

پاسخ کاملاً تشریحی ریاضی — دفترچه اول کنکور سراسری ۱۴۰۵

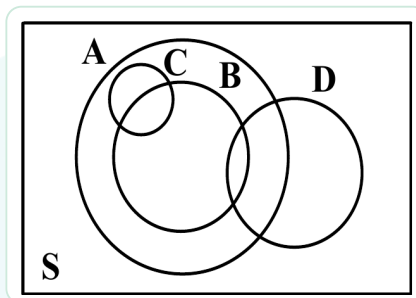


گروه آزمایشی علوم انسانی • درس ریاضی • سؤال‌های ۱ تا ۲۰ • مدت پاسخ‌گویی ۳۰ دقیقه

راهنمای مطالعه: صورت هر سؤال به همراه چهار گزینه عیناً آورده شده و بلافاصله زیر آن، در بخش «پاسخ تشریحی»، مسیر کامل حل گام‌به‌گام نوشته شده است. در این جزوه به جای بررسی تک‌تک گزینه‌های نادرست، تمرکز روی **راه حل درست و کوتاه‌ترین مسیر رسیدن به جواب** است. گزینه صحیح هر سؤال در کادر سبزرنگ پایان همان سؤال آمده و کلید فشرده همه پاسخ‌ها نیز در انتهای جزوه در یک جدول جمع‌بندی شده است.

ریاضی — سؤال‌های ۱ تا ۲۰ (حل کامل گام‌به‌گام)

۱ در نمودار ون زیر، A ، B ، C و D چهار پیشامد از فضای نمونه S هستند. کدام گزاره **نادرست** است؟



۱۴ $A' \cap C \neq \emptyset$

۳ $A \cap B' \neq A'$

۲ $D' \cup C' \neq \emptyset$

۱ $A' \cap B' \neq B'$

پاسخ تشریحی

از روی شکل سه نکته خوانده می‌شود: دایره B کاملاً درون A است، دایره کوچک C نیز کاملاً درون A رسم شده، و تنها D است که بخشی از آن بیرون A قرار دارد. گزینه ۴ ادعا می‌کند $A' \cap C \neq \emptyset$ یعنی «دست‌کم یک نقطه از C بیرون A وجود دارد». چون C زیرمجموعه A است، چنین نقطه‌ای وجود ندارد:

$$C \subset A \implies A' \cap C = \emptyset$$

پس تنها گزاره نادرست، گزینه ۴ است.

پاسخ: گزینه ۴

۲ به ازای چه مقداری از a ، مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + ax - 7 = 0$ برابر $1,5$ است؟

۱۴ $-3,5$

۳ -3

۲ 3

۱ $3,5$

پاسخ تشریحی

در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ریشه‌ها برابر $-b/a$ است. در این سؤال ضریب x^2 برابر ۲ و ضریب x برابر a است:

$$S = -\frac{a}{2} = 1,5$$

$$-a = 2 \times 1,5 = 3$$

$$a = -3$$

پاسخ: گزینه ۳

یک سکه آلمانی داریم که نسبت وزن مس به وزن آلیاژ نیکل و روی به کار رفته در آن ۱۳ به ۷ است. آن را ذوب و ۲۰ گرم آلیاژ نیکل و روی به آن اضافه می‌کنیم و سکه جدیدی می‌سازیم. اگر $\frac{۳}{۵}$ وزن سکه جدید، آلیاژ نیکل و روی باشد، وزن سکه قبل از ذوب شدن چند گرم بوده است؟

۵۴ (۱۴)

۴۸ (۳)

۳۶ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ تشریحی

وزن سکه اولیه را W می‌گیریم. نسبت ۱۳ به ۷ یعنی کل سکه ۲۰ قسمت است:

$$\frac{۷W}{۲۰} = \text{وزن آلیاژ} \quad \bullet \quad \frac{۱۳W}{۲۰} = \text{وزن مس}$$

پس از ذوب و افزودن ۲۰ گرم آلیاژ، وزن کل و مقدار آلیاژ چنین می‌شود:

$$\frac{۷W}{۲۰} + ۲۰ = \text{آلیاژ جدید} \quad \bullet \quad W + ۲۰ = \text{وزن کل جدید}$$

طبق فرض، آلیاژ $\frac{۳}{۵}$ وزن سکه جدید است:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{۷W}{۲۰} + ۲۰}{W + ۲۰} &= \frac{۳}{۵} \\ ۵(۷W + ۴۰۰) &= ۶۰(W + ۲۰) \\ ۳۵W + ۲۰۰۰ &= ۶۰W + ۱۲۰۰ \\ ۸۰۰ &= ۲۵W \\ W &= ۳۲ \end{aligned}$$

پس وزن سکه پیش از ذوب شدن ۳۲ گرم بوده است.

