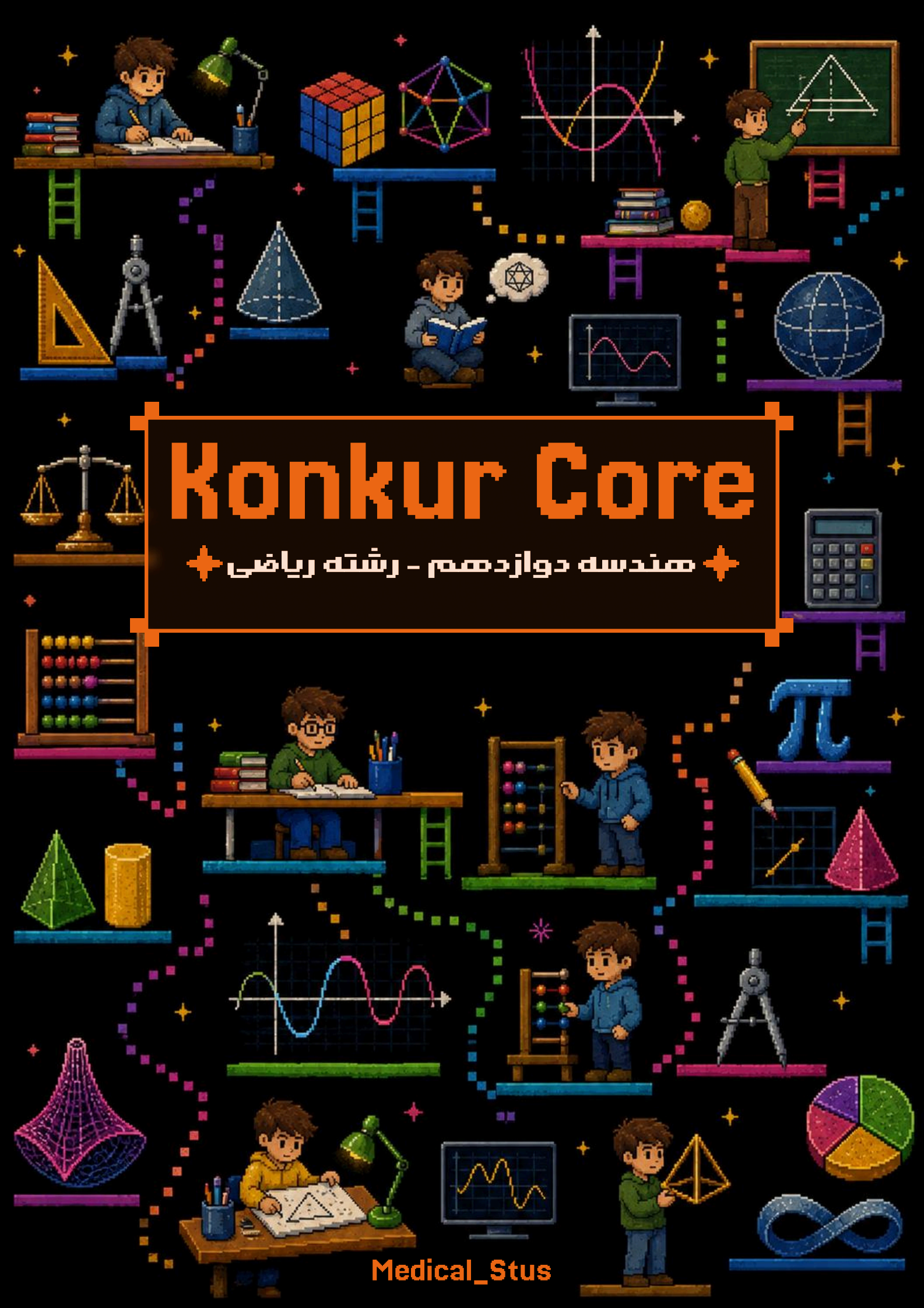

Konkur Core
هندسه دوازدهم - رشته ریاضی
Medical_Stus

MEDICAL STUS

خوبیا برمیگرده

اشتراک

مدیکال پلاس

تمام آموزش‌های مدیکال، در **یک اشتراک!**

اشتراک MEDICAL PLUS فقط شامل محصولات آموزشی زیر است

73 CORE

- آموزش پربازده کنکور
- به جای اتلاف وقت، برو سر اصل مطلب!
- جزوات هدفمند و به‌روز
- تدریس اسکرین رکورد
- تمرکز بر تیپ تست‌های پرتکرار

جاده نهایی

- روزی فقط ۱ ساعت برای ۲۰ نهایی
- برنامه تا خود امتحانات
- جزوه کامل و به‌روز
- فیلم آموزشی متناسب با جزوه
- تمرین + نمونه سوال + آزمون

صد فرهنگیان

- ۲۵ ساعت آموزش کامل اختصاصی فرهنگیان
- هوش + تعلیم و تربیت + دین و رندگی
- جزوه و تدریس کامل (حدود ۲۵ ساعت)
- جزوه کامل مصاحبه (۱۰۰) صفحه)
- دسترسی به گروه VIP آزمون

مزایای اشتراک مدیکال پلاس

- ضمانت عودت وجه تا ۱۴ روز
- پشتیبانی شروع کار (ویژه اشتراک ۳ ساله)
- دسترسی دائمی و نامحدود
- آپدیت مداوم محتوا
- دسترسی کامل به سه محصول برتر آموزشی

با یک اشتراک، **سه محصول** قدرتمند آموزشی را در اختیار شماست!

MEDICAL STUS

خوبیا برمیگرده

طرح‌های مشاوره

۳ سطح پشتیبانی، متناسب با نیاز تو

MENTORING

برای دانش‌آموزان
خودران و مستقل

- بدون برنامه‌ریزی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- گزارش شبانه
- تماس هفتگی

اگه خودت برنامه می‌ریزی و فقط به همراه مطمئنم لازم داری تا ادامه بدی و بهتر بشی، این طرح برای تونه!

TASK PLAN

برای دانش‌آموزان
نیازمند برنامه کامل

- برنامه‌ریزی شخصی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- گزارش شبانه
- تماس هفتگی

اگه می‌خوای از صفر تا صد، با یه برنامه شخصی دقیق و منظم جلو بری و هیچ چیزی رو از دست ندی!

TASK PLAN PRO

برای دانش‌آموزان
با نیاز به پشتیبانی بالا

- برنامه‌ریزی شخصی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- ۲ گزارش در روز
- ۲ تماس در هفته

اگه می‌خوای پیشترین پیگیری و همراهی رو داشته باشی و با قدرت و تمرکز کامل به هدفت برسی!

- **پشتیبانی واقعی**
  در کنار تو هستیم تا به هدفت برسی
- **سیستم آزمونی مداوم با سوالات به روز**
  سوالات مداوم و به‌روز متناسب با سطح و برنامه‌ات
- **امکان خروج در صورت کم‌کاری مشاور**
  اگه عملکرد مشاور رضایت‌بخش نبود، می‌تونی خارج بشی
- **امکان تغییر مشاور**
  تغییر مشاور در صورت نیاز، سریع و راحت

با هر طرح مشاوره، اشتراک MEDICAL PLUS با تخفیف ویژه در دسترسه!

@medical_stus | medicalstus.ir

فصل اول : ماتریس و کاربردها

۴۸ سوال

۱ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ -۱ & -۱ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های A چند برابر حاصل‌ضرب درایه‌های $A^{۲}$ است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) -۱ ۴) ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲ اگر $B=\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ -۱ & -۱\end{bmatrix}$ و $۳I-۲A^{-۱}B=\begin{bmatrix}۷ & ۵\\ -۱۲ & -۱۱\end{bmatrix}$ باشد، کوچک‌ترین درایه ماتریس $۳B^{-۱}-۲A^{-۱}$ کدام است؟

۱) -۱۱ ۲) -۱۴ ۳) ۱ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳ برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$، اگر $C=A\times B$ و $D=B\times C\times A$ باشد، $|D|$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

۴ اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۴ & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۵\\ ۰ & ۰ & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $D=\mathrm{B}A^{۳}B$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) -۸ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

۵ اگر ماتریس‌های $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\\ -۱ & ۰\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $A=B\times C$ باشند، درایه واقع در سطر سوم ستون اول ماتریس $A^{۵}$ کدام است؟

۱) -۱۶ ۲) -۳۲ ۳) -۸ ۴) -۶۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۳ & ۰\\ ۵ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & ۰ & ۱\\ ۰ & -\frac{۱}{۳} & ۰\\ ۰ & ۰ & -۵\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left|(\mathrm{AB})^{۲}\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۶}{۹}$ ۲) $\frac{۲۵}{۹}$ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و ماتریس $B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & a\\ ۰ & \sqrt{۲b} & ۰\\ c & ۰ & d\end{bmatrix}$، اگر $|A|=۲$ و $B^{۲}=۲I$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس $B^{۳}$ کدام است؟

۱) $۳۲\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $-۳۲\sqrt{۲}$ ۴) $-۲\sqrt{۲}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۸ برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$، اگر $\left|A^{۲}+\mathrm{kA}-A\right|=۱۲۵$ باشد، دترمینان $(k+۱)I_{۳}$ کدام است؟ $(k\in Z)$

۱) ۶۴ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۶۴

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۹ اگر $\begin{vmatrix}\mathrm{Log}\,۵ & \mathrm{Log}\,۲\\ \mathrm{Log}\,۲ & \mathrm{Log}\,۵\end{vmatrix}=\mathrm{Log}\,(۳x+۱)$ باشد، مقدار $\mathrm{Log}\,\frac{x}{\sqrt{۲}}$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۰ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ -۱ & -۲ & -۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های $A^{۲}$ چند برابر مجموع درایه‌های A است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۳ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۱۱ اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ و $۲I-۳A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $۲A-۳B^{-۱}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۱۲) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس $A^{۳}$ کدام است؟

۱) $[-۱۰\ ۱\ ۵]$ ۲) $[-۱۰\ ۱\ ۷]$ ۳) $[۷\ ۵\ -۵]$ ۴) $[۷\ ۵\ -۲]$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۳) اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس $A\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۶ & -۱\end{bmatrix}B-\frac{۳}{۲}A\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۴ & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix}B$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) ۹ ۴) -۹

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۴) اگر $a=(\text{Log}\ ۲۵)^{۲}-(\text{Log}\ ۴)^{۲}$ و $A=\begin{bmatrix}۱۰^{\frac{a}{۴}} & ۲^{\frac{a}{۲}}\\ ۵^{\frac{a}{۲}} & ۱۰^{\frac{a}{۲}}\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left|\frac{۱}{۳}A\right|$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۸}$ ۲) $\frac{۷۵}{۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۲۴}$ ۴) $\frac{۷۵}{۲۴}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵) اگر $A=\begin{bmatrix}\text{Log}_{۶}^{۳} & \text{Log}_{۶}^{۲}\\ \text{Log}_{۶}^{۲} & \text{Log}_{۶}^{۳}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۶^{|A|} & ۲^{|A|}\\ ۳^{|A|} & ۳۶^{|A|}\end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان B، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۸}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۶) اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳ & ۰\\ ۴ & ۲ & -۵\\ -۲ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{|A|} & ۰\\ ۰ & -\sqrt{|A|}\end{bmatrix}$ صدق کند، کوچک‌ترین درایه ماتریس X کدام است؟

۱) ۴ ۲) $۴/۵$ ۳) ۵ ۴) $۵/۵$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۷) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & y\\ ۰ & x & ۰\\ ۱ & ۰ & z\end{bmatrix}$ و $A^۲$ ماتریس اسکالر باشد، حاصل $x^۲-y+z$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۲ ۳) -۶ ۴) صفر

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۸) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\\ ۰ & ۲ & -۳\\ ۳ & -۲ & ۴\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $||A|A|$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۱۶ ۴) ۱۶

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۹) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۰ & -۲ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۱ & x & -۱\\ ۱ & ۱ & x\\ x & ۱ & -۱\end{bmatrix}$، $C=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$ و $D=ABC$ باشد، به ازای کدام مقدار x، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) ۵ ۴) ۶

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۲۰) اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ کدام است؟

