، ...، 12 برابر ۸۷ است. مجموع جملات این دنباله کدام است؟

(۱) ۱۵۶۶ (۲) ۱۶۵۳ (۳) ۱۳۹۲ (۴) ۱۴۷۹

حل: در هر دنباله حسابی، میانگین جملات برابر میانگین جمله اول و آخر است: $\frac{a+172}{2} = 87$ پس $a = 2$.
قدر نسبت: $d = 12 - 2 = 10$. از رابطه جمله عمومی: $172 = 2 + (n-1)(10)$ پس $n = 18$.
مجموع برابر تعداد جملات ضربدر میانگین است: $S = 18 \times 87 = 1566$.

پاسخ: ۱۵۶۶ — گزینه ۱

۱۱۳ اگر $2 - x$ یکی از ریشه‌های معادله $x(3x^2 + x + a) = -2$ باشد، حاصل ضرب ریشه‌های این معادله کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{2}{3}$

حل: ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم: $3x^3 + x^2 + ax + 2 = 0$.
با جای‌گذاری ریشه $x = -2$: $3(-8) + 4 - 2a + 2 = 0$ پس $a = -9$ و $-18 - 2a = 0$.
معادله برابر $3x^3 + x^2 - 9x + 2 = 0$ است و در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{d}{a}$ است:
 $x_1 x_2 x_3 = -\frac{2}{3}$.

پاسخ: $-\frac{2}{3}$ — گزینه ۴

۱۱۴ رأس سهمی $y = -8x^2 + ax + 1$ و صفرهای آن، رئوس مثلثی با مساحت $\frac{27}{64}$ است. اگر بخش بزرگ‌تری از مساحت مثلث در ناحیه دوم باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) ۲ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $2 - 4\sqrt{3}$ (۴) $4\sqrt{3}$

حل: مبنای مثلث فاصله دو ریشه و ارتفاع آن، عرض رأس سهمی است. $\Delta = a^2 + 32$ پس $\frac{\sqrt{\Delta}}{1-8} = \frac{\sqrt{a^2+32}}{8}$ و $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{1-8}$.
رأس: $y_v = \frac{-\Delta}{4(-8)} = \frac{a^2+32}{32}$.
مساحت: $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+32}}{8} \cdot \frac{a^2+32}{32} = \frac{(a^2+32)^{3/2}}{512} = \frac{27}{64}$.
پس $(a^2+32)^{3/2} = 216$ و $a^2 + 32 = 36$ یعنی $a = \pm 2$.
طول رأس $x_v = \frac{a}{16}$ است؛ برای اینکه بیشتر مثلث در ناحیه دوم (سمت چپ محور y) بیفتد باید $x_v < 0$ باشد، پس $a = -2$. (کنترل: ریشه‌ها $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{8}$ و رأس $(-\frac{1}{8}, \frac{9}{8})$ است.)

پاسخ: $a = -2$ — گزینه ۳

۱۱۵ قطره‌های یک بیضی روی خطوط $y = x + ۳$ و $y = -۲ - ۲x$ قرار دارند. اگر مرکز بیضی و محل برخورد قطره‌های بیضی با محور x ها، رؤس یک مثلث باشند، مساحت این مثلث کدام است؟
(۱) ۴٫۵ (۲) ۳٫۵ (۳) ۴ (۴) ۳

حل: قطره‌های (محورهای) بیضی بر هم عمودند. شیب خط اول ۱ و شیب خط دوم $\frac{۲}{a}$ است، پس $۱ \times \frac{۲}{a} = -۱$ و $a = -۲$ ؛ خط دوم می‌شود $x + y = ۱$.
مرکز بیضی، محل تقاطع دو خط است: از $x + ۳ = ۱ - x$ داریم $x = -۱$ و $y = ۲$ یعنی $O(-۱, ۲)$.
برخورد با محور x ها: $A(-۳, ۰)$ و $B(۱, ۰)$ ، پس قاعده $AB = ۴$ و ارتفاع ۲ است: $S = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۲ = ۴$.

پاسخ: ۴ — گزینه ۳

۱۱۶ تابع $f(x) = -\frac{1}{p} \cos(\frac{3\pi}{p} + ۳x)$ روی بازه $[a, ۰]$ اکیداً نزولی است. کمترین مقدار a کدام است؟
(۱) $-\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۶}$ (۲) $-\frac{\pi}{۶} - \frac{\pi}{۳}$ (۳) $-\frac{\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۴}$ (۴) $-\frac{\pi}{۸}$

حل: با اتحاد تبدیل زاویه: $\cos(\frac{3\pi}{p} + \theta) = \sin \theta$ ، پس $f(x) = -\frac{1}{p} \sin(۳x)$.
این تابع دقیقاً جایی نزولی است که $\sin(۳x)$ صعودی باشد، یعنی $-\frac{\pi}{p} \leq ۳x \leq \frac{\pi}{p}$ که می‌دهد $-\frac{\pi}{۶} \leq x \leq \frac{\pi}{۶}$.
بازه $[a, ۰]$ باید زیرمجموعه این بازه باشد، پس $a \geq -\frac{\pi}{۶}$ و کمترین مقدار آن $-\frac{\pi}{۶}$ است.