پاسخ: گزینه ۱

۴ اگر دامنه تابع $f: A \rightarrow B$ با ضابطه $f(x) = \sqrt{x+2}$ ، مجموعه $D_f = \{2, -2, 1, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$ باشد، مجموعه A چند عضو دارد؟

۸ (۱۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

پاسخ تشریحی

در نماد $f: A \rightarrow B$ ، مجموعه A همان دامنه تابع است؛ یعنی $A = D_f$.

نخست شرط تعریف رادیکال را بررسی می‌کنیم:

$$x + 2 \geq 0 \implies x \geq -2$$

همه عددهای فهرست‌شده از -2 کوچک‌تر نیستند، پس هیچ عضوی حذف نمی‌شود.

نکته اصلی سؤال اینجاست: در یک مجموعه عضو تکراری فقط یک بار شمرده می‌شود. در فهرست بالا ۸ عدد نوشته شده، اما ۱ و ۲ هرکدام دو بار آمده‌اند:

$$\begin{aligned} A &= \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\} \\ n(A) &= 6 \end{aligned}$$

پس A شش عضو دارد (نه ۸ عضو).

پاسخ: گزینه ۲

۵ نمودار تابع $f(x) = (a+1)x + 2b + 1$ از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = b + 1$ است. مقدار $a - b$ کدام است؟

$-\frac{1}{4}$ (۱۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ تشریحی

گام ۱ — شرط گذشتن از مبدأ: نمودار از نقطه $(0, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$f(0) = 0 \Rightarrow 2b + 1 = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

گام ۲ — استفاده از شرط دوم: چون $2b + 1 = 0$ ، جمله ثابت ضابطه صفر می‌شود:

$$f(2) = 2(a + 1) + (2b + 1) = 2a + 2 + 0 = 2a + 2$$

و از طرفی $f(2) = b + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ پس:

$$2a + 2 = \frac{1}{2}$$

$$2a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

گام ۳ — محاسبه خواسته:

$$a - b = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}$$

پاسخ: گزینه ۴

۶ اگر نقطه $S(a, 5)$ مختصات رأس سهمی به معادله $y = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + b$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ تشریحی

فرم رأسی سهمی به شکل $y = a(x - h)^2 + k$ است و در آن رأس، نقطه (h, k) است. معادله سؤال را به همین شکل می‌نویسیم:

$$y = -\frac{1}{4}(x - (-2))^2 + b$$

پس مختصات رأس برابر $(-2, b)$ است.

از طرفی گفته شده رأس همان $S(a, 5)$ است، پس مؤلفه‌های متناظر برابرند:

$$a = -2, \quad b = 5$$

$$a + b = -2 + 5 = 3$$

پاسخ: گزینه ۱

۷ اگر f از A به B تابعی خطی، $D_f = \{-2, 0, \frac{1}{4}\}$ و $R_f = \{-\frac{3}{4}, 0, 6\}$ باشد، کدام رابطه زیر می‌تواند ضابطه تابع f باشد؟

$$f(x) = -x + 6 \quad (۴)$$

$$f(x) = -3x \quad (۳)$$

$$f(x) = x + 6 \quad (۲)$$

$$f(x) = 3x \quad (۱)$$

پاسخ تشریحی

در دامنه، عضو ۰ وجود دارد و در برد نیز عدد ۰ دیده می‌شود. چون تابع خطی است، طبیعی‌ترین حدس $f(0) = 0$ است؛ یعنی ضابطه باید عرض از مبدأ نداشته باشد. این شرط، ضابطه را به شکل $f(x) = kx$ محدود می‌کند.

حال بزرگ‌ترین عضو برد یعنی ۶ باید تصویر یکی از اعضای دامنه باشد. با $f(x) = -3x$ تصویر هر سه عضو را می‌گیریم:

$$f(-2) = (-3)(-2) = 6$$

$$f(0) = (-3)(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = (-3)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

مجموعه تصاویر دقیقاً برابر $\{-\frac{3}{4}, 0, 6\}$ یعنی همان R_f شد.