۱) $[۱ \quad -۱ \quad ۰]$ ۲) $[۹ \quad ۱۲ \quad ۱۶]$ ۳) $[۱ \quad ۰ \quad -۲]$ ۴) $[۹ \quad ۵ \quad -۷]$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۱) ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۴ & -۳\end{bmatrix}$، I ماتریس همانی و α و β دو عدد حقیقی هستند که $\alpha A+\beta I=A^{-۱}$. مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) ۴ ۳) -۲ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۲) اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۴ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix}۲|A| & |A|\\ ۱ & \frac{۲}{|A|}\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ صدق کند، کوچک‌ترین درایه قطر اصلی ماتریس X کدام است؟

۱) -۱۵ ۲) -۳ ۳) ۶ ۴) ۸

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۲۳) اگر $A=\begin{bmatrix}x & -۱ & -x\\ ۰ & ۰ & ۴\\ y & z & z\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲z & \frac{۱}{۲} & ۲\\ ۲z & ۰ & -۴y\\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰\end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y\in Z$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۲۴ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & a & ۳\\ -۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $\mathrm{AA}^T B=۵۲I$. اگر $|B|=۱۰۴$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۵ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۸ & ۴\\ ۳ & ۲ & ۵\\ ۶ & ۹ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$. مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۶ اگر ماتریس ناصفر $b=\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix}۵ & -۲\\ ۴ & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_۱\\ b_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴b_۱\\ ۴b_۲\end{bmatrix}$، آن‌گاه مقدار a، کدام است؟

۱) -۴ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) ۱۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۱\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}$. اگر $\mathrm{BA}^T A=۵۳I$ باشد، ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B، کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۸ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷ & ۸ & ۴\\ ۳ & ۲ & ۵\\ ۶ & ۹ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & ۱ & -۱\\ ۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۲۹) فرض کنید $\begin{vmatrix} \text{Log}\,۵ & \text{Log}\,۲ \\ \text{Log}\,۲ & \text{Log}\,۵ \end{vmatrix} \text{Log}_{\frac{۵}{۲}}^{(۳x-۲)} = ۱$، مقدار x، کدام است؟

۱) ۹ ۲) $\frac{۱۷}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۷}{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۳۰) جواب‌های معادله‌ی $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۲ & ۴ & x+۵ \\ x-۱ & ۶ & -۱ \end{vmatrix} = ۰$، کدام است؟

۱) $۴, -۹$ ۲) $۳, -۸$ ۳) $-۴, ۹$ ۴) $-۳, ۸$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۱) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و ماتریس X، جواب معادله‌ی $AX = A^{-۱}$، باشد. ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} -۳۲ & ۱۴ \\ ۴۸ & -۲۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۳۲ & -۱۴ \\ -۵۶ & ۲۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱۶ & -۷ \\ -۲۸ & ۲۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۱۶ & -۷ \\ -۲۵ & ۱۴ \end{bmatrix}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۲) اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۴$، کدام است؟

۱) $[۰\ ۱\ ۰]$ ۲) $[۱\ ۰\ ۰]$ ۳) $[۰\ ۰\ ۱]$ ۴) $[۱\ ۰\ ۱]$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۳) جواب‌های معادله‌ی $\begin{vmatrix} -۴ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲-x & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۳-x \end{vmatrix} = ۰$، کدام است؟

۱) $۱, -۴$ ۲) $۱, ۴$ ۳) $۱, ۵$ ۴) $۲, ۵$

سراسری-ریاضی-۹۹

۳۴) از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$، ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۹ & -۷ \\ ۴ & ۴ \end{bmatrix}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۳۵) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس $A^۳$، کدام است؟

۱) $[۳۰ \quad ۶ \quad ۶۴]$ ۲) $[۳۰ \quad ۶ \quad ۷۸]$ ۳) $[۲۴ \quad ۸ \quad ۸۶]$ ۴) $[۳۰ \quad ۶ \quad ۸۶]$

سراسری-ریاضی-۹۹

۳۶) دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۲۲ ۴) ۲۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$، از رابطه‌ی $AX=B$، ماتریس X، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۳ \\ -۱ & -۸ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۱ \\ ۱ & -۶ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱۳ \\ -۱ & -۶ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۱ & -۱۲ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۸ به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری است؟

۱) $x=۱, y=-۷$ ۲) $x=۲, y=-۷$ ۳) $x=۲, y=-۵$ ۴) $x=۱, y=-۵$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۹ اگر $a+b+c=۵$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{bmatrix} ۴+a & b & c \\ a & ۴+b & c \\ a & b & ۴+c \end{bmatrix}$، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۲۴ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۴۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۰ ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۱ & ; \ i=j \\ ۲ & ; \ i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲-۴A$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۱ در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ اگر $a_{ij}=\begin{cases}۲ & ; i\neq j\\ ۱ & ; i=j\end{cases}$ باشد، ماتریس $A^{۲}-۴A$، برابر کدام است؟

۱) $۳A^{t}$ ۲) $۵A^{t}$ ۳) $۳I$ ۴) $۵I$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۲ اگر دترمینان $D=\begin{vmatrix}۶ & ۳x & ۲x\\ ۳x & ۲x & ۶\\ ۲x & ۶ & ۳x\end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}x^{۲} & x^{۲} & ۶\\ ۹ & ۲x & ۹\\ ۳x & ۴ & ۴\end{vmatrix}$، کدام است؟

۱) $-۲D$ ۲) $-D$ ۳) $\frac{۱}{۲}D$ ۴) D

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۳ از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ ۵ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$، سطر اول ماتریس A کدام است؟

۱) $[۲۱\ ۱۷]$ ۲) $[۲۱\ ۱۹]$ ۳) $[۳۱\ ۱۷]$ ۴) $[۳۱\ ۱۹]$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۴ اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$، ماتریس $A^{۴}$ کدام است؟

۱) بالا مثلثی ۲) پایین مثلثی ۳) قطری غیرهمانی ۴) همانی

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۵) اگر $A=\begin{bmatrix}۵+a & b & c\\ a & ۵+b & c\\ a & b & ۵+c\end{bmatrix}$ با شرط $a+b+c=۷$، دترمینان ماتریس $(۵A^{-۱})$ کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۵}{۷}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۶) اگر $A=\begin{bmatrix}\text{Log}\,۵ & \text{Log}\,۲\\ \text{Log}\,۲ & \text{Log}\,۵\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $|A|$ کدام است؟ ($|\ |$ ، علامت دترمینان است.)

۱) $۲\,\text{Log}\,۱/۲۵$ ۲) $\text{Log}\,۲/۵$ ۳) $\text{Log}\,۳$ ۴) $\text{Log}\,۶/۲۵$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۷) اگر ۲ ، b ، a سه عدد متمایز باشند، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}۱ & ۳ & ۴(a+b)\\ ۱ & a+۱ & a^{۲}(b+۲)\\ ۱ & b+۱ & b^{۲}(a+۲)\end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $۴ab$ ۳) $(a-۲)(b-۲)$ ۴) $۲(a-۲)(b-۲)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۸) اگر به هر درایه در سطر دوّم دترمینان $\begin{vmatrix}۳ & ۲ & a\\ ۴ & -۲ & ۷\\ ۰ & ۵ & ۶\end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می‌شود. a کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

فصل دوم : آشنایی با مقاطع مخروطی

۴۹ سوال

۴۹ اگر $x = ۳$ معادله خط هادی سهمی به معادله $y^۲ - ۲y + ۴x = a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۰ نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی $x = -y^۲ + ۵y - ۶$ قرار دارد. اگر فاصله نقطه A از کانون سهمی برابر $۱/۵$ باشد، مقدار α کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) -۲

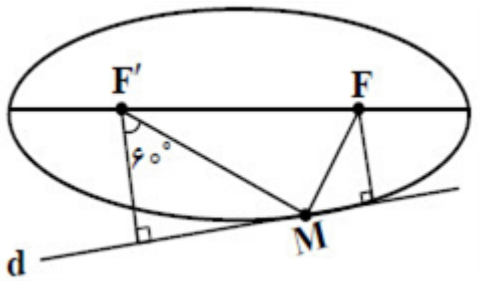
سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

۵۱ نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی $y^۲ + ۲x + ۳y + ۲ = ۰$ قرار دارد. اگر فاصله نقطه A از کانون سهمی برابر $۲/۵$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای β کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۲ در شکل مقابل، خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. اگر فاصله بین پای عمودهای رسم شده از دو کانون F و F' بر خط d برابر $۲\sqrt{۳}$ باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۵۳ مختصات مرکز دایره‌ای که از نقطهٔ $(۴/۵, ۰/۵)$ بگذرد و بر خط $۳x - ۲y = ۶$ در نقطهٔ $(۲, ۰)$ مماس باشد، کدام است؟

۱) $(۲/۵, ۴)$ ۲) $(۳, ۱/۵)$ ۳) $(۴, -۳/۵)$ ۴) $(۳/۵, -۱)$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۵۴ خط $x = -\frac{۵}{۴}$ خط هادی سهمی به معادله $۳y^۲ - ۳x - ay = ۰$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۵۵ کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = ۳$ و $x = -۳$ روی محور xها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۳}$ باشد، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

۱) $۱۵\sqrt{۲}$ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۶\sqrt{۲}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۵۶ خطی به معادله $y + ۲x = ۰$، عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر معادلهٔ دایرهٔ بزرگ‌تر به صورت $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = a$ و خط مفروض بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) -۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۷ نمودار سهمی با مختصات رأس $(-۲, ۲)$، از نقطه $(-۱, ۱)$ می‌گذرد. طول وتری که از کانون بر محور سهمی عمود رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۸ خط d به معادله $y - x = ۰$، عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایره کوچک‌تر به معادله $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = r$ مماس باشد، حاصل ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۶۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۶۵}{۶۴}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۵۹ نمودار سهمی با مختصات رأس $(-۱, -۱)$، از نقطه $(۱, ۱)$ می‌گذرد. اگر از دو سر وتری که از کانون بر محور سهمی عمود است، دو خط موازی با محور سهمی بر خط هادی عمود کنیم، یک مستطیل رسم می‌شود. قطر مستطیل حاصل کدام است؟

۱) $۵\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۰ در سهمی $۴y^۲ - ۲by - ۳۲x + a = ۰$، نقطه $\left(\frac{۱}{۲}, -۲\right)$ رأس سهمی است. مقدار $a - b$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۴۸

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۶۱ اگر $x + ay = ۳$ و $x + by = c$ به‌ترتیب خطوط مماس و قائم بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + αx + y = β$ در نقطهٔ $(۱, -۱)$ باشند، مقدار $α + β$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۶۲ از کانون سهمی $y^۲ - x - ۴y + ۲ = ۰$ خطی عمود بر محور تقارن آن رسم می شود تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. مساحت مثلثی با رئوس A، B و رأس سهمی، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۶۳ دو دایره با شعاع یکسان در نقاط $(۱, ۴)$ و $(۳, ۲)$ همدیگر را قطع می‌کنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره، دو برابر فاصله بین نقاط تقاطع باشد، فاصله بین نقاط برخورد یکی از دایره‌ها با محور xها کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۶۴ فاصله دو کانون بیضی $x^۲ + ۴y^۲ - ۱۶y - ۲x + ۱۶ = ۰$، کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۵}$ ۲) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۵ معادله دایره‌ای که بر دو دایره $x^۲ - ۸x + y^۲ + ۱۵ = ۰$ و $x^۲ - ۲x + y^۲ = ۰$ مماس خارج است و مرکزش روی یکی از محورها قرار دارد، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ + ۵x + ۶ = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۵x + ۶ = ۰$

۳) $۴x^۲ + ۴y^۲ - ۲۰x + ۲۵ = ۰$ ۴) $۴x^۲ + ۴y^۲ + ۲۰x + ۲۵ = ۰$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۶ به ازای هر m، معادله $(m-۲)x+(m+۱)y=۶$، معادله قطری از دایره C است. اگر نقطه $A(-۱,۱)$ روی دایره C باشد، محیط دایره C کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲\pi}$ ۲) ۲π ۳) ۳π ۴) $۲\sqrt{۳\pi}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۶۷ در سهمی $۲y^۲-۲ay+۸x+b=۰$ نقطهٔ $(-۱,۱)$ رأس سهمی است. مقدار $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $-\frac{۱}{۵}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۶۸ کدام عبارت زیر درست است؟

۱) مجموعه‌ی خطوط عمود بر یک خط در فضا، بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

۲) مجموعه‌ی نقاطی که از یک خط مفروض در فضا، متساوی‌الفاصله‌اند، روی سطح یک کره قرار می‌گیرند.

