

medicalstus.ir

پاسخ تشریحی دفترچه اول — کنکور سراسری ۱۴۰۵

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی • ریاضیات، سؤال‌های ۱ تا ۴۰ • ۷۰ دقیقه



راهنما: صورت هر سؤال به همراه گزینه‌ها آمده و در بخش «حل»، مسیر کامل رسیدن به پاسخ گام‌به‌گام آورده شده است. مطابق درخواست، در بخش ریاضی تنها **گزینه درست** تحلیل شده و گزینه‌های نادرست جداگانه بررسی نشده‌اند. گزینه درست هر سؤال در کادر سبز رنگ پایان همان سؤال مشخص شده و کلید فشرده پاسخ‌ها در انتهای دفترچه آمده است.

ریاضیات — سؤال‌های ۱ تا ۴۰ (حل تشریحی)

۱ مقدار عبارت گویای $A = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 1}{x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 3}$ به ازای $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ کدام است؟

۰٫۸ (۴)

۰٫۶ (۳)

۰٫۴ (۲)

۰٫۲ (۱)

حل: صورت و مخرج، بسط مکعب دوجمله‌ای هستند:

$$(x - \sqrt[3]{2})^3 = x^3 - 3\sqrt[3]{2}x^2 + 3\sqrt[3]{4}x - 2$$

$$(x - \sqrt[3]{3})^3 = x^3 - 3\sqrt[3]{3}x^2 + 3\sqrt[3]{9}x - 3$$

پس صورت برابر $1 + (x - \sqrt[3]{2})^3$ و مخرج برابر $3 + (x - \sqrt[3]{3})^3$ است. با جای‌گذاری $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$ داریم $x - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3}$ و $x - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2}$ بنابراین

$$A = \frac{3+1}{3+3} = \frac{4}{6} = 0,8$$

پاسخ: گزینه ۴

۲ اگر $a + 2$ ، $3a + 11$ و $a - 4$ ، به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

حل: الگوی خطی همان دنباله حسابی با قدر نسبت d است:

$$a_7 - a_6 = 3d = 11 - (3a + 2) = 9 - 3a \Rightarrow d = 3 - a$$

$$a_9 - a_7 = 2d = (a - 4) - 11 = a - 15 \Rightarrow d = \frac{a - 15}{2}$$

از برابری دو مقدار d :

$$6 - 2a = a - 15 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow d = -4$$

پس جمله عمومی برابر است با $a_n = 11 + (n - 7)(-4) = 39 - 4n$ و شرط مثبت بودن:

$$39 - 4n > 0 \Rightarrow n < 9,75 \Rightarrow n \leq 9$$

یعنی ۹ جمله نخست مثبت‌اند.

پاسخ: گزینه ۲

۳ به ازای چند مقدار از a ، معادله درجه دوم $(x - 2)^2 + 2a(x + 1)^2 = a$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

۴ (۱۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل: ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(2a + 1)x^2 + (4a - 4)x + (a + 4) = 0$$

شرط ریشه مضاعف $\Delta = 0$ است (و ضریب x^2 نباید صفر شود):

$$\Delta = (4a - 4)^2 - 4(2a + 1)(a + 4) = 16a^2 - 64a = 4a(2a - 16)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } a = \frac{16}{2}$$

هیچ‌کدام ضریب x^2 را صفر نمی‌کند ($2a + 1 \neq 0$): برای $a = 0$ معادله به $(x - 2)^2 = 0$ با ریشه مضاعف $x = 2$ تبدیل می‌شود. پس ۲ مقدار.

پاسخ: گزینه ۲

۴ به چند طریق می‌توان از بین ۳ ریاضی‌دان، ۳ فیزیک‌دان و ۳ شیمی‌دان، یک کمیته علمی دو نفره انتخاب کرد به طوری که دو نفر انتخابی هم‌رشته نباشند؟

۶۶ (۱۴)

۵۴ (۳)

۳۳ (۲)

۲۷ (۱)

حل: راه اول — متمم: از کل حالت‌های انتخاب دو نفر، حالت‌های هم‌رشته را کم می‌کنیم:

$$C(9, 2) - 3 \times C(3, 2) = 36 - 9 = 27$$

راه دوم — شمارش مستقیم زوج‌رشته‌ها: $27 = (3 \times 3) + (3 \times 3) + (3 \times 3)$ (ریاضی-فیزیک، ریاضی-شیمی، فیزیک-شیمی).

پاسخ: گزینه ۱

۵ نقیض گزاره سوری $(x \neq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \neq 2)$ کدام است؟ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (۲)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x \geq 0) \vee (x + \frac{1}{x} \geq 2) \quad (۱)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \wedge (x + \frac{1}{x} \leq 2) \quad (۴)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \vee (x + \frac{1}{x} > 2) \quad (۳)$$

حل: نقیض سور عمومی، سور وجودی است و نقیض $\sim P$ خود P :

$$\sim [\forall x; \sim (P \vee Q)] = \exists x; (P \vee Q)$$

حال دو گزاره درون پرانتز را ساده می‌کنیم؛ علامت $\neq$ یعنی «کوچک‌تر یا مساوی نیست»:

$$x \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad x + \frac{1}{x} \neq 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} > 2$$

پس نقیض برابر است با $\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0) \vee (x + \frac{1}{x} > 2)$