پاسخ: گزینه ۳

۸ برای $m, n \in \mathbb{N}$ ، مجموعه $f = \{(2, m - 2n - t), (m + 2, n + 4), (m + 2n, m^2 - 4m)\}$ یک تابع ثابت با دامنه دوعضوی است. مقدار t کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

پاسخ تشریحی

گام ۱ — دامنه دوعضوی: سه زوج مرتب داریم، اما دامنه فقط دو عضو دارد؛ پس دو تا از مؤلفه‌های اول باید برابر باشند. مؤلفه‌های اول عبارت‌اند از:

$$2, m + 2, m + 2n$$

چون $m, n \in \mathbb{N}$ یعنی $m \geq 1$ و $n \geq 1$ ، داریم $m + 2 \geq 3$ و $m + 2n \geq 3$ ؛ پس هیچ‌کدام نمی‌توانند با ۲ برابر شوند. تنها حالت ممکن این است:

$$m + 2 = m + 2n \Rightarrow 2n = 2 \Rightarrow n = 1$$

گام ۲ — یکسان بودن تصویرها: اکنون زوج دوم و سوم مؤلفه اول یکسانی دارند، پس مؤلفه دومشان هم باید برابر باشد:

$$\begin{aligned} n + 4 = m^2 - 4m &\Rightarrow 5 = m^2 - 4m \\ m^2 - 4m - 5 = 0 &\Rightarrow (m - 5)(m + 1) = 0 \\ m &= 5 \end{aligned}$$

(ریشه ۱- پذیرفتنی نیست، چون $m \in \mathbb{N}$ است.)

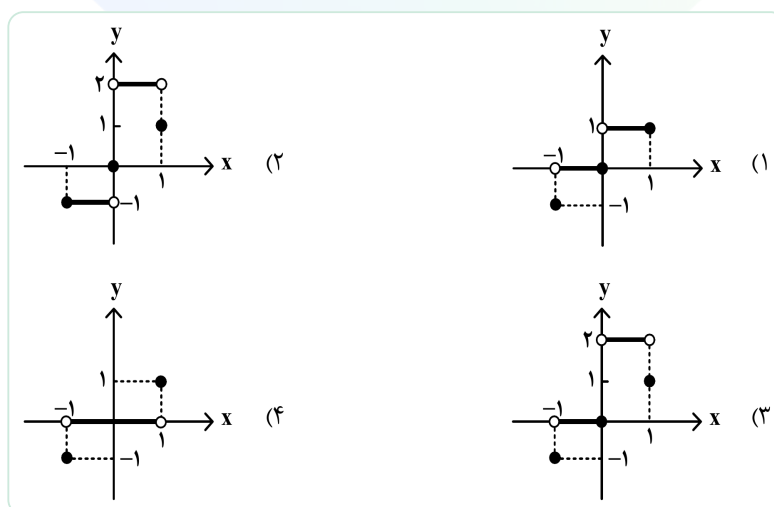
گام ۳ — تابع ثابت: مقدار ثابت تابع برابر $n + 4 = 5$ است؛ پس مؤلفه دوم زوج اول هم باید ۵ باشد:

$$\begin{aligned} m - 2n - t &= 5 \\ 5 - 2 - t &= 5 \Rightarrow 3 - t = 5 \Rightarrow t = -2 \end{aligned}$$

بررسی: $f = \{(2, 5), (7, 5), (7, 5)\}$ — دامنه دوعضوی و تابعی ثابت. ✓

پاسخ: گزینه ۲

۹ توابع $f(x) = \text{sign}(x)$ و $g(x) = |x| + |-x|$ با دامنه مشترک $-1 \leq x \leq 1$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع $h(x) = f(x) + g(x)$ کدام است؟ (علامت جزء صحیح است.)