پاسخ: $-\frac{\pi}{۶}$ — گزینه ۲

۱۱۷ نمودار تابع f رسم شده (ریشه‌ها $۰, ۲, ۵$ و $-۱, ۵$ و دامنه $[-۱, ۵, ۲, ۵]$ و $g(x) = -f(x + \frac{1}{p})$ است. اگر $h = \frac{f}{g}$ باشد، دامنه h شامل چند عدد صحیح است؟
(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

حل: دامنه g : از $۲, ۵ \leq x + \frac{1}{p} \leq ۱, ۵$ نتیجه می‌شود $-۲ \leq x \leq ۲$.
صفرهای g : $x + \frac{1}{p} \in \{-۱, ۵, ۰, ۲, ۵\}$ یعنی $x \in \{-۲, -۰, ۵, ۲\}$ که باید از دامنه حذف شوند.
دامنه h برابر اشتراک دو دامنه منهای صفرهای مخرج است: $D_h = [-۱, ۵, ۲] - \{-۰, ۵\}$.
اعداد صحیح این مجموعه: $-۱, ۰, ۱$ ؛ توجه کنید $x = ۲$ به دلیل صفرشدن مخرج حذف شده است.

پاسخ: ۳ عدد صحیح — گزینه ۱

۱۱۸ اگر $\sqrt{a+b} + \sqrt{c} = ۳$ و $a + \sqrt{b} - c = ۶$ باشد، حاصل $\log_۲ c$ کدام است؟
(۱) $۱ - (۲) ۲ - (۳) ۲$ (۴) ۱

حل: قرار می‌دهیم $u = \sqrt{a+b}$ و $v = \sqrt{c}$ ؛ آنگاه $u + v = ۳$ و رابطه دوم برابر $u^۲ - v^۲ = ۶$ است.
با اتحاد مزدوج: $۶ = (u-v)(u+v)$ پس $u - v = ۲$.
از حل دستگاه: $u = ۲, ۵$ و $v = ۰, ۵$ ، بنابراین $v^۲ = \frac{1}{۴}$ و $c = v^۲ = \frac{1}{۴}$ و $\log_۲ \frac{1}{۴} = \log_۲ ۲^{-۲} = -۲$.

پاسخ: ۲- — گزینه ۲

۱۱۹ تابع f با ضابطه $f(x) = ۱ + \frac{۲x}{a}$ است. اگر تابع $g(x) = \{ f(x); x \geq -۱ \mid f^{-1}(x); x < -۱ \}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد و محور x ها را در سمت مثبت محور قطع کند، مقدار $g(-۱)$ کدام است؟
(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴- (۴) ۱-

حل: وارون تابع: از $y = ۱ + \frac{۲x}{a}$ داریم $f^{-1}(x) = \frac{a(x-۱)}{۲}$.
پیوستگی در $x = -۱$: $f(-۱) = f^{-1}(-۱)$ یعنی $۱ - \frac{۲}{a} = -a$ که می‌دهد $a^۲ + a - ۲ = ۰$ و $a = ۱$ یا $a = -۲$.
اگر $a = ۱$ باشد $f(x) = ۱ + ۲x$ و ریشه آن $x = -\frac{1}{۲}$ است که در سمت منفی محور قرار دارد؛ پس رد می‌شود.
اگر $a = -۲$ باشد $f(x) = ۱ - x$ و ریشه آن $x = ۱$ در سمت مثبت است. بنابراین $g(-۱) = f(-۱) = ۱ - (-۱) = ۲$.

پاسخ: ۲ — گزینه ۱

۱۲۰ نمودار تابع f رسم شده است (پاره‌خطی که از $(-1, 0)$ می‌گذرد و در $x = 2$ به مقدار ۳ با دایره توخالی می‌رسد). حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3 - f(x)}{x^2 - 4} \text{ کدام است؟}$$

$$(1) -\frac{1}{5} \quad (2) -\frac{1}{3} \quad (3) -\frac{1}{4} \quad (4) -\frac{1}{2}$$

حل: از روی نمودار، برای $x < 2$ ضابطه پاره‌خط $f(x) = x + 1$ است (شیب ۱ و عرض از مبدأ ۱). پس صورت کسر برابر $2 - x = -(x - 2)$ و مخرج برابر $(x - 2)(x + 2)$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{4}$$

پاسخ: $-\frac{1}{4}$ — گزینه ۳

۱۲۱ اختلاف شیب نیم‌مماس‌های چپ و راست بر منحنی $y = |x^2 - 4|$ در $x = 2$ کدام است؟

$$(1) 4 \quad (2) 3 \quad (3) 8 \quad (4) 6$$

حل: در همسایگی $x = 2$ ضابطه تابع دو تکه است: برای $x > 2$ داریم $x^2 - 4 > 0$ پس $y = x^2 - 4$ و $y' = 2x$ که شیب نیم‌مماس راست را می‌دهد: $y'(2^+) = 4$. برای $x < 2$ (نزدیک ۲) داریم $4 - x^2 < 0$ پس $y = 4 - x^2$ و $y' = -2x$ یعنی شیب نیم‌مماس چپ: $y'(2^-) = -4$. اختلاف دو شیب: $4 - (-4) = 8$.

پاسخ: ۸ — گزینه ۳

۱۲۲ در مثلث ABC اندازه زوایای $\hat{A}CB$ و $\hat{ABC}$ به ترتیب ۴۵ و ۳۰ درجه است. اگر $AB = 6$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟

$$(1) 4(1+\sqrt{3}) \quad (2) 4(1+\sqrt{2}) \quad (3) 3(1+\sqrt{3}) \quad (4) 3(1+\sqrt{2})$$

حل: زاویه سوم: $\hat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$.