پاسخ: گزینه ۳

۶ اگر α و β دو عدد حقیقی و متمایز باشند به طوری که $\alpha' = \alpha + 3$ و $\beta' = \beta + 3$ ، مقدار $\alpha^5 + \beta^5$ کدام است؟

۷۹ (۴)

۷۳ (۳)

۶۷ (۲)

۶۱ (۱)

حل: α و β دو ریشه متمایز معادله $t^2 - t - 3 = 0$ هستند، پس

$$S = \alpha + \beta = 1, P = \alpha\beta = -3$$

با قرار دادن $p_n = \alpha^n + \beta^n$ رابطه بازگشتی زیر برقرار است:

$$p_n = S \cdot p_{n-1} - P \cdot p_{n-2} = p_{n-1} + 3p_{n-2}$$

$$p_1 = 1, p_2 = 1 + 6 = 7, p_3 = 7 + 3 = 10$$

$$p_4 = 10 + 7 = 17, p_5 = 17 + 10 = 27$$

پاسخ: گزینه ۱

۷ نمودار تابع $y = mx^2 - 3x + 4$ محور x ها را در دو طرف $x = 2$ قطع می‌کند. اگر حدود تغییرات m بازه (a, b) باشد، مقدار $a + 2b$ کدام است؟

صفر (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۲ (۱)

حل: شرط اینکه دو ریشه سهمی در دو طرف عدد ۲ باشند، این است که $m \neq 0$ و مقدار تابع در $x = 2$ با ضریب m هم‌علامت نباشد:

$$m \cdot f(2) < 0, f(2) = 4m - 6 + 4 = 4m - 2$$

$$m(4m - 2) < 0 \implies 2m(2m - 1) < 0 \implies 0 < m < \frac{1}{2}$$

پس $a = 0$ و $b = \frac{1}{2}$ و در نتیجه $a + 2b = 0 + 1 = 1$

پاسخ: گزینه ۳

۸ برای $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ اگر $f^{-1}(2 - x) \leq f^{-1}(6 - 2x)$ باشد، حدود x شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل: پایه تابع $\frac{1}{3}$ و کوچکتر از ۱ است، پس f نزولی و f^{-1} نیز نزولی است؛ بنابراین جهت نامساوی برعکس می‌شود:

$$6 - 2x \geq 2 - x \implies x \leq 4$$

دقت: دامنه f^{-1} برابر برد f یعنی $(0, +\infty)$ است، پس هر دو ورودی باید مثبت باشند:

$$6 - 2x > 0 \implies x < 3 \quad 2 - x > 0 \implies x < 2$$

اشتراک همه شرطها $x < 2$ است و تنها عدد صحیح مثبت آن $x = 1$ می‌باشد.

پاسخ: گزینه ۱

۹ اگر $75^x = 27^y$ باشد، حاصل $\frac{x}{3y-x}$ ۱۲۵ کدام است؟ ($x \neq 0$)

(۱۴) $3\sqrt{3}$

(۱۳) $5\sqrt{5}$

(۲) $\sqrt{3}$

(۱) $\sqrt{5}$

حل: دو طرف را بر پایه عوامل اول می‌نویسیم:

$$3^{3y} = (3 \times 25)^x = 3^x \times 5^{2x} \Rightarrow 3^{3y-x} = 5^{2x}$$

با ریشه $(3y-x)$ ام گرفتن از دو طرف:

$$3 = 5^{\frac{2x}{3y-x}}$$

حال عبارت خواسته شده را بر پایه ۵ می‌نویسیم:

$$125^{\frac{x}{3y-x}} = 5^{\frac{3x}{3y-x}} = (5^{\frac{2x}{3y-x}})^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

پاسخ: گزینه ۴

۱۰ اگر طول یک ضلع مثلثی ۳۰ و اندازه دو زاویه مجاور آن ضلع 60° و 67° باشد، محیط مثلث کدام است؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

(۱۴) $45 + 40\sqrt{3}$

(۱۳) $45 + 30\sqrt{3}$

(۲) $30 + 40\sqrt{3}$

(۱) $30 + 30\sqrt{3}$

حل: زاویه سوم برابر $53^\circ = 180^\circ - 60^\circ - 67^\circ$ است و ضلع 30 روبه‌روی آن قرار دارد. از $\cos 53^\circ = 0.6$ نتیجه می‌شود $\sin 53^\circ = 0.8$. طبق قانون سینوس‌ها:

$$PR = \frac{30}{\sin 53^\circ} = \frac{30}{0.8} = 37.5$$

همچنین $67^\circ = 60^\circ + 53^\circ$ است، پس

$$\sin 67^\circ = \sin 60^\circ \cos 53^\circ + \cos 60^\circ \sin 53^\circ = 0.866\sqrt{3} + 0.4$$

بنابراین محیط برابر است با

$$30 + 37.5 \sin 60^\circ + 37.5 \sin 67^\circ = 30 + 18.75\sqrt{3} + 11.25\sqrt{3} + 15 = 45 + 30\sqrt{3}$$

پاسخ: گزینه ۳

۱۱ اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار داشته باشد، انتهای زاویه‌های $\alpha + \beta$ و 2β به ترتیب در کدام ربع‌ها قرار دارند؟

(۱۴) سوم و چهارم

(۱۳) دوم و چهارم

(۲) سوم و سوم

(۱) دوم و سوم

حل: با توجه به ربع هر کمان: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ (مثبت) و $\sin \beta = \frac{5}{13}$ (مثبت).

$$\cos(\alpha + \beta) = \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65} < 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65} < 0$$

هر دو منفی $\Rightarrow$ ربع سوم. برای 2β :

$$\sin 2\beta = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169} < 0$$

$$\cos 2\beta = 2\cos^2 \beta - 1 = \frac{288}{169} - 1 = \frac{119}{169} > 0$$

سینوس منفی و کسینوس مثبت $\Rightarrow$ ربع چهارم.