پاسخ تشریحی

گام ۱ — ساده کردن g : برای هر عدد صحیح، $[x] + [-x] = 0$ و برای هر عدد غیرصحیح، $[x] + [-x] = -1$. با قدم‌مطلق گرفتن:

اگر x صحیح باشد: $g(x) = 0$
اگر x غیر صحیح باشد: $g(x) = 1$

گام ۲ — بررسی بازه به بازه در $-1 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} x = -1: f = -1, g = 0 &\Rightarrow h = -1 \\ -1 < x < 0: f = -1, g = 1 &\Rightarrow h = 0 \\ x = 0: f = 0, g = 0 &\Rightarrow h = 0 \\ 0 < x < 1: f = 1, g = 1 &\Rightarrow h = 1 \\ x = 1: f = 1, g = 0 &\Rightarrow h = 1 \end{aligned}$$

گام ۳ — شکل نمودار: یک نقطه تنها در $(-1, -1)$ ؛ پاره خط $y = 0$ روی بازه $[-1, 0]$ (ثقی در -1 و ۰ در ۰)؛ پاره خط $y = 1$ روی بازه $(0, 1)$ با دو سر ثقی؛ و نقطه تنهای ۱ در $(1, 1)$. این توصیف دقیقاً بر نمودار گزینه ۳ منطبق است.

پاسخ: گزینه ۳

پژوهشگران یک مؤسسه تحقیقات کشاورزی تصمیم دارند براساس معیار «رنگ» (سبز، نارنجی روشن و نارنجی تیره) خرمالوها را مورد بررسی قرار دهند. این مؤسسه برای ارزیابی میزان ناری خرمالوهای آماده برداشت یک باغ بزرگ، مطالعه خود را به بخشی از کل محصولات این باغ محدود کردند. کدام مورد درخصوص «واحد آماری» و «نسبت خرمالوهای دارای رنگ نارنجی تیره در نمونه» در این ارزیابی، درست است؟

- (۱) خرمالو . آماره
(۲) خرمالو . پارامتر
(۳) مجموعه کل خرمالوها . آماره
(۴) مجموعه کل خرمالوها . پارامتر

پاسخ تشریحی

واحد آماری کوچکترین عضوی از جامعه است که ویژگی مورد نظر روی آن اندازه گیری می شود. اینجا «رنگ» روی تک تک خرمالوها سنجیده می شود، پس واحد آماری خود خرمالو است (نه مجموعه کل خرمالوها؛ آن، جامعه آماری است).
آماره یا پارامتر؟ عددی که از نمونه به دست می آید «آماره» و عددی که از کل جامعه به دست می آید «پارامتر» نام دارد. در صورت سؤال آمده است که مطالعه «به بخشی از کل محصولات» محدود شده، یعنی کار روی نمونه انجام شده است.
پس نسبت خرمالوهای نارنجی تیره در نمونه، یک آماره است.

پاسخ: گزینه ۱

۱۱ اگر p گزاره ای درست، q گزاره ای نادرست و r گزاره ای دلخواه باشد، ارزش کدام گزاره به r بستگی دارد؟

- (۱) $(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
(۲) $(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
(۳) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q)$
(۴) $(r \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

پاسخ تشریحی

ابتدا دو ترکیب پرتکرار را حساب می کنیم؛ می دانیم p درست و q نادرست است:

$$\begin{aligned} p \wedge q &= (\text{درست}) \wedge (\text{نادرست}) = \text{نادرست} \\ p \vee q &= (\text{درست}) \vee (\text{نادرست}) = \text{درست} \end{aligned}$$

حال گزینه ۴ را می سنجیم. در گزاره $r \Leftrightarrow p$ ، چون p درست است، این گزاره دقیقاً هم ارز خود r می شود:

$$r \Leftrightarrow p, \text{ یعنی } r \Leftrightarrow r (\text{درست}), \text{ هم ارز } r \text{ است.}$$

پس کل گزینه ۴ چنین می شود:

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow p) \text{ هم ارز } r \text{ (نادرست) و در نتیجه هم ارز } \sim r \text{ است.}$$

یعنی ارزش این گزاره برابر نقیض r است و مستقیماً به ارزش r وابسته می‌ماند (اگر r درست باشد گزاره نادرست و اگر r نادرست باشد گزاره درست است).

پاسخ: گزینه ۴

نمرات درس ریاضی علی در طول سال تحصیلی به صورت ۱۸، ۱۶، ۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۵ است. معلم ریاضی برای جبران نمرات زیر ۱۰ دانش‌آموزان، امکان امتحان مجدد را به آن‌ها می‌دهد. علی در امتحان مجدد حداقل چه نمره‌ای باید کسب کند تا معدل او در درس ریاضی کمتر از ۱۶ نشود؟

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

پاسخ تشریحی

از میان شش نمره، تنها نمره ۵ زیر ۱۰ است؛ پس فقط همین نمره با نمره امتحان مجدد (آن را x می‌نامیم) جایگزین می‌شود و تعداد نمره‌ها همچنان ۶ می‌ماند.

$$18 + 16 + 16 + 17 + 15 = 82$$

شرط مسئله «کمتر از ۱۶ نشود» یعنی معدل دست‌کم ۱۶ باشد:

$$\frac{82 + x}{6} \geq 16$$

$$82 + x \geq 96$$

$$x \geq 14$$

پس کمترین نمره قابل قبول ۱۴ است.