ضلع AB روبه‌روی زاویه $\hat{C}$ و ضلع BC روبه‌روی زاویه $\hat{A}$ است، پس با قانون سینوس‌ها: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$ یعنی $BC = \frac{6 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 45^\circ}$. و چون $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ و $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$BC = 6 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 3(\sqrt{3} + 1)$$

پاسخ: $3(1+\sqrt{3})$ — گزینه ۳

۱۲۳ اگر $\sqrt{\tan x} - \sqrt{\cot x} = \frac{2}{\sqrt{V}}$ و x در ربع سوم باشد، حاصل $\sin x - \cos x$ کدام است؟

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2) -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (3) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4) -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

حل: دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم (در ربع سوم هر دو رادیکال تعریف‌شده‌اند): $\tan x - 2 + \cot x = \frac{4}{V}$. پس $\tan x + \cot x = \frac{18}{V}$.

و چون $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x}$ نتیجه می‌شود $\sin x \cos x = \frac{V}{18}$.

پس $\sin x - \cos x = \pm \frac{\sqrt{V}}{9}$ و $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2(\frac{V}{18}) = \frac{2}{9}$.

تعیین علامت: از فرض $\sqrt{\tan x} > \sqrt{\cot x}$ داریم $\tan x > 1$ ، یعنی $|\sin x| > |\cos x|$ و چون در ربع سوم هر دو منفی‌اند: $\sin x < \cos x$ پس اختلاف منفی است.

پاسخ: $-\frac{1}{3}\sqrt{2}$ — گزینه ۲

۱۲۴ اگر اعداد a و b به داده‌های زیر اضافه شوند، چارک اول و سوم داده‌ها تغییر نمی‌کند. میانگین a و b کدام است؟

$$10, 25, 42, 18, 34, 16, 14, 23, 15, 12, 45$$

$$(1) 24 \quad (2) 20 \quad (3) 30 \quad (4) 28$$

حل: داده‌ها را مرتب می‌کنیم ($n = 11$): ۱۰, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۸, ۲۳, ۲۵, ۳۴, ۴۲, ۴۵. میانۀ داده ششم یعنی ۱۸ است و چارک‌ها $Q_1 = 14$ و $Q_3 = 34$ می‌شوند. با افزودن دو داده ($n = 13$)، میانۀ داده هفتم است، پس Q_1 میانگین داده‌های سوم و چهارم و Q_3 میانگین داده‌های دهم و یازدهم خواهد بود. اگر هر دو داده جدید در یک نیمه بیفتند چارک آن نیمه جابه‌جا می‌شود (مثلاً $Q_1 = 14/5$)؛ پس یکی به هر نیمه می‌رود و برای تغییر نکردن چارک‌ها باید داده‌های سوم و چهارم هر دو ۱۴ و داده‌های دهم و یازدهم هر دو ۳۴ باشند، یعنی $a = 14$ و $b = 34$ و میانگین آن‌ها $\frac{14+34}{2} = 24$ است.

پاسخ: ۲۴ — گزینه ۱

۱۲۵ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x+a}$ در دو نقطه نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. اگر اختلاف طول این نقاط $2\sqrt{10}$ باشد، کدام مورد می‌تواند مقدار a باشد؟ $(a \neq 0)$

۱ (۸) ۲ (۱۰) ۳ (۲) ۴ (۶)

حل: وارون تابع: $f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - a$. برای یافتن نقاط برخورد: $\frac{1}{x+a} = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$.
با ضرب طرفین در وسطین: $x = (1-ax)(x+a)$ که ساده می‌شود به $a(x^2 + ax - 1) = 0$ و چون $a \neq 0$: $x^2 + ax - 1 = 0$.
پس $x_1 + x_2 = -a$ و $x_1 x_2 = -1$ ، بنابراین $(x_1 - x_2)^2 = a^2 + 4 = (2\sqrt{10})^2 = 40$ که می‌دهد $a^2 = 36$ و $a = \pm 6$.

پاسخ: ۶ — گزینه ۴

۱۲۶ حاصل $\log_{10}(0,25)^{-1}$ کدام است؟

۱ (۰,۲۵) ۲ (۰,۵) ۳ (۲,۵) ۴ (۰,۵)

حل: پایه را بر حسب ۴ می‌نویسیم: $\frac{1}{4} = 4^{-1}$ ، پس $0,25 = \frac{1}{4}$ ، پس $\log_{10}(0,25)^{-1} = \log_{10} 4 = 1 - \log_{10} 0,25$.
با خاصیت $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ و اتحاد $10 = 4^{\log_{10} 10}$: $\frac{10}{4} = 2,5$ ، پس $\log_{10} 10 - 1 = \frac{10}{4}$.

پاسخ: ۲,۵ — گزینه ۳

۱۲۷ یک رأس مستطیلی واقع بر منحنی $y = 4x^2 - 12x + 9$ بوده و سه رأس دیگر، روی محورهای مختصات است. اگر این مستطیل بین محورها و نمودار منحنی محاط باشد، بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟

۱ ($2\sqrt{3}$) ۲ ($3\sqrt{3}$) ۳ (۳) ۴ (۳)

حل: منحنی برابر $y = (2x - 3)^2$ است که در $x = 1,5$ بر محور x ها مماس می‌شود و عرض از مبدأ آن ۹ است؛ پس ناحیه محاط برای $0 \leq x \leq 1,5$ است.

اگر رأس روی منحنی (x, y) باشد، مساحت مستطیل برابر است با: $S(x) = x(2x - 3)^2 = 4x^3 - 12x^2 + 9x$.
مشتق می‌گیریم: $S'(x) = 12x^2 - 24x + 9 = 3(2x - 1)(2x - 3)$ ، پس نقاط بحرانی $x = 0,5$ و $x = 1,5$ هستند.
در $x = 1,5$ مساحت صفر است و در $x = 0,5$ ماکزیمم رخ می‌دهد: $S = 0,5 \times (1 - 3)^2 = 0,5 \times 4 = 2$.