پاسخ: گزینه ۴

۱۲ معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 + \sqrt{3} \cot x} = \tan 4x$ چند جواب در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ دارد؟

۱۳ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۴ (۱)

حل: با $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ مخرج را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{3} + \tan x}{\frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x}} = \tan x$$

پس معادله به $\tan 4x = \tan x$ تبدیل می‌شود:

$$4x - x = k\pi \implies x = \frac{k\pi}{3}$$

شرط‌های تعریف: $\sin x \neq 0$ (برای وجود $\cot x$) و $\tan x \neq -\sqrt{3}$ (تا مخرج صفر نشود). در بازهٔ $[-2\pi, 2\pi]$ مقدار k از -6 تا 6 (۱۳ مقدار) است:

$$k \equiv 0 \pmod{3} \implies \sin x = 0: \text{ مقدار حذف ۵}$$

$$k \equiv 2 \pmod{3} \implies \tan x = -\sqrt{3}: \text{ مقدار حذف ۴}$$

پس $k \in \{-5, -2, 1, 4\}$ باقی می‌ماند؛ یعنی ۴ جواب.

پاسخ: گزینهٔ ۱

۱۳ اگر $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = [1 - x]$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow a^+} \text{fog}(x) = 1 + a$ است؟

۱۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل: چون a صحیح است، وقتی x کمی بزرگ‌تر از a باشد، $x - 1$ کمی کوچک‌تر از عدد صحیح $a - 1$ است، پس

$$[1 - x] = (1 - a) - 1 = -a$$

یعنی g در همسایگی راست a ثابت است و

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \text{fog}(x) = f(-a) = 1 - \sqrt{-a}, \quad -a \geq 0$$

حال معادله را حل می‌کنیم:

$$1 - \sqrt{-a} = 1 + a \implies \sqrt{-a} = -a \implies -a = 0 \text{ یا } -a = 1$$

پس $a = 0$ یا $a = -1$ ؛ یعنی ۲ مقدار.

پاسخ: گزینهٔ ۲

۱۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x} - 1}$ کدام است؟

۸π^۲ (۴)

۴π^۲ (۳)

۲π^۲ (۲)

صفر (۱)

حل: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است. مخرج را در مزدوجش ضرب می‌کنیم:

$$(x - 1 + 2\sqrt{-x})(x - 1 - 2\sqrt{-x}) = (x - 1)^2 - 4x = (x + 1)^2$$

و برای صورت از اتحاد $\cos 2\theta - 1 = -2\sin^2\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\cos 2\pi x - 1}{x + 2\sqrt{-x} - 1} = \frac{-2\sin^2(\pi x) \cdot (x - 1 - 2\sqrt{-x})}{(x + 1)^2}$$

با $u = x + 1 \rightarrow 0$ داریم $\sin(\pi x) = \sin(\pi u - \pi) = -\sin(\pi u) \approx -\pi u$ پس $\sin^2(\pi x) \approx \pi^2 u^2$. همچنین پیرانتز آخر به $-4 - 2 - 2 = -4$ میل می‌کند:

$$\lim = \frac{-2\pi^2 u^2 \times (-4)}{u^2} = 8\pi^2$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

- ۱۵ برای تابع $f(x) = \frac{1-2x}{6x^2+x+a}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x)$ موجود و مخالف صفر باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x-a|} \times f(x)$ کدام است؟
- (۱) صفر (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۴) وجود ندارد

حل: صورت در $x = \frac{1}{3}$ صفر می‌شود؛ برای اینکه حد موجود و ناصفر باشد، مخرج هم باید همان‌جا صفر شود:

$$6\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} + a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$6x^2 + x - 2 = (2x - 1)(3x + 2)$$

$$f(x) = \frac{-(2x - 1)}{(2x - 1)(3x + 2)} = -\frac{1}{3x + 2}$$

(کنترل: حد در $x = \frac{1}{3}$ برابر $-\frac{2}{5}$ و ناصفر است ✓). حال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x+2}{|x+2|} \times \left(-\frac{1}{3x+2}\right) &= -\frac{1}{|x+2|} \\ &= -\frac{1}{\left|-\frac{2}{3}+2\right|} = -\frac{1}{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۳

- ۱۶ اگر $f(x) = a(1-x)(x+1) - bx^2$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه صفر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x f(x)}{x+b}$ کدام است؟
- (۱) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۳) صفر (۴) وجود ندارد

حل: ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a(1-x^2) - bx^2 = a - (a+b)x^2$$

درجه صفر یعنی ضریب x^2 صفر و جمله ثابت ناصفر باشد:

$$a+b=0 \Rightarrow b=-a, a \neq 0, f(x) = a$$

پس حد به شکل زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{ax}{x-a}$$

وقتی $x \rightarrow a^-$ ، صورت به $0 > 0$ و مخرج به 0^- میل می‌کند، بنابراین حاصل $-\infty$ است.