۳) مجموعه‌ی نقاطی که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت در فضا، به یک اندازه باشند، روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.

۴) مجموعه‌ی خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه، زاویه ی یکسان می‌سازند، روی سطح یک مخروط قرار می‌گیرند.

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۹ فرض کنید خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x+۳y+۵=۰$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $M(۴,-۲)$ از دایره، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}-۱$ ۲) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\sqrt{۵}-۲$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۰ سهمی $(x-۱)^۲ = ۱۲y$ با رأس F و کانون F' مفروض است. یک بیضی با کانون‌های F و F' و خروج از مرکز ۰/۶ می‌سازیم. فاصله‌ی مرکز بیضی از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۱ کدام عبارت درست است؟

۱) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در تعداد نامتناهی صفحه قرار می‌گیرند.

۲) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در صفحه‌ی عمود بر آن دو خط قرار می‌گیرند.

۳) مجموعه نقاطی از فضا که از یک نقطه و یک خط که از آن نقطه نمی‌گذرد، به یک فاصله باشد، روی منحنی سهمی شکل قرار دارند.

۴) مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی آن از دو نقطه‌ی ثابت در فضا، به یک اندازه باشند،روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۲ در سهمی به معادله‌ی $y^۲ + \mathrm{a}y + \mathrm{b}x - ۹ = ۰$، معادله‌ی خط هادی، $x = \frac{۱۳}{۴}$ و محور تقارن آن $y = ۱$ است. مقدارهای b، کدام‌اند؟

۱) ۵, ۸ ۲) ۵, ۷ ۳) ۴, ۸ ۴) ۳, ۷

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۳ یک بیضی به قطرهای $\mathrm{AA}' = ۱۴$ و $\mathrm{BB}' = ۴\sqrt{۶}$ و کانون F نزدیک به نقطه‌ی A، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه‌ی F دایره به قطر AA' را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. اندازه‌ی پاره‌خط AM، کدام است؟

۱) ۷ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۴ از میان دایره‌های گذرا از نقطه‌ی $A(۳, ۲)$ و مماس بر خطوط $۳x - ۴y = ۰$ و $y = ۰$، کوچک‌ترین شعاع دایره کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۹}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۵ دایره‌ای به مرکز $(۱, ۳)$ بر روی خط راست $۵x + ۱۲y = ۱۵$، وتری به طول $۲\sqrt{۲۱}$، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور xها، وتری با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۶ اگر نقطه‌ی $F(-۰/۲۵, -۲)$ کانون سهمی $y^۲ + ay + bx + ۱ = ۰$ باشد، کوچک‌ترین مقدار b، کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۳ ۳) -۲ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۷ در یک بیضی به قطرهای ۸ و $۲\sqrt{۷}$ واحد و کانون‌های F و F'، دایره‌ای به قطر $F'F$ بیضی را در نقطه‌ی M، قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

۱) $۴ - ۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲/۵ ۳) $۴ - ۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۸ از بین دایره‌های گذرا از نقطه‌ی $A(۱, -۴)$ و مماس بر خط های $۴x + ۳y = ۰$ و محور yها، بزرگ‌ترین شعاع دایره، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱۷}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۲۲}{۹}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۹ کوچک‌ترین دایره‌ی گذرا بر دو نقطه‌ی $A(۲,۵)$ و $B(-۴,۱)$، محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱) ۳- و ۱ ۲) ۳- و ۰ ۳) ۱- و ۲ ۴) ۲- و ۳

سراسری-ریاضی-۹۹

۸۰ در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

۱) ۶۰° ۲) ۹۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۱۵۰°

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۱ مختصات کانون سهمی به معادله‌ی $۲x^۲ - ۴x + ۳y = ۴$، کدام است؟

۱) $\left(۱, \frac{۵}{۴}\right)$ ۲) $\left(۱, \frac{۱۳}{۸}\right)$ ۳) $\left(\frac{۱}{۴}, ۲\right)$ ۴) $\left(\frac{۵}{۸}, ۲\right)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۲ دایره‌ی C بر دایره به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(۸,۷)$ می‌گذرد. شعاع دایره‌ی C کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۳ دایره‌ی گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$، مماس است. مختصات مرکز این دایره، کدام است؟

۱) $(-۳, ۲)$ ۲) $(-۳, ۱)$ ۳) $(-۲, ۱)$ ۴) $(-۱, ۲)$

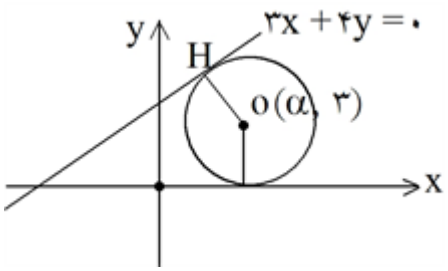
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۴ فاصله‌ی کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵- قطع می‌کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۵ دایره‌ای بر محور xها و خط به معادله‌ی $۳x + ۴y = ۰$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه‌ی اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه‌ی مشترک آن با محور xها با کدام طول است؟



۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۶ در سهمی به معادله‌ی $۳x^۲ + ۴y - ۶x + ۱۱ = ۰$ ، معادله‌ی خط هادی کدام است؟

۱) $y = -\frac{۵}{۳}$ ۲) $y = -\frac{۴}{۳}$ ۳) $y = -\frac{۲}{۳}$ ۴) $y = -\frac{۱}{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۷ به ازای کدام مقدار b، دو دایره به معادلات $x^۲ + y^۲ + ۴\sqrt{۶y} + b = ۰$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۳$ مماس خارج‌اند؟

۱) ۸ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۸ نقطه‌ی $A(۳,۶)$ روی دایره‌ای است که بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۱۲ و ۲ ۲) ۱۵ و ۲ ۳) ۹ و ۳ ۴) ۱۵ و۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۹ دایره‌ای بر دو نقطه‌ی $(۰,۲)$و $(۴,۰)$ گذشته و بر محور xها مماس است. این دایره محورyها را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۰ معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله‌ی $y = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۳x + ۲$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۴y + ۱۲ = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + ۸ = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۴y + ۵ = ۰$ ۴) $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۳y + ۹ = ۰$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۱ یک سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند، رأس آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است، فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۲ نقطه‌ی $M\left(۲\sqrt{۵}, b\right)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $x = ۲y$ مماس است، شعاع دایره کوچک‌تر، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۳ سهمی به کانون $(۱, ۲)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = -۳$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۴}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۴ فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y = ۴$ از خط به معادله $۳x + ۴y = ۱۵$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۵ دایره‌ای بر خط به معادله $y = ۲x - ۱$ مماس است و تمام قائم‌های بر دایره از نقطه $(-۱, ۲)$ می‌گذرند. بیش‌ترین فاصله نقاط این دایره از محور xها کدام است؟

۱) $۲ + \sqrt{۵}$ ۲) $۳ + \sqrt{۲}$ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۶ اگر خط به معادله‌ی $x = -۱$ خط هادی سهمی $۲y^۲ - ۴y = ax$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۳, ۴)$ از کانون سهمی کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۷ وتر مشترک دایره به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱۷$، با دایره‌ی C گذرا بر نقطه‌ی $(-۱, ۶)$، بر خط به معادله‌ی $۲x - y = ۳$ منطبق است. شعاع دایره‌ی C، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

فصل سوم : بردار ها

۳۰ سوال

۹۸ مساحت مثلثی برابر ۱۶ و مختصات وسط اضلاع آن نقاط $(a,۴,۱)$، $(a,b,۳)$ و $(a,۹,b)$ هستند. مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۵ ۳) ۱۰ ۴) -۱۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۹ اگر $\vec{u}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{v}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $۲\vec{a}$ و $-\vec{b}$ باشد، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تولید می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

۱۰۰ اگر $\vec{e}_۱$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{e}_۲$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $۳\vec{a}$ و $-۲\vec{b}$ باشد، طول یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{e}_۱$ و $\vec{e}_۲$ تولید می‌شود، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، ۶۰° باشد، اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۰۲ مساحت مثلثی برابر ۶۴ و مختصات وسط اضلاع آن نقاط $A(۳,a,b)$، $B(-۱,-a,b)$ و $C(۵,-۴,b)$ هستند. طول ضلع AB کدام می‌تواند باشد؟ (با اندکی تغییر)

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۱۰}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۱۰۳ یک متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{a}=(۲,-۳,۴)$، $\vec{b}=(-۱,۲,۳)$ و $\vec{c}=(۳,-۲,۱)$ تولید شده و صفحه P شامل بردارهای b و c است. اندازهٔ ارتفاع این متوازی‌السطوح عمود بر صفحه P، کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۰۴ اگر دو بردار ناصفر $\frac{۹\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۷\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۳\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر هم عمود باشند، مساحت متوازی‌الاضلاعی را که توسط بردارهای ناصفر $\frac{۳\vec{a}}{|\vec{b}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۳/۲ ۳) ۴/۸ ۴) ۶/۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۵ فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای ناصفری هستند که ضرب داخلی آنها، $-\frac{۳}{۵}$ حاصل‌ضرب اندازه‌های دو بردار است. مساحت مثلثی را که توسط بردارهای $\left(\frac{۳\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ و $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۶/۴ ۲) ۴/۸ ۳) ۳/۲ ۴) ۱/۶

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۰۶ اندازه تصویر قائم بردار $(۲, -a, ۳)$ بر امتداد بردار $(۱, ۰, a)$ برابر $\frac{۵}{\sqrt{۲}}$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۷ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۰}{۷}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۰۷ دو بردار که اندازه یکی دو برابر دیگری است، با هم زاویه ۶۰ درجه می‌سازند. زاویه بین بردار بزرگ‌تر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۵ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۸ سه بردار $\vec{a} = (۱, ۱, ۰)$ ، $\vec{b} = (-۱, ۲, ۰)$ و $\vec{c}$ غیر واقع در یک صفحه و $\vec{h} = (x, y, ۴)$ بردار ارتفاع متوازی‌السطوح حاصل از این سه بردار است. اگر $\vec{a} . \vec{c} = ۱$ و $\vec{b} . \vec{c} = ۵$ باشد، اندازه بردار $\vec{c}$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) $\sqrt{۱۹}$ ۴) $\sqrt{۲۱}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۹ اگر $A = (-۱, ۲, ۰)$، $B = (۱, ۰, -۱)$ و $C = (۰, -۱, ۱)$، سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

۱) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

(۱۱۰) بردارهای $\vec{a} = (-۱, \alpha, ۲)$ و $\vec{b} = \left(-\frac{۴}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۲\right)$ در فضا مفروض‌اند. اگر بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ موازی بردار $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ باشد، مقدار α، کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۳
۴) هیچ مقداری برای α به دست نمی‌آید.