پاسخ: ۲ — گزینه ۳

۱۲۸ در شکل، $BC = BD$ و B روی نیمساز زاویه A قرار دارد ($DC = 4\sqrt{6}$, $BE = 5$, $AE \perp DE$). طول BD چند برابر طول ارتفاع وارد بر DC است؟

۱ (۱,۴) ۲ (۱,۵) ۳ (۱,۲) ۴ (۱,۳)

حل: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه فاصله برابر دارد. نقطه B روی نیمساز زاویه A است و چون $AE \perp DE$ است، فاصله B از ضلع AE همان $BE = 5$ می‌باشد.

پس فاصله B از ضلع دیگر یعنی خط AD (که DC روی آن است) نیز برابر ۵ است؛ یعنی ارتفاع وارد بر DC در مثلث BDC برابر ۵ است.
چون $BD = BC$ ، مثلث BDC متساوی الساقین است و پای این ارتفاع، وسط DC می‌شود: $\frac{DC}{2} = 2\sqrt{6}$.

با فیثاغورس: $BD = \sqrt{5^2 + (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{25 + 24} = \sqrt{49} = 7$ و نسبت خواسته شده: $\frac{7}{5} = 1,4$.

پاسخ: ۱,۴ برابر — گزینه ۱

۱۲۹ نمودارهای f و g رسم شده‌اند: f پاره‌خطی از $(-3, 0)$ تا $(0, -2)$ و g منحنی صعودی با دامنه $(-\frac{1}{p}, +\infty)$ است. اگر بازهٔ A

دامنهٔ $\text{gof}(-\frac{1}{p}x)$ باشد، طول بازهٔ A کدام است؟

۱ (۱,۵) ۲ (۳) ۳ (۰,۵) ۴ (۱)

حل: ضابطهٔ پاره‌خط: $f(u) = -\frac{2}{3}(u + 3)$ با دامنهٔ $u \in [-3, 0]$.

قرار می‌دهیم $u = -\frac{1}{p}x$. دو شرط لازم است: نخست $u \in [-3, 0]$ و دوم $f(u) \in D_g$ یعنی $f(u) > -\frac{1}{p}$.

از شرط دوم: $-\frac{2}{3}(u + 3) > -\frac{1}{p}$ پس $u + 3 < \frac{3}{2}$ و $u < -\frac{9}{4}$.

اشتراک با شرط اول: $u \in [-3, -\frac{9}{4}]$ و چون $x = -2u$ است: $x \in (\frac{9}{2}, 6]$.

طول بازه: $6 - 4,5 = 1,5$.

پاسخ: ۱,۵ — گزینه ۱

۱۳۰ در شکل، $AD = 6$ (ارتفاع وارد بر BC) و $BC = 9$ است؛ ضلع AC با علامت‌گذاری به سه بخش مساوی تقسیم شده و M نخستین نقطه تقسیم از سمت A است، $EN \perp BC$ و زاویه E قائمه است. طول MN چقدر است؟
 (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) 5 (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $3\sqrt{7}$

حل: چون $EN \perp BC$ و زاویه بین EM و EN قائمه است، نتیجه می‌شود $EM \parallel BC$.
 پس مثلث AEM با مثلث ABC متشابه است با نسبت تشابه $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{3}$ ؛ بنابراین $EM = \frac{1}{3} \times BC = 3$.
 هم‌چنین E ضلع AB را با همان نسبت تقسیم می‌کند، پس فاصله E از BC برابر $\frac{2}{3}$ ارتفاع است: $EN = \frac{2}{3} \times 6 = 4$.
 در مثلث قائم‌الزاویه MEN با فیثاغورس: $MN = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

پاسخ: ۵ — گزینه ۲

۱۳۱ هر یک از اعداد ۱ تا ۹ روی یک کارت نوشته شده است. سه کارت به تصادف انتخاب می‌شود. با کدام احتمال هر سه عدد روی کارت فرد هستند، به طوری که می‌دانیم مجموع آن‌ها نیز فرد است؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$

حل: این یک احتمال شرطی است؛ پیشامد شرط «فرد بودن مجموع» فضای نمونه را محدود می‌کند. بین ۱ تا ۹، پنج عدد فرد و چهار عدد زوج داریم.

مجموع سه عدد وقتی فرد است که یا هر سه فرد باشند یا یکی فرد و دو تا زوج: $40 = 5 \times 6 + 10 = C(5,1) \cdot C(4,2) + C(5,3)$.
 از این حالت‌ها، تعداد حالت‌هایی که هر سه عدد فرد باشند برابر $C(5,3) = 10$ است، پس $P = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

پاسخ: $\frac{1}{4}$ — گزینه ۴

۱۳۲ در نقطه‌ای واقع در ناحیه چهارم، دایره C به مرکز (α, α) و شعاع ۴ با دایره $x^2 + y^2 - 2x - y = 1$ مماس درون است. فاصله مرکز دایره C از مبدأ مختصات کدام است؟

(۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $2,5\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) $0,5\sqrt{3}$

حل: دایره دوم را به فرم استاندارد می‌بریم: $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$ ، پس مرکز $(1, 0,5)$ و شعاع $1,5$ است.
 در تماس درونی، فاصله مراکز برابر تفاضل شعاع‌هاست: $d = 4 - 1,5 = 2,5$.
 $(\alpha-1)^2 + (\alpha-0,5)^2 = 6,25$ که ساده می‌شود به $2\alpha^2 - 3\alpha - 5 = 0$ و $(2\alpha-5)(\alpha+1) = 0$ پس $\alpha = 2,5$ یا $\alpha = -1$.
 نقطه تماس روی خط‌المركزین است؛ با $\alpha = 2,5$ این نقطه $(0,1,-0,7)$ در ناحیه چهارم است ✓ ولی با $\alpha = -1$ نقطه تماس $(2,2,1,4)$ در ناحیه اول می‌افتد ✗. پس مرکز $(2,5, 2,5)$ و فاصله آن از مبدأ برابر $2,5\sqrt{3}$ است.