پاسخ: گزینه ۱

- ۱۷ اگر حد چپ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+b|x|}$ در $x=a$ برابر $-\infty$ باشد، تابع f چند مجانب قائم دارد؟
- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

حل: چون $x^2 = |x|^2$ است، برای $x \neq 0$ می‌توان ساده کرد:

$$f(x) = \frac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|+b)} = \frac{|x|+1}{|x|+b}$$

در $x=0$ حد متناهی $\frac{1}{b}$ است، پس آنجا مجانب نداریم. مجانب قائم جایی است که

$$|x|+b=0 \Rightarrow |x|=-b, b < 0 \text{ لازم است}$$

با $c = -b > 0$ دو مجانب $x=c$ و $x=-c$ داریم. بررسی حد چپ:

$$x \rightarrow c^- : 0 \rightarrow \text{مخرج}^- \text{، صورت} \rightarrow c+1 > 0 \Rightarrow f \rightarrow -\infty \checkmark$$

پس $a=c$ و تعداد مجانب‌های قائم برابر ۲ است.

پاسخ: گزینه ۲

۱۸ نمودار تابع $y = g(x)$ سهمی‌ای است که محور x ‌ها را در $x = 1$ و $x = 2$ قطع می‌کند و رو به بالا است. برای تابع f با ضابطه

$$f(x) = g(x) \text{ و } f(a) = g(0) \text{ داریم } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \text{ اگر بازه } (b, c) \text{ حدود تغییرات } a \text{ باشد، } b + c \text{ کدام است؟}$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

حل: از روی نمودار $g(x) = k(x-1)(x-2)$ با $k > 0$ و $g(0) = 2k$. وقتی $x \rightarrow a^+$ مخرج به 0^+ میل می‌کند، پس حد $-\infty$ می‌شود اگر و تنها اگر صورت به عددی منفی میل کند:

$$g(a) - g(0) < 0 \implies k(a-1)(a-2) < 2k$$

$$a^2 - 3a + 2 < 2 \implies a(a-3) < 0 \implies 0 < a < 3$$

پس $b = 0$ و $c = 3$ و $b + c = 3$.

پاسخ: گزینه ۳

۱۹ اگر α زاویه خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ در نقطه $(-1, -1)$ با جهت مثبت محور x ‌ها باشد، حاصل عبارت

$$A = 3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha \text{ کدام است؟}$$

$-0,3\sqrt{10}$ (۴)

$-0,9\sqrt{10}$ (۳)

$0,3\sqrt{10}$ (۲)

$0,9\sqrt{10}$ (۱)

حل: تابع را به صورت توان کسری می‌نویسیم و مشتق می‌گیریم:

$$y = x^{-\frac{1}{3}} \implies y' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$$

$$x = -1: x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{(-1)^4} = 1 \implies \tan \alpha = y' = -\frac{1}{3}$$

چون $0 < \alpha < \pi$ و $\tan \alpha < 0$ ، زاویه در ربع دوم است:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$A = \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{12}{\sqrt{10}} = -\frac{9}{\sqrt{10}} = -0,9\sqrt{10}$$

پاسخ: گزینه ۳

۲۰ تابع f با ضابطه $f(x) = 3x + 1$, $x \geq 1$ و $f(x) = x^3 + 1$, $x < 1$ داده شده است. کدام مورد درخصوص مشتقات یک‌طرفه f در $x = 1$

درست است؟

$f'_+(1) = +\infty$ (۴)

$f'_+(1) = -\infty$ (۳)

$f'_-(1) = +\infty$ (۲)

$f'_-(1) = 3$ (۱)

حل: نکته کلیدی: مقدار $f(1)$ از شاخه بالا به دست می‌آید، یعنی $f(1) = 3(1) + 1 = 4$ (تابع در $x = 1$ پیوسته نیست). حال:

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3(1+h) + 1 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{3h}{h} = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^3 + 1 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

پس تنها گزینه درست $f'_-(1) = +\infty$ است.

پاسخ: گزینه ۲

۲۱ نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 5$ رسم شده است؛ از روی شکل، تابع در $x = -1$ ماکزیمم نسبی، در $x = 0$ مینیمم نسبی دارد و نمودار محور x ها را در $x = 1$ قطع می‌کند. عرض نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f کدام است؟

- (۱) -4 (۲) -3 (۳) $-\frac{5}{3}$ (۴) $-\frac{7}{3}$

حل: از شرطهای نمودار سه معادله می‌سازیم؛ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ؛

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a - 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3a}{2}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b - 5 = 0 \Rightarrow \frac{5a}{2} = 5 \Rightarrow a = 2, b = 3$$

پس $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ و عرض ماکزیمم نسبی برابر است با

$$f(-1) = -2 + 3 - 5 = -4$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

۲۲ در نقطهٔ A از نمودار سهمی $y = 2 - x^2$ واقع در ناحیهٔ اول، مماسی رسم می‌کنیم که همراه با محورهای مختصات، مثلثی با مساحت مینیمم می‌سازد. عرض نقطهٔ A کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