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

(۱۱۱) بردار $\vec{a} = (-۱, \alpha, ۱)$ با محور z در فضا زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد. اگر $\vec{b} = \left(-\frac{۴}{۳}, \frac{۲}{۳}, ۲\right)$ و زاویه‌ی بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ با محور zها، θ باشد، مقدار $\text{Cos}\,\theta$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $-\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

(۱۱۲) اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = ۴\vec{i} + \vec{k}$ باشند، حجم متوازی‌السطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ ساخته شود، کدام است؟

۱) ۱۵۶
۲) ۱۶۹
۳) ۱۷۴
۴) ۱۸۹

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

(۱۱۳) به ازای کدام مقدار m ، بردار $a = (-۳, ۱۰, m)$ برابر مجموع دو بردار هم‌راستا با بردارهای $(۳, ۱, ۲)$ و $(۱, ۴, -۲)$ است؟

۱) -۱۰
۲) -۸
۳) ۹
۴) ۱۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۴ دو بردار a و b با معلومات $|a| = ۵$ و $|b| = ۷$ و $a - b = ۲i + j - ۳k$ مفروض‌اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a ، چند برابر بردار a است؟

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۸ ۳) ۱/۲ ۴) ۱/۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۵ نقطه‌ی O مبدأ مختصات و $\overrightarrow{OA} = ۳i + j$ و $\overrightarrow{OB} = -i + ۵j + ۴k$ مفروض هستند. اگر $\overrightarrow{AM} = -\frac{۳}{۴}\overrightarrow{AB}$ باشد، کسینوس زاویه‌ی برار $\overrightarrow{OM}$ با محور yها کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۵}$ ۲) $-\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۶ چهار بردار a, b, c و d در دو رابطه $a \times c = d \times b$ و $a \times d = c \times b$ صدق می‌کنند، الزاماً دو بردار غیر صفر $a + b$ و $c + d$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱) مساوی ۲) قرینه ۳) عمود ۴) موازی

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۷ سه بردار $V_۱ = (۱, -۱, a), V_۲ = (۲, b, ۱)$ و $V_۳ = (c, ۳, ۲)$ دو به‌دو عمود برهم هستند. $a + b + c$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۸ سه بردار a و b و c با اندازه‌ی ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه‌ی $a + b + c = ۰$ صدق می‌کنند، مقدار $a.b + b.c + c.a$ کدام است؟

۱) -۳۷ ۲) -۱۹ ۳) ۱۹ ۴) ۳۷

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۹) بردار $a = i + ۲j - ۴k$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر روی دو بردار a و $a \times k$ ساخته شود، کدام است؟

۱) $\sqrt{۸۴}$ ۲) $\sqrt{۹۶}$ ۳) $\sqrt{۱۰۲}$ ۴) $\sqrt{۱۰۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۰) اگر بردار $a = (۱, -۱, m)$ با محور zها زاویه‌ی ۴۵ درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور xها کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۱) اگر a, b, c و d چهار بردار دلخواه باشند، آن‌گاه سه بردار $a \times d, b \times d$ و $c \times d$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) موازی یک صفحه‌اند
۲) موازی هم‌اند
۳) دو به دو عمود بر هم‌اند
۴) مجموع آن ها برابر صفر است.

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۲) به ازای کدام مقدار m، بردار $a = (۱, ۲, m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(۰, -۱, ۲)$ و $(۲, ۳, -۱)$ نوشت؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{-۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{-۳}{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۳) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار واقع بر نیمسازهای سه صفحه‌ی xoy ، yoz و zox به ترتیب با طول‌های $\sqrt{۲}$ ، $۲\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ با مولفه‌های غیر منفی ساخته می‌شود، چند واحد مکعب است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ۴) $۱۲\sqrt{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۴) بر روی دو بردار $a = ۳i + ۳j$ و $b = i - j - ۲k$ متوازی‌الاضلاع ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۵) بردارهای a, b و c با شرط $(a-c)\times b = a\times c$ مفروض‌اند، الزاماً کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) $a.(b.c) = ۰$ ۲) $a.(b\times c) = ۰$ ۳) $a\times(b\times c) = ۰$ ۴) هر سه بردار موازی‌اند.

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۶) بر روی سه بردار $a = ۲\vec{i} - \vec{j}$, $b = \vec{j} + ۳\vec{k}$ و $c = ۴\vec{i} - \vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده‌است. اگر قاعده این متوازی السطوح را بردارهای a و b تشکیل دهند، ارتفاع متوازی‌السطوح کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۷) اگر سه بردار به تصاویر $(۲, a, ۱)$، $(b, ۲, ۴)$ و $(۲, ۱, c)$ یال‌های یک مکعب مستطیل باشند، حجم آن کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\-۱&-۱&-۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\-۱&-۱&-۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\-۱&-۱&-۱\\۱&۱&۱\end{bmatrix}=A$$

پس:

$$\frac{\text{حاصل ضرب درایه ها } A}{\text{حاصل ضرب درایه های } A^{۲}}=۱$$

۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس $B^{-۱}$ را به دست می‌آوریم.

$$B=\begin{bmatrix}-۲&-۳\\-۱&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\frac{۱}{۲-۳}\begin{bmatrix}-۱&۳\\۱&-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۱&۲\end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت راست در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم.

$$۳I-۲A^{-۱}B=\begin{bmatrix}۷&۵\\-۱۲&-۱۱\end{bmatrix}\xrightarrow{\times B^{-۱}}۳B^{-۱}-۲A^{-۱}=\begin{bmatrix}۷&۵\\-۱۲&-۱۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۱&۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳B^{-۱}-۲A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲&-۱۱\\-۱&۱۴\end{bmatrix}$$

پس کوچکترین درایه‌های این ماتریس ۱۱- است.

۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس D را پیدا می‌کنیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

$$D=B\times C\times A=B\times A\times B\times A=(\mathrm{BA})(\mathrm{BA})=(\mathrm{BA})^{۲}\ (۱)$$

اکنون ماتریس BA را به دست می‌آوریم.

$$\mathrm{BA}=\begin{bmatrix}۱&۰&-۱\\۰&۱&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\\-۱&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow|\mathrm{BA}|=۲$$

بنابراین:

$$(۱)\text{ از }\Rightarrow|D|=\left|(\mathrm{BA})^{۲}\right|=|\mathrm{BA}|^{۲}=۲^{۲}=۴$$

۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر ماتریس‌های A و B مربعی باشند آنگاه $|\mathrm{AB}|=|A|\,|B|$ پس:

$$|D|=\left|\mathrm{BA}^{۳}B\right|=|B|\,|A|^{۳}\,|B|=|B|^{۲}|A|^{۳}$$

از طرف دیگر $|B|=(-۲)(۳)(۴)=-۲۴$ و $|A|=(-۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right)=-\frac{۱}{۶}$ بنابراین:

$$|D|=|B|^{۲}|A|^{۳}=(-۲۴)^{۲}\left(-\frac{۱}{۶}\right)^{۳}=۲۴\times۲۴\times\frac{-۱}{۶\times۶\times۶}=\frac{-۱۶}{۶}=-\frac{۸}{۳}$$

۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = B \times C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس $A^۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$A^۵$ درایهٔ سطر سوم ستون اول = ($A^۲$ سطر سوم)A($A^۲$ ستون اول)

$$= [-۲ \ ۰ \ ۲] \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} = [-۴ \ ۰ \ ۴] \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} = -۸ - ۸ = -۱۶$$

۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دترمینان ماتریس‌های A و B برابرند با:

$$|A| = (-۲)(-۳)(-۱) = -۶, |B| = \left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right)(-۵) = -\frac{۵}{۶}$$

از طرف دیگر: $\left|(AB)^۲\right| = |AB|^۲ = (|A||B|)^۲ = \left(-۶ \times -\frac{۵}{۶}\right)^۲ = ۵^۲ = ۲۵$

۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از فرض‌های مسئله مقادیر صحیح d, c, b, a را به دست می‌آوریم.

$$B^{۲} = ۲I \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱+\mathrm{ac} & ۰ & a+\mathrm{ad} \\ ۰ & ۲b^{۲} & ۰ \\ c+\mathrm{dc} & ۰ & \mathrm{ac}+d^{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} ۱+\mathrm{ac} = ۲ \Rightarrow \mathrm{ac} = ۱ \Rightarrow a \neq ۰,\ c \neq ۰ \\ ۲b^{۲} = ۲ \Rightarrow b^{۲} = ۱ \Rightarrow b = \pm ۱ \\ c+\mathrm{dc} = ۰ \Rightarrow c(۱+d) = ۰ \xrightarrow{c \neq ۰} ۱+d = ۰ \Rightarrow d = -۱ \end{cases}$$

(حالت اول) $|A| = ۲ \Rightarrow \mathrm{ad}-\mathrm{bc} = ۲ \xrightarrow[b=۱]{d=-۱} -a-c = ۲ \Rightarrow a+c = -۲$

$\xrightarrow{\mathrm{ac}=۱} a = -۱, c = -۱$

(حالت دوم) $|A| = ۲ \Rightarrow \mathrm{ad}-\mathrm{bc} = ۲ \xrightarrow[b=-۱]{d=-۱} -a+c = ۲ \xrightarrow{c=\frac{۱}{a}} -a+\frac{۱}{a} = ۲$

$$\Rightarrow -a^{۲}+۱ = ۲a \Rightarrow a^{۲}+۲a-۱ = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴+۴}}{۲}$$

این مقدار برای a قابل قبول نیست چون a صحیح است. پس $a = -۱$ و $c = -۱$ و $d = -۱$ و $b = ۱$ می‌باشد. داریم:

$$B^{۳} = B^{۲} \times B = ۲I \times B = ۲B = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix} = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۲\sqrt{۲} & ۰ \\ -۲ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصلضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس $B^{۳}$ برابر $۲(-۲)(۲\sqrt{۲})(-۲)(-۲) = -۳۲\sqrt{۲}$ است.

۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دترمینان ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = (-۱)^{۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۳} \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۴} \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix} = ۵$$

از طرف دیگر:

$$\left|A^{۲} + \mathrm{kA} - A\right| = ۱۲۵ \Rightarrow |A(A + (k-۱)I)| = ۱۲۵ \Rightarrow |A|\,|A + (k-۱)I| = ۱۲۵$$

$$\xrightarrow{|A|=۵} |A + (k-۱)I| = ۲۵$$

اکنون ماتریس $A + (k-۱)I$ را به دست می‌آوریم.

$$A + (k-۱)I = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & k-۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & k-۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & ۲ & ۲ \\ ۲ & k & ۲ \\ ۲ & ۲ & k \end{bmatrix}$$

$$|A + (k-۱)I| = \begin{vmatrix} k & ۲ & ۲ \\ ۲ & k & ۲ \\ ۲ & ۲ & k \end{vmatrix} = k(-۱)^{۲} \begin{vmatrix} k & ۲ \\ ۲ & k \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۳} \begin{vmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & k \end{vmatrix} + ۲(-۱)^{۴} \begin{vmatrix} ۲ & k \\ ۲ & ۲ \end{vmatrix} = k^{۳} - ۱۲k + ۹۶$$

بنابراین: $k^{۲} - ۱۲k + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow k^{۲} - ۱۲k - ۹ = ۰ \Rightarrow k = -۳$

$$\left|(\mathrm{kH})I_{۳}\right| = (\mathrm{kH})^{۳}\,|I| = (k+۱)^{۳} = (-۳+۱)^{۳} = -۸$$

(توجه کنید جواب معادلهٔ $k^{۳} - ۱۲k - ۹ = ۰$ را با امتحان کردن مقادیر ±۱، ±۲، ±۳ پیدا کرده‌ایم.)

۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان را به دست می‌آوریم.

$$\mathrm{Log}\,(۳x+۱) = \begin{vmatrix} \mathrm{Log}\,۵ & \mathrm{Log}\,۲ \\ \mathrm{Log}\,۲ & \mathrm{Log}\,۵ \end{vmatrix} \Rightarrow \mathrm{Log}\,(۳x+۱) = \mathrm{Log}\,\frac{۲}{۵} - \mathrm{Log}\,\frac{۲}{۲} \Rightarrow \mathrm{Log}\,(۳x+۱)$$

$$= (\mathrm{Log}\,۵ - \mathrm{Log}\,۲)(\mathrm{Log}\,۵ + \mathrm{Log}\,۲) \Rightarrow \mathrm{Log}\,(۳x+۱) = \mathrm{Log}\,\frac{۵}{۲}\,\mathrm{Log}\,۱۰$$

$$\Rightarrow \mathrm{Log}\,(۳x+۱) = \mathrm{Log}\,\frac{۵}{۲} \Rightarrow ۳x+۱ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

پس:

$$\mathrm{Log}\,\frac{x}{\sqrt{۲}} = \mathrm{Log}\,\frac{\frac{۱}{۲}}{\sqrt{۲}} = \mathrm{Log}\,\frac{۲^{-۱}}{۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{-۱}{\frac{۱}{۲}}\,\mathrm{Log}\,\frac{۲}{۲} = -۱$$

۱۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس $A^{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۲ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین: $\dfrac{\text{مجموع درایه های } A^{۲}}{\text{مجموع درایه های } A} = \dfrac{۶}{۲} = ۳$

۱۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & -\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{وارون میگیریم}}(A^{-1})^{-1}=\frac{۱}{-۲+۱}\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۲} & ۱\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ ۱ & -۴\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ ۱ & -۴\end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در ماتریس A ضرب می‌کنیم.

$$۲I-۳A^{-1}B^{-1}=\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\xrightarrow{A\times}۲A-۳B^{-1}=A\times\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۲A-۳B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ ۱ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow ۲A-۳B^{-1}=\begin{bmatrix}-۲ & -۱\\ -۶ & ۰\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی این ماتریس برابر ۲- است.