پاسخ: $2,5\sqrt{3}$ — گزینه ۲

۱۳۳ تعداد جواب‌های معادله $\sin(\pi+x)\cos(\frac{\pi}{p}+x) + 1 = 2\sin(\pi-x)$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱ (۴) ۲

حل: با فرمول‌های تبدیل: $\sin(\pi+x) = -\sin x$ و $\cos(\frac{\pi}{p}+x) = -\sin x$ و $\sin(\pi-x) = \sin x$.
 پس معادله می‌شود $\sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$ که اتحاد مربع کامل است: $(\sin x - 1)^2 = 0$ پس $\sin x = 1$ و $x = \frac{\pi}{p} + 2k\pi$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ فقط $x = \frac{\pi}{p}$ و $x = -\frac{3\pi}{p}$ قرار می‌گیرند.

پاسخ: ۲ جواب — گزینه ۴

۱۳۴ هر کدام از ریشه‌های معادله‌ای، $5x^2 + 1,35x - 1,3 = 0$ را یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + 1,35x - 1,3 = 0$ کمتر ضرب ریشه‌های آن معادله کدام است؟

(۱) $1,3 - 1$ (۲) $1,35 - 1$ (۳) $0,375 - 1$ (۴) $0,3 - 1$

حل: اگر ریشه‌های معادله داده شده r_1 و r_2 باشند، طبق روابط ویت: $r_1 + r_2 = -1,35$ و $r_1 r_2 = -1,3$.
 ریشه‌های معادله خواسته شده $r_1 - 0,5$ و $r_2 - 0,5$ هستند، پس:
 $(r_1 - 0,5)(r_2 - 0,5) = r_1 r_2 - 0,5(r_1 + r_2) + 0,25$
 $= -1,3 + 0,675 + 0,25 = -0,375$

پاسخ: $-0,375$ — گزینه ۳

۱۳۵ اگر $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |x|}{x^2 + 2x} = a$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan(ax)$ کدام است؟

(۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) ۱ (۴) ۰

حل: چون $x \rightarrow 0^-$ است، $x < 0$ و $|x| = -x$ ؛ پس صورت کسر: $|x| - (-x) = |2x| = -2x$.

مخرج را تجزیه می‌کنیم: $x^2 + 2x = x(x+2)$ ، بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x+2} = -1$.

پس حد دوم برابر $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan(-x) = -\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan x$ است و چون بلافاصله پس از $\frac{\pi}{2}$ تنازات به $-\infty$ میل می‌کند، قرینه آن $+\infty$ می‌شود.

پاسخ: $+\infty$ — گزینه ۲

۱۳۶ خطی در نقطه (a, a) بر نمودار تابع $y = \sqrt{2-x}$ مماس شده و محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث OAB کدام است؟

(۱) ۲٫۲۵ (۲) ۱٫۷۵ (۳) ۴٫۵ (۴) ۳٫۵

حل: نقطه (a, a) روی منحنی است: $a = \sqrt{2-a}$ پس $a^2 + a - 2 = 0$ و چون باید $a \geq 0$ باشد، $a = 1$ و نقطه تماس $(1, 1)$ است.

مشتق تابع: $y' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$ و در $x = 1$ شیب مماس $-\frac{1}{2}$ است.

معادله مماس: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ یعنی $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

محل برخورد با محورها: $A(3, 0)$ و $B(0, 1.5)$ ، پس $S = \frac{1}{2} \times 3 \times 1.5 = 2.25$.

پاسخ: ۲٫۲۵ — گزینه ۱

۱۳۷ ۷ نفر در خط شروع یک مسابقه ایستاده‌اند. به چند طریق ممکن است ۳ نفری که اشتباه در خط شروع ایستاده‌اند، مجاور هم باشند؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۰ (۳) ۴۲ (۴) ۳۵

حل: «اشتباه ایستادن» یعنی آن ۳ نفر هیچ‌کدام در جایگاه خودشان نیستند و ۴ نفر دیگر سر جای درست خود ایستاده‌اند؛ پس مسئله ترکیبی از «انتخاب جایگاه‌ها» و «جایگشت آشفته» است.

گام اول — انتخاب ۳ جایگاه مجاور از ۷ جایگاه پشت سر هم: جایگاه‌های $(5, 6, 7)$ ، $(4, 5, 6)$ ، $(3, 4, 5)$ ، $(2, 3, 4)$ ، $(1, 2, 3)$ یعنی $5 - 3 + 1 = 3$ حالت.

گام دوم — این ۳ نفر باید بین همان ۳ جایگاه جابه‌جا شوند به طوری که هیچ‌کس در جای خود نباشد؛ تعداد جایگشت‌های آشفته ۳ عضوی: $D_3 = 2$.

طبق اصل ضرب: $3 \times 2 = 6$.