حل: فرض کنیم $A = (t, 2 - t^2)$ با $0 < t < \sqrt{2}$. چون $y' = -2t$ ، معادلهٔ مماس چنین است:

$$y = -2tx + t^2 + 2$$

$$\text{طول از مبدأ} = \frac{t^2 + 2}{2t}, \quad \text{عرض از مبدأ} = t^2 + 2$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \frac{t^2 + 2}{2t} \times (t^2 + 2) = \frac{(t^2 + 2)^2}{4t}$$

$$S'(t) = \frac{(t^2 + 2)(12t^2 - 8)}{16t^2} = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{2}{3}$$

پس عرض نقطهٔ A برابر است با $2 - t^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

پاسخ: گزینهٔ ۳

۲۳ از کارگران مشغول به کار در کارگاهی یک نمونهٔ ۷ نفره انتخاب شده است. اگر داده‌های ۲۱، ۲۱، ۲۲، ۲۴، ۲۵، ۲۷ و ۳۵ درآمد ماهیانهٔ آن‌ها برحسب میلیون تومان باشد، خط فقر در این کارگاه چند میلیون تومان برآورد می‌شود؟

- (۱) ۱۰٫۵ (۲) ۱۲٫۵ (۳) ۲۱ (۴) ۲۵

حل: خط فقر برابر نصف میانگین درآمد جامعه برآورد می‌شود. ابتدا میانگین را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{21 + 21 + 22 + 24 + 25 + 27 + 35}{7} = \frac{175}{7} = 25$$

$$\text{خط فقر} = \frac{25}{2} = 12,5$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

۲۴ در یک خانواده k فرزندی، می‌دانیم تمام فرزندان از یک جنس نیستند. به ازای کدام مقدار از k ، احتمال اینکه دقیقاً $3 - k$ فرزند از این خانواده پسر باشد، $\frac{5}{18}$ است؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

حل: با شرط «همه هم‌جنس نیستند»، دو حالت (همه پسر و همه دختر) از فضای نمونه حذف می‌شود:

$$n(S) = 2^k - 2$$

تعداد حالت‌های مطلوب $C(k, k-3) = C(k, 3)$ است، پس

$$\frac{C(k, 3)}{2^k - 2} = \frac{5}{18}$$

با آزمودن گزینه‌ها:

$$k = 7 : \frac{C(7, 3)}{2^7 - 2} = \frac{35}{126} = \frac{5}{18} \quad \checkmark$$

پاسخ: گزینه ۳

۲۵ داوطلبی به هر ۵ سؤال یک آزمون پنج‌گزینه‌ای به‌طور تصادفی پاسخ می‌دهد. احتمال آنکه تنها به ۳ سؤال پاسخ صحیح داده باشد، کدام است؟

$\frac{32}{625}$ (۴)

$\frac{64}{625}$ (۳)

$\frac{16}{625}$ (۲)

$\frac{4}{625}$ (۱)

حل: آزمایش دوجمله‌ای با $n = 5$ ، $p = \frac{1}{5}$ و $q = \frac{4}{5}$:

$$P = C(5, 3) \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{125} \times \frac{16}{25} \\ = \frac{160}{3125} = \frac{32}{625}$$

پاسخ: گزینه ۴

۲۶ در شکل، $AB = AC = 10$ و $BD = \frac{1}{4} BC$ و $DE \perp AB$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴۰ باشد، طول ED کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{6}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

حل: مثلث‌های ABD و ABC ارتفاع مشترک از رأس A دارند، پس نسبت مساحت‌ها برابر نسبت قاعده‌هاست:

$$S(ABD) = \frac{1}{4} S(ABC) = \frac{1}{4} \times 40 = 10$$

از سوی دیگر در مثلث ABD ، پاره‌خط DE ارتفاع وارد بر AB است:

$$S(ABD) = \frac{1}{2} \times AB \times DE = \frac{1}{2} \times 10 \times DE = 10 \quad DE$$

$$5 DE = 10 \implies DE = 2$$

پاسخ: گزینه ۳

۲۷ در شکل، $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ و $DC = 30$ ؛ نقطه G روی AB با $\angle DGC = 90^\circ$ است و E روی DG ، F روی GC چنان‌اند که $EFCD$ ذوزنقه متساوی‌الساقین است. اگر طول اضلاع ذوزنقه $ABCD$ اعداد صحیح مثبت باشند، طول ضلع AB کدام است؟

۲۶ (۴)

۲۳ (۳)

۲۵ (۲)

۲۴ (۱)

حل: چون $EF \parallel DC$ است، $GEF \sim GDC$ و اگر نسبت تشابه k باشد:

$$ED = (1 - k) GD, \quad FC = (1 - k) GC$$

تساوی ساق‌ها $ED = FC$ می‌دهد $GD = GC$ ؛ یعنی DGC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است و $GD = GC = 15\sqrt{2}$. حال $A(0,0)$ ، $B(c,0)$ ، $D(0,-h_1)$ ، $C(c,-h_2)$ و $G(g,0)$ می‌گیریم $(h_1 = AD, h_2 = BC, c = AB)$:

$$g^2 + h_1^2 = 450, \quad (c - g)^2 + h_2^2 = 450$$

$$c^2 + (h_1 - h_2)^2 = 900$$

با ترکیب این سه رابطه به دو نتیجه ساده می‌رسیم:

$$h_1^2 + h_2^2 = 450, \quad c = h_1 + h_2$$

تنها تجزیه‌های صحیح 450 به مجموع دو مربع، $(3, 21)$ و $(15, 15)$ است. حالت $(15, 15)$ مستطیل می‌شود و کنار می‌رود، پس

$$AD = 3, \quad BC = 21 \implies AB = 3 + 21 = 24$$

$$(\text{کنترل: } 30^2 = 900 = 324 + 576 = (21 - 3)^2 + 24^2)$$

پاسخ: گزینه ۱

۲۸ نقطه A' تصویر A تحت بازتاب نسبت به خط d و نقطه A'' تصویر A تحت دوران حول A' به اندازه 120° است. اگر فاصله A از خط d برابر $2\sqrt{6}$ و O نقطه برخورد پاره خط AA'' با خط d باشد، مساحت مثلث OAA' کدام است؟