۱۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا سطر سوم ماتریس $A^{۲}$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^{۲}=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\ \\ -۴ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس $A^{۳}$ را به دست می‌آوریم.

$$A^{۳}=A^{۲}\times A=\begin{bmatrix}\\ \\ -۴ & ۱ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۲ & ۰\\ -۲ & ۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\\ \\ -۱۰ & ۱ & ۷\end{bmatrix}$$

پس سطر سوم ماتریس $A^{۳}$ برابر $[-۱۰\ \ ۱\ \ ۷]$ است.

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از ماتریس A از چپ و از ماتریس B از راست فاکتور می‌گیریم.

$$A\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۶ & -۱\end{bmatrix}B-\frac{۳}{۲}A\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۴ & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix}B=A\left(\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ -۶ & -۱\end{bmatrix}-\frac{۳}{۲}\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ -۴ & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix}\right)B$$

$$=A\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۰ & -۳\end{bmatrix}B=A(-۳I)B=-۳AB=-۳\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۹ & -۶\\ \frac{-۳}{۲} & -۱\end{bmatrix}$$

بنابراین حاصلضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی این ماتریس برابر ۹ است.

۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix} ۱۰^{\frac{a}{۴}} & ۲^{\frac{a}{۲}} \\ ۵^{\frac{a}{۲}} & ۱۰^{\frac{a}{۲}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان میگیریم}} |A|=\begin{bmatrix} ۱۰^{\frac{a}{۴}} & ۲^{\frac{a}{۲}} \\ ۵^{\frac{a}{۲}} & ۱۰^{\frac{a}{۲}} \end{bmatrix}$$

$$=۱۰^{\frac{a}{۴}}\times ۱۰^{\frac{a}{۲}}-۵^{\frac{a}{۲}}\times ۲^{\frac{a}{۲}}=۱۰^{\frac{a}{۴}+\frac{a}{۲}}-(۵\times ۲)^{\frac{a}{۲}}=۱۰^{\frac{۳a}{۴}}-۱۰^{\frac{a}{۲}}$$

از طرف دیگر بنابر فرض داریم:

$$a=(\operatorname{Log}۲۵)^{۲}-(\operatorname{Log}۴)^{۲}=(\operatorname{Log}۲۵-\operatorname{Log}۴)(\operatorname{Log}۲۵+\operatorname{Log}۴)=\left(\operatorname{Log}\frac{۲۵}{۴}\right)(\operatorname{Log}۱۰۰)$$

$$=\left(\operatorname{Log}\frac{۲۵}{۴}\right)(۲)=۲\operatorname{Log}\frac{۲۵}{۴}\ (۱)$$

بنابراین:

$$|A|=۱۰^{\frac{۳a}{۴}}-۱۰^{\frac{a}{۲}} \xrightarrow{\text{از ۱}} |A|=۱۰^{\frac{۳}{۲}\operatorname{Log}\frac{۲۵}{۴}}-۱۰^{\operatorname{Log}\frac{۲۵}{۴}} \Rightarrow |A|=۱۰^{\operatorname{Log}\left(\frac{۲۵}{۴}\right)^{\frac{۳}{۲}}}-۱۰^{\operatorname{Log}\frac{۲۵}{۴}}$$

$$=\left(\left(\frac{۲۵}{۴}\right)^{\frac{۳}{۲}}\right)^{\operatorname{Log}۱۰}-\left(\frac{۲۵}{۴}\right)^{\operatorname{Log}۱۰}=\left(\frac{۲۵}{۴}\right)^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۲۵}{۴}=\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳}-\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۲}=\frac{۱۲۵}{۸}-\frac{۲۵}{۴}$$

$$=\frac{۱۲۵-۵۰}{۸}=\frac{۷۵}{۸}$$

در نتیجه:

$$\left|\frac{۱}{۳}A\right|=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}|A|=\frac{۱}{۹}\times\frac{۷۵}{۸}=\frac{۲۵}{۲۴}$$

تذکر: از روابط $\operatorname{Log}۱۰=۱$ و $\operatorname{Log}a-\operatorname{Log}b=\operatorname{Log}\frac{a}{b}$ و $\operatorname{Log}a+\operatorname{Log}b=\operatorname{Log}ab$ و $a^{\operatorname{Log}b}=b^{\operatorname{Log}a}$ و $a^{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{a^{۳}}$ در حل سؤال استفاده شده است.

۱۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A=\begin{bmatrix}\log_{۶}^{۳} & \log_{۶}^{۲}\\ \log_{۶}^{۲} & \log_{۶}^{۳}\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{دترمینان}}|A|=\begin{vmatrix}\log_{۶}^{۳} & \log_{۶}^{۲}\\ \log_{۶}^{۲} & \log_{۶}^{۳}\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=\left(\log_{۶}^{۳}\right)^{۲}-\left(\log_{۶}^{۲}\right)^{۲}=\left(\log_{۶}^{۳}-\log_{۶}^{۲}\right)\left(\log_{۶}^{۳}+\log_{۶}^{۲}\right)$$

$$=\left(\log_{۶}^{\frac{۳}{۲}}\right)\left(\log_{۶}^{۶}\right)=\left(\log_{۶}^{\frac{۳}{۲}}\right)(۱)=\log_{۶}^{\frac{۳}{۲}}$$

بنابراین:

$$B=\begin{bmatrix}۶^{|A|} & ۲^{|A|}\\ ۳^{|A|} & ۳۶^{|A|}\end{bmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}۶^{|A|} & ۲^{|A|}\\ ۳^{|A|} & ۳۶^{|A|}\end{vmatrix}\Rightarrow |B|=۶^{|A|}\times ۶^{۲|A|}-۳^{|A|}\times ۲^{|A|}$$

$$=۶^{۳|A|}-۶^{|A|}=۶^{۳\log_{۶}^{\frac{۲}{۲}}}-۶^{\log_{۶}^{\frac{۲}{۲}}}=۶^{\log_{۶}^{\left(\frac{۲}{۲}\right)^{۳}}}-۶^{\log_{۶}^{\frac{۲}{۲}}}=\left(\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۳}\right)^{\log_{۶}^{۶}}-\left(\frac{۳}{۲}\right)^{\log_{۶}^{۶}}$$

$$=\frac{۲۷}{۸}-\frac{۳}{۲}=\frac{۱۵}{۸}$$

نکته: می‌دانیم $\log_{a}^{a}=۱$ و $n\log_{b}^{a}=\log_{b}^{a^n}$ و $a^{\log_{c}^{b}}=b^{\log_{c}^{a}}$ و $\log_{c}^{ab}=\log_{c}^{a}+\log_{c}^{b}$ و $\log_{c}^{\frac{a}{b}}=\log_{b}^{a}-\log_{c}^{b}$.

۱۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان A را نسبت به ستون سوم به دست می‌آوریم.

$$|A|=-(-۵)(-۱+۶)=۲۵$$

از طرف دیگر اگر $B=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & -۴\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$ آنگاه رابطه ماتریس داده شده به صورت $BXC=\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}$ درمی‌آید. بنابراین $X=B^{-۱}\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}C^{-۱}$ داریم:

$$X=\frac{۱}{-۸+۳}\begin{bmatrix}-۴ & ۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & -۵\end{bmatrix}\times\frac{۱}{۲-۴}\begin{bmatrix}-۲ & -۲\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}=\frac{۵}{۱۰}\begin{bmatrix}-۴ & -۱\\ -۳ & -۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & -۲\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۴/۵\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$$

۱۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & y\\ ۰ & x & ۰\\ ۱ & ۰ & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰ & y\\ ۰ & x & ۰\\ ۱ & ۰ & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱+y & ۰ & y+yz\\ ۰ & x^{۲} & ۰\\ ۱+z & ۰ & y+z^{۲}\end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی برابرند و درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\Rightarrow\begin{cases}۱+z=۰\Rightarrow z=-۱\\ x^{۲}=۱+y\Rightarrow x^{۲}-y=۱\end{cases}\xrightarrow{+}x^{۲}-y+z=۰$$

۱۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ & -۳ \\ ۳ & -۲ & ۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ & -۳ & ۰ & ۲ \\ ۳ & -۲ & ۴ & ۳ & -۲ \end{vmatrix} = (۸+۹+۰)-(۱۲+۶+۰) = -۱$$

$$||A|\,A| = |-A| = (-۱)^{۳}\,|A| = (-۱)(-۱) = ۱$$

۱۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D = \mathrm{ABC} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & x & -۱ \\ ۱ & ۱ & x \\ x & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & x+۱ & x-۱ \\ x & -x+۲ & x \\ -x-۲ & -۳ & -۲x+۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+۵ & \bigcirc & x+۱ \\ \bigcirc & ۰ & \bigcirc \\ -۲x-۷ & \bigcirc & -۳ \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی $\Rightarrow x+۲ = -x-۶ \Rightarrow ۲x = -۸ \Rightarrow x = -۴$

۲۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس $A^{۲}$ را به دست آورید:

$$A^{۲} = A \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ را به دست می‌آوریم:

$$A^{۳} = A^{۲} \times A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس $A^{۳}$ به صورت $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ است.

۲۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$ برابر $A^{-۱} = \frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۴ & -۱ \end{bmatrix}$ است. پس:

$$\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{I} = A^{-۱} \Rightarrow \alpha\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{-۵}\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha+\beta & ۲\alpha \\ ۴\alpha & -۳\alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۵} & \frac{۲}{۵} \\ \frac{۴}{۵} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} -\alpha+\beta = \frac{۳}{۵} \Rightarrow -\frac{۱}{۵}+\beta = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \beta = \frac{۴}{۵} \\ ۲\alpha = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \alpha = \frac{۱}{۵} \end{cases}$$

در نتیجه $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۱}{۵}} = ۴$.

۲۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دترمینان A را بدست می‌آوریم.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۱(-۱)^{۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} + (-۱)(-۱)^{۳} \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} + (-۳)(-۱)^{۴} \begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}$$
$$= ۱(۳-۲) + ۱(۱۲-۴) - ۳(۴-۲) = ۱ + ۸ - ۶ = ۳$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} ۲|A| & |A| \\ ۱ & \frac{۲}{|A|} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ ۱ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$ یعنی ماتریس $\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix}$ از قسمت چپ ضرب می‌کنیم. در نتیجه:

$$x = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۳} & -۳ \\ -۱ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & -۳ \\ -۱۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

پس کوچکترین درایه‌ی قطر اصلی ماتریس x برابر ۶ است.