پاسخ: گزینه ۲

اگر سبد هزینه خانواری در سال پایه از سه کالای «الف»، «ب» و «ج» تشکیل شده باشد و قیمت این سه کالا در سال پایه به ترتیب ۲۵۰۰۰، ۵۰۰۰۰ و ۱۱۰۰۰۰ واحد باشد و در سال موردنظر به ۷۵۰۰۰، ۹۰۰۰۰ و ۱۹۵۰۰۰ واحد برسد و با فرض آنکه مقادیر مصرفی «الف»، «ب» و «ج» در سال پایه به ترتیب معادل ۴، ۱۰ و ۴۰ کیلوگرم باشد، شاخص بهای این سبد چند درصد است؟

۱۹۰ (۴)

۱۸۰ (۳)

۱۷۰ (۲)

۱۶۰ (۱)

پاسخ تشریحی

شاخص بهای سبد از رابطه زیر به دست می‌آید؛ مقادیرهای مصرفی سال پایه در هر دو صورت و مخرج ثابت می‌مانند:

$$\text{شاخص بها} = \frac{\text{مجموع (قیمت سال موردنظر} \times \text{مقدار سال پایه)}}{\text{مجموع (قیمت سال پایه} \times \text{مقدار سال پایه)}} \times 100$$

هزینه سبد در سال پایه:

$$25000 \times 4 + 50000 \times 10 + 110000 \times 40 = 5,000,000$$

هزینه همان سبد با قیمت‌های سال موردنظر:

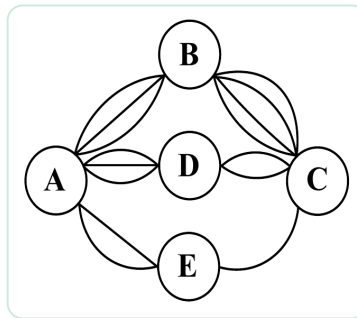
$$75000 \times 4 + 90000 \times 10 + 195000 \times 40 = 9,000,000$$

محاسبه شاخص:

$$\frac{9,000,000}{5,000,000} \times 100 = 1,8 \times 100 = 180\%$$

پاسخ: گزینه ۳

۱۴ بین پنج شهر A، B، C، D و E مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد که همه دوطرفه‌اند. به چند طریق می‌توان از شهر D به شهر B مسافرت کرد؟



۵۳ (۴)

۵۰ (۳)

۲۹ (۲)

۱۷ (۱)

پاسخ تشریحی

گام ۱ — شمارش راه‌های مستقیم از روی شکل:

$$A-B: ۳ \mid B-C: ۴ \mid A-D: ۳$$

$$D-C: ۲ \mid A-E: ۲ \mid E-C: ۱$$

گام ۲ — مسیرهای ممکن از D به B (بدون گذشتن دوبار از یک شهر): شهر D تنها به A و C راه دارد، پس مسافرت یا از سمت A آغاز می‌شود یا از سمت C. چهار مسیر زیر همه حالت‌ها را پوشش می‌دهد و در هر مسیر، تعداد راه‌ها در هم ضرب می‌شود:

$$D \rightarrow A \rightarrow B: ۳ \times ۳ = ۹$$

$$D \rightarrow C \rightarrow B: ۲ \times ۴ = ۸$$

$$D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow B: ۳ \times ۲ \times ۱ \times ۴ = ۲۴$$

$$D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow B: ۲ \times ۱ \times ۲ \times ۳ = ۱۲$$

گام ۳ — جمع اصل جمع:

$$۹ + ۸ + ۲۴ + ۱۲ = ۵۳$$

پاسخ: گزینه ۴

۱۵ هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به‌طور تصادفی خارج می‌کنیم. احتمال اینکه عدد روی کارت یک عدد اول باشد، کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{3}{8}$ (۲)

$\frac{3}{10}$ (۱)