$8\sqrt{3}$ (۴)

$6\sqrt{3}$ (۳)

$4\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{3}$ (۱)

حل: خط d را محور x ‌ها می‌گیریم:

$$A(0, 2\sqrt{6}), \quad A'(0, -2\sqrt{6})$$

دوران 120° حول A' را روی بردار $A - A' = (0, 4\sqrt{6})$ اعمال می‌کنیم:

$$R(120^\circ)(0, 4\sqrt{6}) = (-6\sqrt{3}, -2\sqrt{6})$$

$$A'' = A' + (-6\sqrt{3}, -2\sqrt{6}) = (-6\sqrt{3}, -4\sqrt{6})$$

پاره خط AA'' را پارامتری می‌کنیم: با $y = 0$ مقدار $t = \frac{1}{3}$ و

$$O = (-2\sqrt{3}, 0)$$

در مثلث OAA' ، قاعده AA' روی محور y ‌ها به طول $4\sqrt{6}$ و ارتفاع برابر $2\sqrt{3}$ است:

$$S = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{12} = 8\sqrt{3}$$

پاسخ: گزینه ۴

۲۹ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC شکل، نقطه E روی AC با $AE = ۳٫۵$ و $EC = ۴٫۵$ ، نقطه D روی BC و $AD = ۷$ است. طول ضلع BD کدام می‌تواند باشد؟

۳٫۵ (۴)

۳ (۳)

۲٫۵ (۲)

۲ (۱)

حل: ضلع مثلث از روی نقطه E به دست می‌آید:

$$AB = BC = AC = AE + EC = ۳٫۵ + ۴٫۵ = ۸$$

در مثلث ABD با $\hat{B} = ۶۰^\circ$ از قانون کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos ۶۰^\circ$$

$$۴۹ = ۶۴ + BD^2 - ۸ BD \implies BD^2 - ۸ BD + ۱۵ = ۰$$

$$BD = ۳ \text{ یا } BD = ۵$$

هر دو مقدار هندسی‌اند، اما در میان گزینه‌ها تنها ۳ آمده است.

پاسخ: گزینه ۳

۳۰ در شکل، دو دایره به مرکزهای O و O' مماس درون‌اند؛ خط قائم و خط افقی گذرنده از O بر هم عمودند. اگر فاصله بالای دایره کوچک تا بالای دایره بزرگ ۸ و فاصله برخورد افقی با دایره کوچک تا دایره بزرگ ۵ باشد، طول خط‌المركزین کدام است؟

۴٫۵ (۴)

۳٫۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

حل: R و r را شعاع دایره‌ها می‌گیریم؛ در تماس داخلی $OO' = R - r$. مبدأ را O و نقطه تماس را $(۰, -R)$ می‌گیریم، پس $O' = (۰, -(R - r))$. بالای دایره کوچک در $y = -R + ۲r$ و بالای دایره بزرگ در $y = R$ است:

$$R - (-R + ۲r) = ۲(R - r) = ۸ \implies OO' = R - r = ۴$$

کنترل با داده ۵: برخورد خط افقی با دایره کوچک در $x = \sqrt{r^2 - (R - r)^2}$ است، پس

$$R - \sqrt{r^2 - ۱۶} = ۵, R = r + ۴ \implies r = ۸٫۵, R = ۱۲٫۵ \checkmark$$

پاسخ: گزینه ۲

۳۱ اگر $\vec{a} = (۱, -۱, -۱)$ باشد، حاصل $\vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) + (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i}$ کدام است؟

$-\vec{i} + \vec{k}$ (۴)

$\vec{i} + \vec{k}$ (۳)

$-\vec{i} - \vec{k}$ (۲)

$\vec{i} - \vec{k}$ (۱)

حل: ضرب‌های خارجی را جداگانه حساب می‌کنیم ($\vec{i} = (۱, ۰, ۰)$, $\vec{k} = (۰, ۰, ۱)$):

$$\vec{a} \times \vec{i} = (۰, -۱, ۱) \implies \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{i}) = (۱, ۰, ۰) = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{a} = (۱, ۱, ۰) \implies (\vec{k} \times \vec{a}) \times \vec{i} = (۰, ۰, -۱) = -\vec{k}$$

بنابراین مجموع برابر $\vec{i} - \vec{k}$ است.