۲۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم.

$$AB = \begin{bmatrix} x & -۱ & -x \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲z & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۲z & ۰ & -۴y \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲xz - ۲z & ۰ & ۲x + ۴y \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۲yz + ۲z^{۲} & \frac{y}{۲} + \frac{z}{۲} & ۲y - ۴yz \end{bmatrix}$$

ماتریس AB ماتریس اسکار است پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین:

$$\begin{cases} ۲xz - ۲z = ۲ \Rightarrow xz + z = ۱ \xrightarrow{\text{از }(۱)} -xy + y = ۱ \\ ۲y - ۴yz = ۲ \Rightarrow y - ۲yz = ۱ \xrightarrow{\text{از }(۱)} y + ۲y^{۲} = ۱ \\ ۲x + ۴y = ۰ \Rightarrow x = -۲y \\ ۲yz + ۲z^{۲} = ۰ \xrightarrow{z \neq ۰} y = -z \ (۱) \\ \frac{y}{۲} + \frac{z}{۲} = ۰ \Rightarrow y = -z \end{cases}$$

در نتیجه:

$$۲y^{۲} + y - ۱ = ۰ \Rightarrow y = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱+۸}}{۴} = \frac{-۱ \pm ۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} y = -۱ \\ y = \frac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین: $-xy + y = ۱ \xrightarrow{y=-۱} -xy - ۱ = ۱ \Rightarrow xy = -۲$

دقت کنید $z \neq ۰$ زیرا در غیر این صورت مقدار $۲xz - ۲z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۲۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: ماتریس A^T (ترانهاده‌ی ماتریس A) ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون های ماتریس A حاصل می‌شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد)

$$AA^T = \begin{bmatrix} ۱ & a & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ a & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^۲ + ۱۰ & a + ۲ \\ a + ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$AA^T B = ۵۲I \Rightarrow \left|AA^T B\right| = |۵۲I| \Rightarrow \left|AA^T\right||B| = ۵۲^۲ \times ۱ \Rightarrow \left[۳(a^۲ + ۱۰) - (a+۲)^۲\right] \times ۱۰۴$$

$$= ۵۲^۲ \Rightarrow ۳a^۲ + ۳۰ - a^۲ - ۴a - ۴ = ۲۶ \Rightarrow ۲a^۲ - ۴a = ۰ \Rightarrow ۲a(a-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ a = ۲ \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a، برابر ۲ است.

۲۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فقط درایه‌های قطر اصلی A را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۹ & ۳ \\ ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ؟ & ؟ \\ ؟ & ۷ & ؟ \\ ؟ & ؟ & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر $۹ + ۷ + ۵ = ۲۱$ است.

۲۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از تساوی ماتریسی داده شده یک دستگاه می‌سازیم و آن‌را حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۴ & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵b_۱ - ۲b_۲ \\ ۴b_۱ + ab_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴b_۱ \\ ۴b_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۵b_۱ - ۲b_۲ = ۴b_۱ \\ ۴b_۱ + ab_۲ = ۴b_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_۱ = ۲b_۲ \\ ۴b_۱ + ab_۲ = ۴b_۲ \end{cases} \xrightarrow{b_۱ = ۲b_۲} ۸b_۲ + ab_۲ = ۴b_۲ \Rightarrow a = -۴$$

۲۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: ماتریس A^T (ترانهادهٔ ماتریس A)، ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون‌های ماتریس A حاصل می‌شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد.)

$$A^T A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$BA^T A = ۵۲I \Rightarrow B \times \begin{bmatrix} ۱۴ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} = ۵۲I \Rightarrow B \times \frac{۱}{۵۲} \begin{bmatrix} ۱۴ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} = I$$

بنابراین ماتریس B، وارون ماتریس $\frac{۱}{۵۲} \begin{bmatrix} ۱۴ & ۴ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ است و در نتیجه داریم:

$$B = ۵۲ \times \frac{۱}{۲۶} \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۴ & ۱۴ \end{bmatrix} = ۲ \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۴ & ۱۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & -۸ \\ -۸ & ۲۸ \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم درایه‌های ماتریس B، برابر ۲۸ است.

تذکر: وارون ماتریس kA به صورت $\frac{۱}{k}A^{-۱}$ است.

۲۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $B=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}$ در این صورت

برای به دست آوردن سطر سوم ماتریس A کافیست سطر سوم ماتریس BC را پیدا کرده در ماتریس D ضرب کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰&۱\\۰&۱&۰\\۰&-۱&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷&۸&۴\\۳&۲&۵\\۶&۹&۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}؟&؟&؟\\؟&؟&؟\\۳&۷&-۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&۱&-۱\\۱&۰&۰\\۰&۱&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}؟&؟&؟\\؟&؟&؟\\۷&۱&-۵\end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های سطح سوم ماتریس A برابر $۳=۵-۱+۷$ است.

۲۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\begin{vmatrix}\text{Log}\,۵ & \text{Log}\,۲\\ \text{Log}\,۲ & \text{Log}\,۵\end{vmatrix}}_{(\text{Log}\,۵)^۲-(\text{Log}\,۲)^۲}\text{Log}\,\frac{۵}{۲}^{(۳x-۲)}=۱$$

$$\underbrace{(\text{Log}\,۵+\text{Log}\,۲)}_{\text{Log}\,۱۰}\underbrace{(\text{Log}\,۵-\text{Log}\,۲)}_{\text{Log}\,\frac{۵}{۲}}$$

$$\text{Log}\,\frac{۵}{۲}\times\text{Log}_{\frac{۵}{۲}}^{(۳x-۲)}=۱\Rightarrow\cancel{\text{Log}\,\frac{۵}{۲}}\times\frac{\text{Log}\,(۳x-۲)}{\cancel{\text{Log}\,\frac{۵}{۲}}}=\text{Log}\,(۳x-۲)=۱\Rightarrow ۳x-۲=۱۰\Rightarrow x=۴$$

۳۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دترمینان را برحسب سطر اول باز می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix}۱&۲&۳\\-۲&۴&x+۵\\x-۱&۶&-۱\end{vmatrix}=۰\Rightarrow ۱(-۱)^۲\begin{vmatrix}۴&x+۵\\۶&-۱\end{vmatrix}+۲(-۱)^۳\begin{vmatrix}-۲&x+۵\\x-۱&-۱\end{vmatrix}+۳(-۱)^۴\begin{vmatrix}-۲&۴\\x-۱&۶\end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow(-۴-۶x-۳۰)+(-۲)(۲-x^۲-۴x+۵)+۳(-۱۲-۴x+۴)=۰$$

$$\Rightarrow -۶x-۳۴+۲x^۲+۸x-۱۴-۲۴-۱۲x=۰\Rightarrow ۲x^۲-۱۰x-۷۲=۰\xrightarrow{\div ۲}$$

$$x^۲-۵x-۳۶=۰\Rightarrow(x-۹)(x+۴)=۰\Rightarrow x=۹,x=-۴$$

۳۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی $AX=A^{-۱}$ را از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست آید.

$$AX=A^{-۱}\Rightarrow X=(A^{-۱})^۲\quad(۱)$$

$$A=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۴}&\frac{۱}{۲}\\۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}-۱}\begin{bmatrix}۱&-\frac{۱}{۲}\\-۲&\frac{۳}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=-۴\begin{bmatrix}۱&-\frac{۱}{۲}\\-۲&\frac{۳}{۴}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}-۴&۲\\۸&-۳\end{bmatrix}$$

$$(A^{-۱})^۲=\begin{bmatrix}-۴&۲\\۸&-۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴&۲\\۸&-۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳۲&-۱۴\\-۵۶&۲۵\end{bmatrix}$$

۳۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس $A^۲$ را به دست می‌آوریم.

$$A^۲ = A\times A = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۴ \\ ۲ & -۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

حال فقط درایه‌های سطر اول $A^۴$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^۴ = A^۲\times A^۲ = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & -۴ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ؟ & ؟ & ؟ \\ ؟ & ؟ & ؟ \end{bmatrix}$$

۳۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} -۴ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲-x & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۳-x \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow -۴(-۱)^۲\begin{vmatrix} ۲-x & ۱ \\ ۲ & ۳-x \end{vmatrix} + ۱(-۱)^۳\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۳-x \end{vmatrix} + ۱(-۱)^۴\begin{vmatrix} ۱ & ۲-x \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow -۴(۶ + x^۲ - ۵x = ۲) - ۱(۳ - x - ۳) + ۱(۲ - ۶ + ۳x) = ۰$$

$$\Rightarrow -۱۶ - ۴x^۲ + ۲۰x + x - ۴ + ۳x = ۰ \Rightarrow -۴x^۲ + ۲۴x - ۲۰ = ۰ \xrightarrow[-۴]{\text{تقسیم بر}}$$

$$x^۲ - ۶x + ۵ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } x = ۵$$

۳۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $B^{-۱} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$ و با فرض $C = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $C^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$.

حال طرفین رابطه‌ی ماتریسی داده شده را از چپ در $B^{-۱}$ و از راست در $C^{-۱}$ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow X = B^{-۱}\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}C^{-۱}$$

$$= \begin{bmatrix} -۵ & ۶ \\ ۴ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۹ & ۷ \\ -۴ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} ۲۰ & -۲۴ \\ -۱۶ & ۱۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

۳۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا سطر اول ماتریس $A^۲$ و سپس سطر اول $A^۳$ را پیدا می‌کنیم.

$$A^۲ = A\times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۲۴ \\ \text{ل} & & \\ \text{ل} & & \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = A^۲\times A = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۲۴ \\ \text{ل} & & \\ \text{ل} & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳۰ & ۶ & ۸۶ \\ \text{ل} & & \\ \text{ل} & & \end{bmatrix}$$

۳۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نسبت به سطر دوم که یک درایهٔ صفر دارد، دترمینان می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ & ۵ \\ -۲ & ۶ & ۱ \end{vmatrix} = -۳\begin{vmatrix} -۱ & ۴ \\ ۶ & ۱ \end{vmatrix} + ۰ - ۵\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & ۶ \end{vmatrix} = ۷۵ - ۵۰ = ۲۵$$

۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با ضرب کردن طرفین رابطهٔ $AX = B$ در $A^{-۱}$ از چپ، ماتریس X تنها می‌شود.

$$AX = B \xrightarrow{A^{-۱}\times} X = A^{-۱}B$$

با داشتن $A^{-۱}$، X به راحتی به دست می‌آید.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{-۴+۳}\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$X = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱۳ \\ -۱ & -۸ \end{bmatrix}$$

۳۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که درایه‌های طرفین قطر اصلی آن همگی صفرند، یعنی $\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$.

دو ماتریس را در هم ضرب می‌کنیم و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم تا x و y به دست آیند.

$$\begin{bmatrix} x & -۱ & ۴ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۰ \\ y & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x - ۱ + ۴y & -۲x + ۰ + ۴ \\ ۴ + ۳ + y & -۴ + ۰ + ۱ \end{bmatrix}$$

پس:

$$\begin{cases} -۲x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ ۴ + ۳ + y = ۰ \Rightarrow y = -۷ \end{cases}$$

۳۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر ستون اول ماتریس را همزمان با دو ستون دیگر ماتریس جمع کنیم، آن‌گاه داریم:

$$\begin{vmatrix} a+b+c+۴ & b & c \\ a+b+c+۴ & b+۴ & c \\ a+b+c+۴ & b & c+۴ \end{vmatrix} = (a+b+c+۴)\begin{vmatrix} ۱ & b & c \\ ۱ & b+۴ & c \\ ۱ & b & c+۴ \end{vmatrix}$$

حال اگر سطرهای دوم و سوم را منهای سطر اول کنیم، خواهیم داشت:

$$(a+b+c+۴)\begin{vmatrix} ۱ & b & c \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{vmatrix} = ۱۶\underbrace{(a+b+c+۴)}_{۵} = ۱۶ \times ۹ = ۱۴۴$$

۴۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق تعریف داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$A^{۲} - ۴A = \begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۴ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^{۲} - ۴A$، برابر ۱۵ است.

۴۱ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس A را به‌دست می‌آوریم.

$$A=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}$$

$$A^{۲}-۴A=\begin{bmatrix}۹&۸&۸\\۸&۹&۸\\۸&۸&۹\end{bmatrix}-۴\begin{bmatrix}۱&۲&۲\\۲&۱&۲\\۲&۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۰&۰\\۰&۵&۰\\۰&۰&۵\end{bmatrix}=۵I$$

۴۲ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$\text{فرض:}\begin{vmatrix}۶&۳x&۲x\\۳x&۲x&۶x\\۲x&۶&۳x\end{vmatrix}=D\xrightarrow[x=۱]{\text{عددگذاری}}\begin{vmatrix}+&-&+\\۶&۳&۲\\۳&۲&۶\\۲&۶&۳\end{vmatrix}=۶(-۳۰)-۳(-۳)+۲(۱۴)=۱۸۰+۹+۲۸=-۱۴۳$$

$$\text{کم:}\begin{vmatrix}x^{۲}&x^{۲}&۶\\۹&۲x&۹\\۳x&۴&۴\end{vmatrix}\overset{x=۱}{\rightleftarrows}\begin{vmatrix}+&-&+\\۱&۱&۶\\۹&۲&۹\\۳&۴&۴\end{vmatrix}=۱\times(-۲۸)-۱\times(-۹)+۶\times(۳۰)=-۲۸-۹+۱۸۰=+۱۴۳$$

روش دوم: با انتخاب $x=۰$ نتیجه می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix}۶&۰&۰\\۰&۰&۶\\۰&۶&۰\end{vmatrix}=D\Rightarrow ۶(-۶^{۲})=D\Rightarrow D=-۶^{۳}$$

حالا مقدار دترمینان خواسته شده را به‌ازای $x=۰$ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix}۰&۰&۶\\۹&۰&۹\\۰&۴&۴\end{vmatrix}=۶(۳۶)=۶^{۳}$$

بنابراین این دترمینان برابر $-D$ می‌باشد.