پاسخ: ۱۰ طریق — گزینه ۲

۱۳۸ برای چند مقدار طبیعی a ، تابع $f(x) = 2x^2 - 9x + a$ در بازه $[1, 4]$ دارای دو مینیمم نسبی است؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۳

حل: فرض کنید $g(x) = 2x^2 - 9x + a$ ؛ سهمی رو به بالا با طول رأس $x = \frac{9}{4} = 2.25$ که داخل بازه است.

نمودار g وقتی دو مینیمم نسبی دارد که g دو ریشه متمایز داخل بازه $[1, 4]$ داشته باشد (در آن دو نقطه $g = 0$ و در رأس، ماکزیمم نسبی ایجاد می‌شود).

شرط اول — دو ریشه متمایز: $\Delta = 81 - 4a > 0$ پس $a < 10.125$.

شرط دوم — هر دو ریشه داخل بازه: $g(1) > 0$ یعنی $a > 7$ و $g(4) > 0$ یعنی $a > 4$.

پس $7 < a < 10.125$ و مقادیر طبیعی $a = 8, 9, 10$.

پاسخ: ۳ مقدار — گزینه ۴

۱۳۹ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \frac{9t + 3}{\sqrt{t}}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 1$ چند گرم [بر ساعت] است؟

(۱) ۳ (۲) ۱٫۵ (۳) ۱۷ (۴) ۷٫۵

حل: آهنگ رشد یعنی مشتق تابع جرم. ابتدا ضابطه را به توان‌های t می‌نویسیم: $m(t) = 9t^{1/2} + 3t^{-1/2}$.

مشتق می‌گیریم: $m'(t) = \frac{9}{2}t^{-1/2} - \frac{3}{2}t^{-3/2}$.

در $t = 1$: $m'(1) = 4.5 - 1.5 = 3$.

پاسخ: ۳ گرم بر ساعت — گزینه ۱

۱۴۰ دو دانش‌آموز، هر کدام تابلوهایی با شماره‌های ۱ تا ۸ در اختیار دارند؛ هر کدام به تصادف یک تابلو را انتخاب کرده و به هم نشان می‌دهند. اگر عدد روی تابلوی یکی، مضرب دیگری باشد، هر دو برندهٔ جایزه می‌شوند. چند درصد احتمال دارد که آن‌ها برنده شوند؟

۵۰ (۱) ۲۷٫۵ (۲) ۴۰ (۳) ۶۲٫۵ (۴)

حل: چون انتخاب‌ها مستقل‌اند، فضای نمونه شامل زوج‌های مرتب است: $n(S) = 8 \times 8 = 64$.

حالت‌های برد را می‌شماریم. نخست زوج‌های نامساوی ($a < b$) که a شمارندهٔ b است:

از ۱: هفت عدد؛ از ۲: ۴، ۶، ۸؛ از ۳: ۶؛ از ۴: ۸ — یعنی $1+1+3+7$ زوج، که چون ترتیب مهم است $2 \times 12 = 24$ حالت می‌شود.

هم‌چنین ۸ حالت که هر دو عدد برابرند (هر عدد مضرب خودش است).

$$P = \frac{24 + 8}{64} = \frac{1}{3} = 50\%$$

پاسخ: ۵۰ درصد — گزینهٔ ۱

کلید پاسخ‌های بخش ریاضی (۱۱۱ تا ۱۴۰)

سؤال	۱۱۱	۱۱۲	۱۱۳	۱۱۴	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۱۸	۱۱۹	۱۲۰	۱۲۱	۱۲۲	۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵
گزینه	۴	۱	۴	۳	۳	۲	۱	۲	۱	۳	۳	۳	۲	۱	۴

سؤال	۱۲۶	۱۲۷	۱۲۸	۱۲۹	۱۳۰	۱۳۱	۱۳۲	۱۳۳	۱۳۴	۱۳۵	۱۳۶	۱۳۷	۱۳۸	۱۳۹	۱۴۰
گزینه	۳	۳	۱	۱	۲	۴	۲	۴	۳	۲	۱	۲	۴	۱	۱

بخش دوم: زمین‌شناسی — سؤال‌های ۱۴۱ تا ۱۵۵ (تحلیل گزینهٔ درست)

۱۴۱ کدام فرایند سبب تشکیل سنگ‌هایی به نام توف می‌شود؟

گزینهٔ ۲) مواد مذاب دارای گرانیروی زیاد، در اثر تراکم گازها منفجر شوند و ذرات حاصل از انفجار روی زمین به هم بچسبند.

تحلیل: توف یک سنگ آذرآواری است، نه رسوبی و نه حاصل سرد شدن گدازه. وقتی ماگمای غنی از سیلیس و با گرانیروی زیاد نتواند گازهای خود را آزاد کند، فشار گازها بالا می‌رود و فوران به صورت انفجاری رخ می‌دهد. ذرات ریز پرتاب‌شده (خاکستر آتشفشانی) روی زمین انباشته و در اثر فشار و گرما به یکدیگر می‌چسبند و سنگ توف را می‌سازند.

گزینهٔ ۲

۱۴۲ کدام شرایط سبب می‌شود فعالیت یک آتشفشان به صورت انفجاری باشد؟

گزینهٔ ۴) فشار زیاد گازها در داخل لاوایی با سیلیس فراوان

تحلیل: هرچه مقدار سیلیس گدازه بیشتر باشد، گرانیروی آن بیشتر و روان بودنش کمتر است؛ در چنین گدازه‌ای گازها نمی‌توانند به آرامی خارج شوند و در آن محبوس می‌مانند. با افزایش فشار این گازها، انرژی به صورت ناگهانی آزاد می‌شود و فوران حالت انفجاری پیدا می‌کند. برعکس، گدازه‌های کم‌سیلیس و کم‌گرانیروی، گازهای خود را به راحتی از دست می‌دهند و فوران آرام دارند.