پاسخ: گزینه ۱

۳۲ اگر A حاصل ضرب ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & x \\ -1 & y & 3 \end{bmatrix}$ در ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \\ -3 & y & 3 \end{bmatrix}$ و یک ماتریس اسکالر باشد، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

- ۵ (۱) ۳ (۲) -۵ (۳) -۳ (۴)

حل: حاصل ضرب یک ماتریس 2×2 است؛ درایه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$a_{11} = 2 + 2 - 3 - 3 = -2 \quad a_{12} = 3 - 4 + y - 4 = y - 5$$

$$a_{21} = -2 - 40 - 3x - 3 = -45 - 3x \quad a_{22} = -3 + 80 + xy - 4 = 73 + xy$$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های غیرقطری صفر و درایه‌های قطری برابرند:

$$a_{12} = 0 \Rightarrow y = 5 \quad a_{21} = 0 \Rightarrow x = -15$$

$$\text{کنترل: } a_{22} = 73 + (-15)(5) = -2 = a_{11} \quad \checkmark$$

$$\frac{x}{y} = \frac{-15}{5} = -3$$

پاسخ: گزینه ۴

۳۳ برای ماتریس‌های وارون‌پذیر A و B ، اگر $[A \quad 2|A] \quad B^{-1}A^3 = [5|A \quad 4]$ باشد، دترمینان ماتریس $3A$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۲ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

حل: سمت چپ را ساده می‌کنیم:

$$(AB)^{-1}A^3B = B^{-1}A^{-1}A^3B = B^{-1}A^2B$$

دترمینان ماتریس‌های متشابه برابر است، پس دترمینان سمت چپ برابر $|A^2|$:

$$|A^2| = 5|A| \times 2|A| - 4 \times |A| = 10|A|^2 - 4|A|$$

$$9|A|^2 = 4|A| \Rightarrow |A| = \frac{4}{9} \quad (\text{چون } |A| \neq 0)$$

ماتریس A از مرتبه ۲ است، بنابراین

$$|3A| = 3^2 |A| = 9 \times \frac{4}{9} = 4$$

پاسخ: گزینه ۱

۳۴ دایره C بر خط $x = \frac{3}{4}y$ مماس است. اگر معادلات دو وتر مساوی و منصف هم از دایره C ، خطوط $2x + y = 3$ و $2x - 3y = 7$ باشند، شعاع دایره کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

حل: اگر دو وتر یکدیگر را نصف کنند، عمودمنصف هر دو از مرکز می‌گذرد و بر آن‌ها عمود است؛ این تنها وقتی ممکن است که محل تلاقی، خود مرکز باشد، یعنی هر دو وتر قطرند. پس مرکز، محل تقاطع دو خط است:

$$(2x + y) - (2x - 3y) = 3 - 7 \Rightarrow 4y = -4 \Rightarrow y = -1, x = 2$$

$$O(2, -1)$$

شعاع برابر فاصله مرکز از خط مماس $3x - 4y = 0$ است:

$$r = \frac{|3(2) - 4(-1)|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$

پاسخ: گزینه ۲

۳۵ در مثلث EFG، ضلع EG در نقطه D بر بیضی مماس بوده و F و F' کانون‌های بیضی هستند (FG = ۷٫۵ ، F'F = ۹). اگر دو مثلث EF'D و

EFG متشابه با نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ باشند، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴) $\frac{9}{10}$

حل: خاصیت بازتابی بیضی: مماس در D با دو شعاع کانونی زاویه‌های برابر می‌سازد:

$$\angle(F'D, DE) = \angle(FD, DG)$$

از تشابه دو مثلث، زاویه‌های متناظر EDF' و EGF برابرند، پس

$$\angle FDG = \angle FGD \Rightarrow \text{مساوی‌الساقین DFG} \Rightarrow FD = FG = ۷٫۵$$

از نسبت تشابه $\frac{1}{3}$ داریم $F'D = \frac{FG}{3} = ۲٫۵$ ، بنابراین

$$2a = F'D + FD = ۲٫۵ + ۷٫۵ = ۱۰ \Rightarrow a = ۵$$

$$2c = F'F = ۹ \Rightarrow c = ۴٫۵ \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{۴٫۵}{۵} = \frac{۹}{۱۰}$$

پاسخ: گزینه ۴

۳۶ اگر $A = ۰! + ۱! + ۲! + ۳! + \dots + ۶۰۰!$ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد $\frac{A + ۲!}{۳!}$ بر عدد ۸ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

حل: چون در پایان هر $۳! = ۶$ تقسیم و سپس بر ۸ باقی‌مانده می‌گیریم، کافی است پیمانه $۴۸ = ۶ \times ۸$ را بررسی کنیم. برای $n \geq ۶$ داریم $۴۸ : ۷۲۰ : n!$ پس فقط جمله‌های ابتدایی مهم‌اند:

$$۰! + ۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! = ۱ + ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۱۲۰ = ۱۵۴$$

$$A + ۲! = ۱۵۶ + (\text{مضربی از } ۴۸)$$

$$\frac{A + ۲!}{۳!} = \frac{۱۵۶}{۶} + (\text{مضربی از } ۸) = ۲۶ + (\text{مضربی از } ۸)$$

و چون $۲۶ = ۳ \times ۸ + ۲$ ، باقی‌مانده برابر ۲ است.