۴۳ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}}_{C} A \underbrace{\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ ۵ & -۳\end{bmatrix}}_{D} = \underbrace{\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}}_{E}$$

$$CAD = E \Rightarrow C^{-۱}CAD = C^{-۱}E \Rightarrow AD = C^{-۱}E$$

$$\Rightarrow ADD^{-۱} = C^{-۱}ED^{-۱} \Rightarrow A = C^{-۱}ED^{-۱}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۳ & ۲\\ ۵ & -۳\end{bmatrix}^{-۱} = \underbrace{\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}۲ & ۵\\ \dots & \dots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۵ & ۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۳۱ & ۱۹\\ \dots & \dots\end{bmatrix} \Rightarrow \text{سطر اول } [۳۱\ ۱۹]$$

توجه: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد داریم:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

۴۴ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^{۲} = \begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۳ & ۴\\ ۲ & -۳ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۲ & -۳\end{bmatrix}$$

$$A^{۴} = \begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & -۴ & ۴\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۲ & -۳\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

۴۵ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ستون دوم و سوم را به ستون اول اضافه کرده و از $b+c+۵$ فاکتور می‌گیریم:

$$|A| = \begin{vmatrix}a+b+c+۵ & b & c\\ a+b+c+۵ & b+۵ & c\\ a+b+c+۵ & b & c+۵\end{vmatrix} = (a+b+c+۵)\begin{vmatrix}۱ & b & c\\ ۱ & b+۵ & c\\ ۱ & b & c+۵\end{vmatrix}$$

قرینه‌ی سطر اول را به دو سطر بعدی اضافه می‌کنیم.

$$|A| = ۱۲\begin{vmatrix}۱ & b & c\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{vmatrix} = ۱۲\times ۵^{۲}$$

$$\left(\left|۵A^{-۱}\right|\right) = ۵^{۳}\left|A^{-۱}\right| = ۵^{۳}\frac{۱}{|A|} = \frac{۵^{۳}}{۱۲\times ۵^{۲}} = \frac{۵}{۱۲}$$

۴۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، دترمینان A برابر است با: $|A| = ad - bc$

پس در ماتریس $A=\begin{bmatrix} \text{Log}\,۵ & \text{Log}\,۲ \\ \text{Log}\,۲ & \text{Log}\,۵ \end{bmatrix}$ داریم:

$$|A| = (\text{Log}\,۵)^{۲} - (\text{Log}\,۲)^{۲} = (\text{Log}\,۵ - \text{Log}\,۲)(\text{Log}\,۵ + \text{Log}\,۲)$$

از آن‌جا که $\text{Log}\,a + \text{Log}\,b = \text{Log}\,(ab), \text{Log}\,a - \text{Log}\,b = \text{Log}\left(\frac{a}{b}\right)$ داریم:

$$\xrightarrow{*} |A| = \text{Log}\,\frac{۵}{۲} \times \text{Log}\,۱۰ = \text{Log}\,۲/۵ \times ۱ = \text{Log}\,۲/۵$$

۴۷ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. حل به روش عدد گذاری: فرض می‌کنیم $a = ۱$ و $b = -۱$ باشد، دراین صورت داریم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۴(a+b) \\ ۱ & a+۱ & a^{۲}(b+۲) \\ ۱ & b+۱ & b^{۲}(a+۲) \end{vmatrix} \xrightarrow[b=-۱]{a=۱} \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۹ - ۹ = ۰$$

تنها گزینه‌ی ۱ به ازای $a = ۱$ و $b = -۱$ صفرمی‌شود، لذا گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۴۸ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۴ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} = ۲۰a - ۱۸۹ \right\} \xrightarrow[\text{فرض سوال}]{\text{باتوجه به}} (۲۰a - ۱۸۹) + ۶ = ۲۵a - ۱۹۸ \Rightarrow ۵a = ۱۵ \Rightarrow a = ۳$$
$$\left.\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۵ & -۱ & ۸ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} = ۲۵a - ۱۹۸ \right\}$$

روش دوم:

می‌دانیم $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۴+۱ & -۲+۱ & ۷+۱ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۴ & -۲ & ۷ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix}$$

k + ۶ — k

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۶ \end{vmatrix} = ۶ \xrightarrow{\text{سطر سوم}} ۰ - ۵\times(۳-a) + ۶(۳-۲) = ۶ \rightarrow ۰ - ۵\times(۳-a) = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

۴۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا در معادلهٔ سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادلهٔ سهمی به صورت $y^۲ - ۲y + ۴x = m$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$y^۲ - ۲y + ۴x = m \Rightarrow (y-۱)^۲ - ۱ + ۴x = m \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۴x + m + ۱$$
$$\Rightarrow (y-۱)^۲ = -۴\left(x - \frac{m}{۴} - \frac{۱}{۴}\right)$$

پس این سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{m}{۴} + \frac{۱}{۴}, ۱\right)$ است به طوری‌که $۴a = ۴$ است. معادلهٔ خط هادی این نوع سهمی به صورت زیر است.

$$x = a + \alpha \Rightarrow x = ۱ + \frac{m}{۴} + \frac{۱}{۴} \xrightarrow{x=۳} ۳ = \frac{۵}{۴} + \frac{m}{۴} \xrightarrow{۴\times} ۱۲ = ۵ + m \Rightarrow m = ۷$$

۵۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطهٔ A روی سهمی قرار دارد پس فاصله نقطهٔ A تا کانون سهمی برابر فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط هادی سهمی است.

با استاندارد کردن معادلهٔ سهمی معادله خط هادی آن را پیدا می‌کنیم:

$$x = -y^۲ + ۵y - ۶ \Rightarrow y^۲ - ۵y = -x - ۶ \Rightarrow \left(y - \frac{۵}{۲}\right)^۲ - \frac{۲۵}{۴} = -x - ۶ \Rightarrow \left(y - \frac{۵}{۲}\right)^۲ = -x + \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \left(y - \frac{۵}{۲}\right)^۲ = -\left(x - \frac{۱}{۴}\right)$$

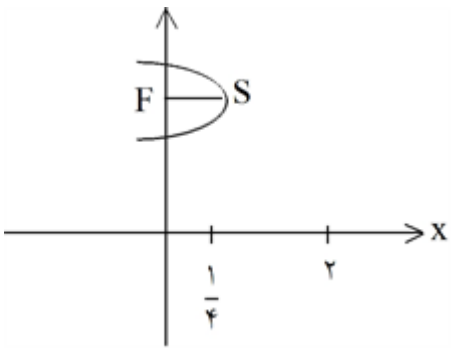
پس سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۵}{۲}\right)$ و $۴a = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$ است.

معادله خط هادی : $x = a + h \xrightarrow{h=\frac{۱}{۴}} x = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x - \frac{۱}{۲} = ۰$

بنابراین:

فاصله A تا خط هادی $= ۱/۵ \Rightarrow \left|\alpha - \frac{۱}{۲}\right| = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \alpha = ۲ \\ \alpha - \frac{۱}{۲} = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow \alpha = -۱ \end{cases}$

با توجه به نمودار سهمی نقطهٔ A به طول ۲ نمی‌تواند روی سهمی باشد پس $\alpha = -۱$ قابل قبول است.



۵۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$y^۲ + ۲x + ۳y + ۲ = ۰ \Rightarrow \left(y + \frac{۳}{۲}\right)^۲ - \frac{۹}{۴} + ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow \left(y + \frac{۳}{۲}\right)^۲ = -۲x + \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{۳}{۲}\right)^۲ = -۲\left(x - \frac{۱}{۸}\right)$$

پس سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{۱}{۸}, -\frac{۳}{۲}\right)$ و $۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$ است. مسلماً فاصلهٔ نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی از کانون و خط هادی آن برابر است. اکنون خط هادی این سهمی را پیدا می‌کنیم.

معادله خط هادی : $x = a + h \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۸} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow x - \frac{۵}{۸} = ۰$

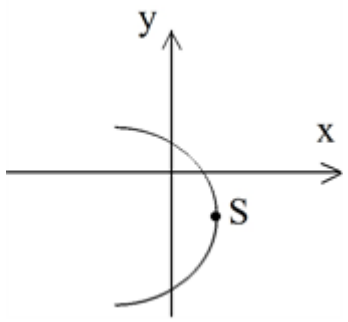
فاصله A تا خط هادی $= ۲/۵ \Rightarrow \left|\alpha - \frac{۵}{۸}\right| = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{۵}{۸} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{۲۵}{۸} \\ \alpha - \frac{۵}{۸} = -\frac{۵}{۲} \Rightarrow \alpha = -\frac{۱۵}{۸} \end{cases}$

با توجه به شکل به ازای $\alpha = \frac{۲۵}{۸}$ نقطهٔ $A(\alpha, \beta)$ نمی‌تواند روی این سهمی باشد پس $\alpha = -\frac{۱۵}{۸}$ قابل قبول می‌باشد.

مسلماً نقطهٔ $A\left(-\frac{۱۵}{۸}, \beta\right)$ در معادله سهمی صدق می‌کند داریم:

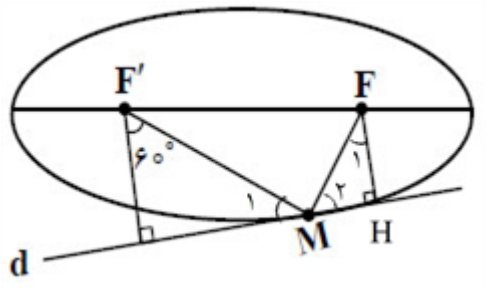
$$\beta^۲ + ۲\left(-\frac{۱۵}{۸}\right) + ۳\beta + ۲ = ۰ \Rightarrow \beta^۲ + ۳\beta - \frac{۷}{۴} = ۰$$

$$\beta = \frac{-۳ \pm \sqrt{۹+۷}}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{-۳ \pm ۴}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{۷}{۲} \\ \beta = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$



بنابراین اختلاف مقادیر β برابر $\frac{۱}{۲} + \frac{۷}{۲} = ۴$ است.

۵۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال $\mathrm{HH}' = ۲\sqrt{۳}$ است. بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی نتیجه می‌گیریم $\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲$ پس $\widehat{F}_۱ = ۶۰^\circ$. در نتیجه:



$$\left.\begin{array}{l} M\overset{\triangle}{F}H : \widehat{F}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \mathrm{MH} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{MF} \\ M\overset{\triangle}{F}'H' : \widehat{F}'_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \mathrm{MH}' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{MF}' \end{array}\right\} \xrightarrow{+}$$

$$\mathrm{MH} + \mathrm{MH}' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(\mathrm{MF} + \mathrm{MF}') \Rightarrow \mathrm{HH}' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲a) \Rightarrow ۲\sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۲a) \Rightarrow ۲a = ۴$$

۵۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های مسئله شکلی رسم می‌کنیم. در این صورت مرکز دایره در ناحیه چهارم قرار دارد پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست‌اند. اکنون گزینه‌های ۳ و ۴ را امتحان می‌کنیم.

اگر $O(۴,-۳/۵)$ را مرکز دایره در نظر بگیریم آنگاه شیب OB باید عکس قرینهٔ شیب خط $۳x-۲y=۶$ باشد.

$$m_{OB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-۳/۵-۰}{۴-۲}=\frac{-\frac{۷}{۲}}{۲}=-\frac{۷}{۴},\ \text{شیب خط}=\frac{۳}{۲}$$

دیده می‌شود حاصلضرب این دو شیب برابر ۱- نیست. پس گزینه ۳ هم نادرست است پس گزینهٔ ۴ درست است.