گزینهٔ ۴

۱۴۳ به ترتیب، کمبود، به اندازه و بیش از اندازه بودن عنصر سلنیم در بدن انسان ممکن است سبب کدام مورد شود؟

گزینهٔ ۴) بزرگ شدن قلب — مقاومت در برابر هیپاتیت — مسمومیت

تحلیل: کمبود سلنیم عامل بیماری «کشان» است که با بزرگ شدن قلب (اختلال عضلهٔ قلب) شناخته می‌شود. مقدار مناسب این عنصر نقش محافظتی در برابر بیماری‌های ویروسی مانند هیپاتیت و برخی سرطان‌ها دارد، و دریافت بیش از اندازهٔ آن سبب مسمومیت (همراه با ریزش مو و ناخن) می‌شود. تنها گزینه‌ای که هر سه حالت را به درستی و به همان ترتیب بیان کرده، همین مورد است.

گزینهٔ ۴

۱۴۴ طرز تشکیل کدام سنگ شبیه شیست است؟

گزینهٔ ۳) گابرو

تحلیل: شیست سنگی است که در عمق زمین و در شرایط دما و فشار بالا بلورین شده و بلورهای آن با چشم دیده می‌شوند. از میان گزینه‌ها، تنها گابرو نیز در عمق زمین و با سرد شدن آهستهٔ ماگما بلورهای درشت پدید می‌آورد؛ در حالی که شیل، گچ و مارن هر سه سنگ‌های رسوبی‌اند که در سطح زمین و از ته‌نشست یا تبخیر تشکیل می‌شوند.

گزینهٔ ۳

۱۴۵ در کدام مورد، پدیده نور ایجادشده با نام جواهر به درستی آمده است؟

گزینه ۱) تغییر رنگ — الکساندریت

تحلیل: الکساندریت به دلیل جذب انتخابی طول موج‌ها، در نور روز سبز و در نور مصنوعی سرخ‌فام دیده می‌شود؛ این پدیده «تغییر رنگ» نام دارد و شاخص‌ترین ویژگی این جواهر است. (پدیده چشم‌گره‌ای به کریزوبریل، درخشش رنگین‌کمانی به اوپال و ستاره‌واری به کروندوم مربوط می‌شود.)

گزینه ۱

۱۴۶ تشکیل کدام کانی، حاصل فرایندهای هوازدگی شیمیایی بر روی فلدسپارهای پتاسیم‌دار در سطح زمین است؟

گزینه ۳) کائولینیت

تحلیل: فلدسپار پتاسیم‌دار در مجاورت آب و کربن دی‌اکسید دچار هوازدگی شیمیایی از نوع هیدرولیز می‌شود؛ در این فرایند یون پتاسیم شسته و از سنگ خارج می‌شود و باقی‌مانده آلومینوسیلیکاتی به کانی رسی کائولینیت تبدیل می‌گردد. کائولینیت ماده اصلی خاک رس صنعتی و سرامیک است.

گزینه ۳

۱۴۷ حجم بزرگی از ماده مذاب غنی از آهن و منیزیم در زیر سطح زمین در حال سرد شدن است. احتمال تشکیل بلورهای کدام جواهر در مراحل اولیه سرد شدن بیشتر است؟

گزینه ۲) زبرجد

تحلیل: مذاب غنی از آهن و منیزیم یعنی ماگمای بازی؛ طبق سری واکنش بوون، نخستین کانی که در دمای بالا و در مراحل اولیه سرد شدن چنین ماگمایی متبلور می‌شود اولیوین است. گونه شفاف و باکیفیت اولیوین همان جواهری است که زبرجد نامیده می‌شود.

گزینه ۲

۱۴۸ در کدام حالت، تونل حفرشده در سنگ‌های رسوبی در برخی نقاط نیاز به مقاوم‌سازی دارد؟

گزینه ۳) محور تونل بر امتداد لایه‌ها عمود و کف تونل بالاتر از سطح ایستابی باشد.

تحلیل: وقتی محور تونل بر امتداد لایه‌ها عمود باشد، وضعیت کلی تونل پایدار است، اما مسیر تونل به‌ناچار از لایه‌های مختلف با جنس و مقاومت متفاوت عبور می‌کند؛ در محل لایه‌های سست، و نه در سراسر مسیر، به مقاوم‌سازی نیاز پیدا می‌شود — یعنی همان «در برخی نقاط». هم‌چنین چون کف تونل بالاتر از سطح ایستابی است، مشکل نفوذ آب وجود ندارد.

گزینه ۳

۱۴۹ سنگ‌های یک آبخوان حاوی کدام کانی باشد، مصرف دائمی از آب این آبخوان سبب بیماری کراتوسیس می‌شود و کدام مورد از نشانه‌های این بیماری است؟

گزینه ۱) رئالگار — شاخی شدن کف دست و پا

تحلیل: کراتوسیس از پیامدهای مسمومیت مزمن با آرسنیک است و رئالگار کانی سولفید آرسنیک‌دار است که با انحلال در آب زیرزمینی، آن را آلوده می‌کند. نشانه شاخص این بیماری، ضخیم و شاخی شدن پوست کف دست و پا است.