پاسخ: گزینه ۴

۳۷ آزمون ورودی مؤسسه‌ای شامل ۲۵ سؤال انگلیسی و ۲۰ سؤال ریاضی است و پاسخ کاملاً درست به هر سؤال انگلیسی

۷ امتیاز و هر سؤال ریاضی ۱۲ امتیاز دارد و پاسخ ناقص بدون امتیاز است. اگر آخرین داوطلب پذیرفته‌شده، ۲۹۷ امتیاز کسب کرده

باشد، او در مجموع به چند سؤال پاسخ کاملاً درست داده است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۳۶ (۳) ۳۱ (۴) ۲۶

حل: اگر x تعداد زبان و y تعداد ریاضی درست باشد:

$$۷x + ۱۲y = ۲۹۷, \quad ۰ \leq x \leq ۲۵, \quad ۰ \leq y \leq ۲۰$$

به پیمانه ۷ کار می‌کنیم ($۲۹۷ \equiv ۳, ۱۲ \equiv ۵$):

$$۵y \equiv ۳ \pmod{۷} \Rightarrow y \equiv ۲ \pmod{۷} \Rightarrow y \in \{۲, ۹, ۱۶\}$$

$$y = ۲ \Rightarrow x = ۳۹ \quad \times \quad y = ۹ \Rightarrow x = ۲۷ \quad \times \quad y = ۱۶ \Rightarrow x = ۱۵ \quad \checkmark$$

پس $x + y = ۱۵ + ۱۶ = ۳۱$.

پاسخ: گزینه ۳

۳۸ چند عدد چهار رقمی با ارقام ۳، ۴ و ۶ می‌توان نوشت که بر ۶ بخش‌پذیر باشند؟

۲۳ (۴)

۱۹ (۳)

۱۵ (۲)

۱۳ (۱)

حل: بخش‌پذیری بر ۶ یعنی بخش‌پذیری بر ۲ و ۳.

رقم یکان باید زوج باشد: ۴ یا ۶

به پیمانه ۳ داریم $۱ \equiv ۴$, $۰ \equiv ۶$, $۰ \equiv ۳$, پس مجموع ارقام هم‌نهشت با «تعداد رقم‌های ۴» است و این تعداد باید مضرب ۳ باشد؛ در عدد چهاررقمی یعنی ۰ یا ۳ رقم ۴.

$۸ = ۳$ حالت ۱ — بدون رقم ۴: یکان = ۶ و سه رقم دیگر از {۳, ۶} $\Rightarrow ۲$

حالت ۲ — سه رقم ۴ و یکان = ۴: جای رقم غیر ۴ (۳ حالت) $\times$ مقدار آن (۲ حالت) = ۶

حالت ۳ — سه رقم ۴ و یکان $\neq ۴$: یکان = ۶ و بقیه ۴ $\Rightarrow$ عدد ۴۴۴۶ $\Rightarrow ۱$

$$۸ + ۶ + ۱ = ۱۵$$

پاسخ: گزینه ۲

۳۹ بزرگ‌ترین عدد طبیعی n که دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد، کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

حل: طبق قضیه بوز — شریخنده — پارکر، برای هر عدد طبیعی $n \geq ۳$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود دارد، به جز $n = ۶$. (برای $n = ۲$ نیز چنین زوجی وجود ندارد.)

بزرگ‌ترین آن‌ها ۶ است $\Rightarrow n = ۶, n = ۲$: مقادیر استثنا

گمان اوایل این بود که برای همه $n \equiv ۲ \pmod{۴}$ چنین زوجی وجود ندارد، اما این گمان نادرست از آب درآمد و تنها ۲ و ۶ استثنا هستند.

پاسخ: گزینه ۱

۴۰ گراف ۹ رأسی G، فقط دارای دوره‌هایی به طول ۵، ۶، ۷ و ۹ است. تعداد دوره‌های به طول کدام عدد در گراف G، بیشتر است؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۹ (۱)

حل: G دور به طول ۹ دارد، پس همیلتونی است؛ آن را $v_۱ v_۲ \dots v_۹$ می‌گیریم و بقیه یال‌ها وتر این دورند. هر وتر، دور را به دو دور با مجموع طول‌های ۱۱ می‌شکند:

جفت‌های ممکن از {۵, ۶, ۷, ۹} با مجموع ۱۱: فقط (۵, ۶)

پس هر وتر باید دو رأس به فاصله ۴ روی دور را به هم وصل کند. بررسی دو وتر $v_۱ v_{۵+۴}$ و $v_۲ v_{۶+۴}$:

✓ اختلاف اندیس ۱ $\Rightarrow$ دور ۴ $\times$ اختلاف ۳ $\Rightarrow$ دور ۸ $\times$ اختلاف ۴ $\Rightarrow$ مثلث $\times$ اختلاف ۲

با سه وتر یا بیشتر همیشه یکی از حالت‌های ممنوع پیش می‌آید، پس G دقیقاً $C_۹$ به همراه دو وتر $v_۱ v_۵$ و $v_۲ v_۶$ است. شمارش دوره‌ها:

طول ۵: ۲ دور طول ۶: ۳ دور طول ۷: ۱ دور طول ۹: ۱ دور

پس بیشترین تعداد مربوط به دوره‌های به طول ۶ است.

پاسخ: گزینه ۳



کلید پاسخ ها — ریاضیات کنکور سراسری ۱۴۰۵ (دفترچه ۱۲۱۸)

۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
۲	۳	۳	۲	۱	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۱	۳	۱	۳	۱	۲	۲	۴
۴۰	۳۹	۳۸	۳۷	۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱
۳	۱	۲	۳	۴	۴	۲	۱	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۳	۴	۳	۲	۳	۱

ردیف بالای هر جدول شماره سؤال و ردیف پایین شماره گزینه درست است. تهیه و تنظیم: medicalstus.ir