پاسخ تشریحی

گام ۱ — شمارش کل حالت‌ها: عدد دو رقمی است؛ رقم دهگان نمی‌تواند ۰ باشد، پس ۴ انتخاب دارد و رقم یکان هر ۵ رقم می‌تواند باشد (تکرار مجاز است):

$$n(S) = ۴ \times ۵ = ۲۰$$

گام ۲ — شمارش حالت‌های مطلوب: فهرست کامل این ۲۰ عدد چنین است:

۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴
۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴

اعداد اول میان آن‌ها عبارت‌اند از:

$$۱۱، ۱۳، ۲۳، ۳۱، ۴۱، ۴۳ \Rightarrow n(A) = ۶$$

گام ۳ — احتمال:

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

پاسخ: گزینه ۱

۱۶ در دنباله بازگشتی $a_1 = a_2 = -a_3 = -1, a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} - (-1)^n$ چند جمله برابر صفر است؟

۲ (۱۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

۱ بیش از ۲

پاسخ تشریحی

گام ۱ — خواندن سه جمله اول: از $a_1 = a_2 = -a_3 = -1$ نتیجه می‌شود:

$$a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = 1$$

گام ۲ — تولید جمله‌های بعدی: توجه کنید که علامت $(-1)^n$ برای n فرد برابر ۱+ و برای n زوج برابر ۱- است.

$$a_4 = (-1) + (-1) + 1 + 1 = 0$$

$$a_5 = (-1) + 1 + 0 - 1 = -1$$

$$a_6 = 1 + 0 + (-1) + 1 = 1$$

$$a_7 = 0 + (-1) + 1 - 1 = -1$$

$$a_8 = (-1) + 1 + (-1) + 1 = 0$$

$$a_9 = 1 + (-1) + 0 - 1 = -1$$

$$a_{10} = (-1) + 0 + (-1) + 1 = -1$$

$$a_{11} = 0 + (-1) + (-1) - 1 = -3$$

گام ۳ — چرا دیگر صفری ظاهر نمی‌شود؟ از a_9 به بعد هر سه جمله متوالی منفی‌اند و مجموعشان دست‌کم برابر ۳- می‌شود؛ افزودن حداکثر ۱+ هرگز نمی‌تواند آن را به صفر برساند. پس دنباله از این نقطه به بعد اکیداً منفی می‌ماند. در نتیجه فقط a_4 و a_8 صفرند؛ یعنی ۲ جمله.

پاسخ: گزینه ۴

۱۷ در دنباله حسابی ... ، $3x + 2y + 2$ ، $3x + y + 2$ ، $2x + y + 1$ ، $2x - 2$ ، $3x - 2$ ، مقدار xy کدام است؟

۶ (۱۴)

۹ (۳)

۱۲ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ تشریحی

در دنباله حسابی، تفاضل هر دو جمله متوالی مقداری ثابت (قدر نسبت d) است. سه تفاضل پیاپی را می‌نویسیم:

$$d = a_2 - a_1 = (2x + y + 1) - (3x - 2) = -x + y + 3$$

$$d = a_3 - a_2 = (3x + y + 2) - (2x + y + 1) = x + 1$$

$$d = a_4 - a_3 = (3x + 2y + 2) - (3x + y + 2) = y$$

گام ۱ — از تساوی دو تفاضل آخر:

$$y = x + 1$$

گام ۲ — جای‌گذاری در تفاضل اول:

$$-x + y + 3 = x + 1$$

$$-x + (x + 1) + 3 = x + 1$$

$$4 = x + 1 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 4$$

بررسی: جمله‌ها به ترتیب ۷ ، ۱۱ ، ۱۵ ، ۱۹ می‌شوند که قدر نسبت ۴ دارند. ✓

$$xy = 3 \times 4 = 12$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

۱۸ اگر $a_n = 4 \times 9^{(n/2)+1}$ جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی باشد، نسبت جملهٔ اول به نسبت مشترک این دنباله، کدام است؟