گزینه ۱

۱۵۰ کدام پهنه‌های زمین‌شناسی ایران، از نظر ذخایر مواد معدنی فلزی، نسبت به سایر پهنه‌ها از توان کمتری برخوردار هستند؟

گزینه ۳) زاگرس و کپه‌داغ

تحلیل: ذخایر فلزی عمدتاً با فعالیت‌های ماگمایی و دگرگونی همراه‌اند. زاگرس و کپه‌داغ هر دو حوضه‌های رسوبی‌اند که توده نفوذی و فعالیت آتشفشانی چندانی ندارند؛ به همین دلیل از نظر مواد معدنی فلزی فقیرند (در عوض زاگرس از نظر نفت و گاز و مواد تبخیری غنی است). بیشترین ذخایر فلزی ایران در پهنه ایران مرکزی و کمان ماگمایی ارومیه-دختر و سپس البرز متمرکز شده است.

گزینه ۳

۱۵۱ در به وجود آمدن شکل (لایه‌های کج شده که با دو گسل بریده شده‌اند) چه تعداد و چه نوع تنش‌هایی مؤثر بوده‌اند؟

گزینه ۲) یک بار کششی و یک بار فشاری

تحلیل: لایه‌های رسوبی در ابتدا به صورت افقی نهشته می‌شوند؛ کج‌شدگی (شیب‌دار شدن) آن‌ها نتیجه یک مرحله تنش فشاری است. سپس دو گسل دیده می‌شود که بلوک میانی نسبت به دو طرف پایین افتاده است؛ این گسل‌ها از نوع عادی‌اند و هر دو در یک مرحله تنش کششی پدید آمده‌اند. بنابراین در مجموع یک بار تنش فشاری و یک بار تنش کششی مؤثر بوده است.

گزینه ۲

۱۵۲ کرتاسه یکی از دوره‌های دوران مزوزوئیک است. به ترتیب شروع و خاتمه این دوره را با کدام حوادث شناسایی می‌کنند؟

گزینه ۲) نخستین گیاهان گل‌دار و انقراض دایناسورها

تحلیل: مرزهای زمانی را با رویدادهای زیستی شاخص مشخص می‌کنند. آغاز کرتاسه با پیدایش نخستین گیاهان گل‌دار (نهان‌دانگان) همراه است و پایان آن با انقراض بزرگ پایان مزوزوئیک، یعنی انقراض دایناسورها، مشخص می‌شود. (پیدایش دایناسورها مربوط به تریاس، یعنی آغاز مزوزوئیک است، نه کرتاسه.)

گزینه ۲

۱۵۳ کدام عبارت برای چاه در حال بهره‌برداری A در شکل (ماسه‌سنگ روی لایه نفوذناپذیر، همراه با رود دائمی و سطح ایستابی) درست است؟

گزینه ۴) با بهره‌برداری زیاد، چاه خشک می‌شود.

تحلیل: در شکل، آبخوان از جنس ماسه‌سنگ و بر روی لایه نفوذناپذیر قرار گرفته و سطح ایستابی در خود آن دیده می‌شود؛ یعنی آبخوان از نوع آزاد است، نه تحت فشار. در آبخوان آزاد نه فوران آرتزین رخ می‌دهد و نه سطح پیزومتريک معنا دارد. چاه A کم‌عمق است و کف آن اندکی پایین‌تر از سطح ایستابی قرار دارد؛ بنابراین با برداشت زیاد، مخروط افت گسترش می‌یابد و سطح آب پایین‌تر از کف چاه می‌رود و چاه خشک می‌شود.

گزینه ۴

۱۵۴ شکل، چگونگی به وجود آمدن کمان آتشفشانی ارومیه-دختر را نشان می‌دهد. به ترتیب A، B و C کدام‌اند؟

گزینه ۱) زاگرس، تتیس نوین و ایران مرکزی

تحلیل: در شکل، ورقه سمت چپ (عربستان و حاشیه آن یعنی زاگرس) به سمت راست حرکت می‌کند و پوسته اقیانوسی میان دو ورقه، یعنی اقیانوس تتیس نوین، به زیر ورقه مقابل فرو می‌رود. ماگمای حاصل از این فرورانش به سطح راه یافته و روی حاشیه ایران مرکزی، کمان آتشفشانی ارومیه-دختر را ساخته است؛ پس محل آتشفشان (نقطه C) بر روی ایران مرکزی قرار دارد.

گزینه ۱

۱۵۵ در شکل (توده نفوذی و لایه‌های کج در زیر، لایه‌های افقی در بالا و سطوح فرسایشی میان آن‌ها) کدام ناپیوستگی‌ها قابل مشاهده‌اند؟

گزینه ۴) دگرشیب، آذرین‌پی، هم‌شیب

تحلیل: در شکل هر سه نوع ناپیوستگی دیده می‌شود: جایی که لایه‌های افقی روی لایه‌های کج شده زیرین قرار گرفته‌اند، ناپیوستگی دگرشیب (زاویه‌دار) است؛ جایی که همان لایه‌ها روی توده نفوذی آذرین قرار گرفته‌اند، ناپیوستگی آذرین‌پی است؛ و سطح فرسایشی موج‌داری که میان دو دسته لایه موازی بالایی دیده می‌شود، ناپیوستگی هم‌شیب نام دارد.

گزینه ۴

کلید پاسخ‌های بخش زمین‌شناسی (۱۴۱ تا ۱۵۵)

سؤال	۱۴۱	۱۴۲	۱۴۳	۱۴۴	۱۴۵	۱۴۶	۱۴۷	۱۴۸
گزینه	۲	۴	۴	۳	۱	۳	۲	۳

سؤال	۱۴۹	۱۵۰	۱۵۱	۱۵۲	۱۵۳	۱۵۴	۱۵۵
گزینه	۱	۳	۲	۲	۴	۱	۴