(۱) $\frac{4}{3}$

(۳) ۴

(۲) ۱۲

(۴) ۳۶

پاسخ تشریحی

گام ۱ — نوشتن جملهٔ عمومی در فرم استاندارد $a_n = a_1 r^{n-1}$: توان را می‌شکنیم:

$$9^{(n/2)+1} = 9^{n/2} \times 9^1 = 9 \times (9^{1/2})^n = 9 \times 3^n$$

پس:

$$a_n = 4 \times 9 \times 3^n = 36 \times 3^n$$

گام ۲ — خواندن قدر نسبت و جملهٔ اول: پایهٔ توان n همان نسبت مشترک است:

$$r = 3$$

$$a_1 = 36 \times 3^1 = 108$$

گام ۳ — نسبت خواسته‌شده:

$$\frac{a_1}{r} = \frac{108}{3} = 36$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

۱۹ اگر $A = \frac{2^{-6} \times (1 - \frac{4}{V})^{8/3}}{3^{-4} \times (\frac{1}{3})^{-8/3}}$ باشد، مقدار $\frac{1}{\sqrt{A}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{9}{8}$

(۲) $\frac{8}{9}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ تشریحی

گام ۱ — ساده کردن پرانتزها:

$$1 - \frac{4}{V} = \frac{3}{V}, \quad 2 \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

گام ۲ — حذف توان منفی در مخرج: معکوس کردن کسر، علامت توان را عوض می‌کند:

$$(\frac{7}{3})^{-8/3} = (\frac{3}{7})^{8/3}$$

گام ۳ — ساده شدن: اکنون عبارت $(\frac{3}{V})^{8/3}$ در صورت و مخرج یکسان است و ساده می‌شود:

$$A = \frac{2^{-6} \times (\frac{3}{V})^{8/3}}{3^{-4} \times (\frac{3}{V})^{8/3}} = \frac{2^{-6}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{2^6} = \frac{81}{64}$$

گام ۴ — محاسبهٔ خواسته:

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{8}{9}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

۲۰ برای تابع نمایی $f(x) = a \times b^x$ ، $f(0) = -\frac{2}{3}$ و $f(2) = -\frac{3}{9}$ است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -1 (۲) $-\frac{4}{9}$ (۳) $-\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ تشریحی

گام ۱ — یافتن a : چون $b^0 = 1$:

$$f(0) = a \times b^0 = a = -\frac{2}{3}$$

گام ۲ — یافتن b :

$$\begin{aligned} f(2) &= a \times b^2 = -\frac{3}{9} \\ \left(-\frac{2}{3}\right) \times b^2 &= -\frac{3}{9} \\ b^2 &= -\frac{3}{9} \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4} \\ b &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(در تابع نمایی پایه همواره مثبت است، پس ریشهٔ منفی کنار گذاشته می‌شود.)

گام ۳ — محاسبهٔ خواسته:

$$f(-1) = a \times b^{-1} = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

کلید پاسخ‌ها — ریاضی دفترچهٔ اول ۱۴۰۵ (علوم انسانی)

سؤال	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
گزینه	۴	۳	۱	۲	۴	۱	۳	۲	۳	۱
سؤال	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
گزینه	۴	۲	۳	۴	۱	۴	۲	۱	۲	۳

جمع‌بندی نکته‌های کلیدی این آزمون

- مجموعه‌ها:** اگر یک مجموعه زیرمجموعهٔ دیگری باشد، اشتراکش با متمم آن دیگری تهی می‌شود. **۲. تابع:** در نماد $f: A \rightarrow B$ مجموعهٔ A همان دامنه است و عضو تکراری در یک مجموعه فقط یک بار شمرده می‌شود. **۳. درجه دوم:** مجموع ریشه‌ها $-b/a$ و در فرم رأسی $y = a(x - h)^2 + k$ رأس برابر (h, k) است. **۴. آمار:** عددی که از نمونه به‌دست آید «آماره» و اگر از کل جامعه باشد «پارامتر» است؛ در شاخص بها مقدرهای مصرفی سال پایه ثابت می‌مانند. **۵. شمارش:** در طول یک مسیر «اصل ضرب» و بین مسیرهای جدا از هم «اصل جمع» به‌کار می‌رود. **۶. دنباله‌ها:** در دنبالهٔ حسابی تفاضل‌های پیاپی را برابر می‌گذاریم و در دنبالهٔ هندسی جملهٔ عمومی را به شکل پایه‌به‌توان n می‌نویسیم تا قدر نسبت خوانده شود. **۷. توان:** معکوس کردن کسر، علامت توان را عوض می‌کند؛ یعنی $(a/b)^{-n} = (b/a)^n$. **۸. منطق:** اگر p درست باشد، $p \leftrightarrow r$ هم‌ارز خود r است.