راه‌حل دوم:

مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB و روی خط OB است. معادلهٔ هر دو خط را نوشته با هم قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید.

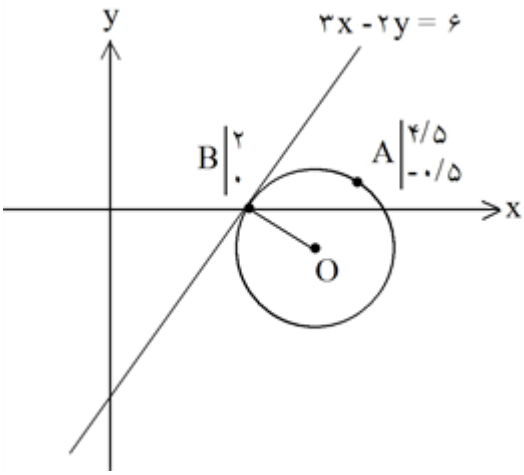
مسلماً شیب خط OB عکس و قرینه شیب خط $۳x-۲y=۶$ و برابر $-\frac{۲}{۳}$ است. و شیب خط عمودمنصف AB عکس و قرینه شیب AB است و خط عمودمنصف از نقطهٔ $M=\frac{A+B}{۲}=\begin{vmatrix}\frac{۱۳}{۴}\\ \frac{۱}{۴}\end{vmatrix}$ می‌گذرد.

$$\text{شیب عمودمنصف و } m_{OB}=-\frac{۲}{۳}=\frac{-۱}{m_{AB}}=\frac{-۱}{\frac{۰/۵}{۲/۵}}=-۵$$

$$\text{OB خط}: y-۰=-\frac{۲}{۳}(x-۲)\Rightarrow y=-\frac{۲}{۳}x+\frac{۴}{۳}\Rightarrow ۲x+۳y=۴$$

$$\text{AB خط عمودمنصف}: y-\frac{۱}{۴}=-۵\left(x-\frac{۱۳}{۴}\right)\Rightarrow ۲۰x+۴y=۶۶\Rightarrow ۱۰x+۲y=۳۳$$

$$\begin{cases}۲x+۳y=۴\\ ۱۰x+۲y=۳۳\end{cases}\Rightarrow x=۳/۵, y=-۱\Rightarrow o(۳/۵,-۱)$$



۵۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا در معادلهٔ سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادلهٔ سهمی به صورت $۳y^۲ - ۳x - my = ۰$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$۳y^۲ - my = ۳x \Rightarrow ۳\left(y^۲ - \frac{m}{۳}y\right) = ۳x \Rightarrow \left(y - \frac{m}{۶}\right)^۲ - \frac{m^۲}{۳۶} = x \Rightarrow \left(y - \frac{m}{۶}\right)^۲ = x + \frac{m^۲}{۳۶}$$

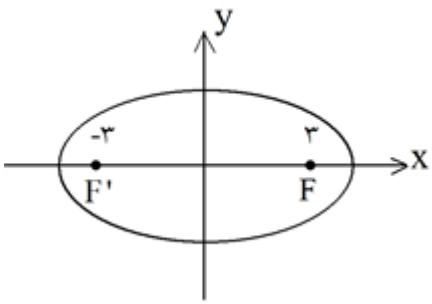
پس این سهمی افقی روبه راست با رأس $\left(-\frac{m^۲}{۳۶}, \frac{m}{۶}\right)$ است به طوری‌که $۴a = ۱$ است. معادلهٔ خط هادی این نوع سهمی به صورت زیر است:

$$x = -a + \alpha \Rightarrow x = -\frac{۱}{۴} - \frac{m^۲}{۳۶} \xrightarrow{x=-\frac{۵}{۴}} -\frac{۵}{۴} = -\frac{۱}{۴} - \frac{m^۲}{۳۶} \xrightarrow{\times(-۴)} ۵ = ۱ + \frac{m^۲}{۹}$$

$$\Rightarrow m^۲ = ۳۶ \Rightarrow m = \pm ۶$$

بنابراین اختلاف مقادیر m برابر ۱۲ است.

۵۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت.



$$۲c = FF' = ۶ \Rightarrow c = ۳$$

$$\text{خروج از مرکز} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{c=۳} a = ۹$$

پس:

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۹^۲ - ۳^۲ = ۷۲ \Rightarrow b = ۶\sqrt{۲}$$

$$\text{قطر کوچک} = ۲b = ۱۲\sqrt{۲}$$

۵۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مرکز دایرهٔ بزرگتر $x^۲+y^۲+۶x-۲y=a$ به مختصات $o=(-۳,۱)$ است. چون خط $y+۲x=۰$ عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است. پس اگر o' مرکز دایره کوچکتر باشد آنگاه پای عمود H وسط oo' خواهد بود:

شیب خط $y+۲x=۰$ برابر ۲- است، پس شیب خط oo' برابر $\frac{۱}{۲}$ است داریم.

$$\text{معادله خط } oo' (y-۱)=\frac{۱}{۲}(x+۳)\Rightarrow x-۲y=-۵$$

$$\begin{cases} x-۲y=-۵ \\ y+۲x=۰ \end{cases}\Rightarrow ۵x=-۵\Rightarrow x=-۱\Rightarrow y=۲\Rightarrow H=(-۱,۲)$$

$$H \text{ وسط } oo' \Rightarrow H=\frac{o+o'}{۲}\Rightarrow o'=۲H-o\Rightarrow o'=۲(-۱,۲)-(-۳,۱)=(۱,۳)$$

بنابراین معادله دایرهٔ کوچکتر به صورت زیر است:

$$R'=o'H=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

$$C': (x-۱)^۲+(y-۳)^۲=۵\Rightarrow x^۲+y^۲-۲x-۶y+۵=۰$$

از طرف دیگرشعاع دایره بزرگتر چون دو برابر R' است پس شعاع دایرهٔ $C: x^۲+y^۲+۶x-۲y=a$ برابر $۲\sqrt{۵}$ است پس:

$$۲\sqrt{۵}=\frac{\sqrt{۳۶+۴+۴a}}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{۵}=\sqrt{۱۰+a}\Rightarrow ۲۰=۱۰+a\Rightarrow a=۱۰$$

اکنون وتر مشترک دو دایره C و C' را به دست می‌آوریم تا برخورد این وتر مشترک با یکی از دایره‌ها نقاط تلاقی A و B را ایجاد کند.

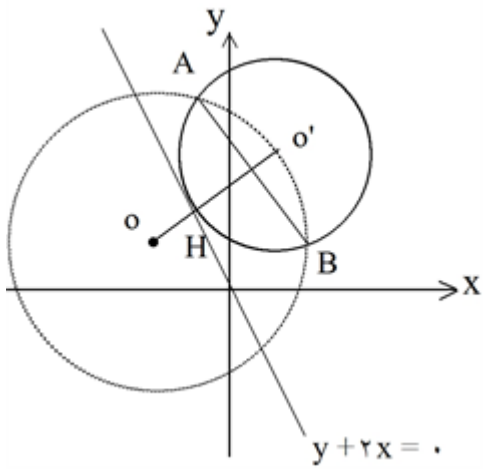
$$\begin{matrix} C: \\ C': \end{matrix}\begin{cases} x^۲+y^۲+۶x-۲y-۱۰=۰ \\ x^۲+y^۲-۲x-۶y+۵=۰ \end{cases}\Rightarrow x^۲+y^۲+۶x-۲y-۱۰$$

$$=x^۲+y^۲-۲x-۶y+۵\Rightarrow ۸x+۴y=۱۵\Rightarrow y=\frac{۱۵-۸x}{۴}$$

$$C: x^۲+\left(\frac{۱۵-۸x}{۴}\right)^۲+۶x-۲\left(\frac{۱۵-۸x}{۴}\right)-۱۰=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+\frac{۲۲۵+۶۴x^۲-۲۴۰x}{۱۶}+۶x-\frac{۱۵-۸x}{۲}-۱۰=۰\Rightarrow ۵x^۲-۵x-\frac{۵۵}{۱۶}=۰$$

$$\Rightarrow \text{جمع ریشه ها}=S=\frac{۵}{۵}=۱$$



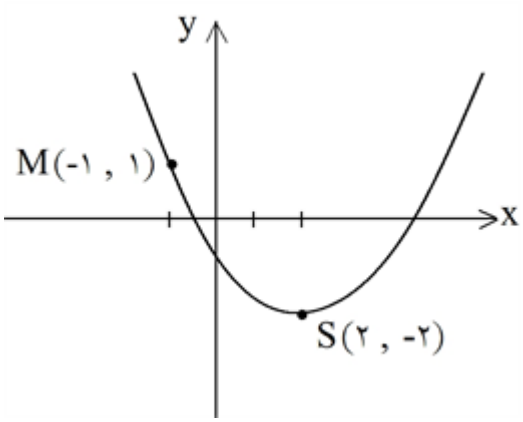
۵۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طول وتری که از کانون بر محور سهمی عمود می‌شود برابر $۴a$ است. در این سؤال نوع سهمی مشخص نیست. فرض کنیم $S(۲,-۲)$ رأس سهمی قائم رو به بالا باشد که از نقطهٔ $M(-۱,۱)$ عبور می‌کند داریم.

معادله سهمی قائم رو به بالا $\Rightarrow (x-\alpha)^۲ = ۴a(y-\beta)$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ = ۴a(y+۲) \xrightarrow{M \in \text{سهمی}}$$

$$(-۱-۲)^۲ = ۴a(۱+۲) \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین: $۴a = ۴\left(\frac{۳}{۴}\right) = ۳$



۵۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط $y - x = ۰$ بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y = r$ مماس است. پس فاصله مرکز این دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y - r = ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} o = \left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = (-۳, ۱) \\ R = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲} = \frac{\sqrt{۳۶+۴+۴r}}{۲} \\ \qquad = \sqrt{۱۰ + r} \end{cases}$$

فاصله o تا خط مماس $= R \Rightarrow \frac{|۱ + ۳|}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۱۰ + r} \Rightarrow r = -۲$

پس معادله دایره به صورت $x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۲ = ۰$ است و $R = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$. اگر o' مرکز دایرهٔ دوم باشد. چون خط $y = x$ عمودمنصف oo' است پس o' قرینه o نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. پس $o' = (۱, -۳)$ و شعاع دایره دوم برابر $۲R = ۴\sqrt{۲}$ است.

معادله دایره دوم : $(x - ۱)^۲ + (y + ۳)^۲ = ۳۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y - ۲۲ = ۰$

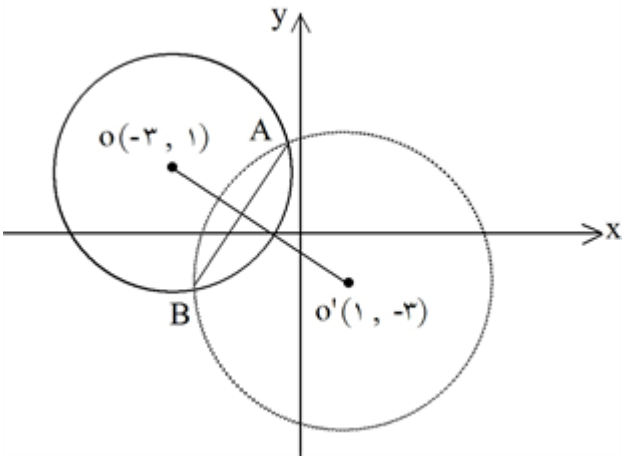
در صورتی‌که A و B نقاط تلاقی دو دایره باشند. آنگاه تلاقی وتر مشترک دو دایره با یکی از دایره‌ها مختصات این نقاط را ایجاد می‌کند.

$$(۱) \begin{cases} x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۲ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y - ۲۲ = ۰ \end{cases} \xrightarrow[\text{مشترک}]{\text{وتر}} x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۲$$

$$= x^۲ + y^۲ - ۲x + ۶y - ۲۲ = ۰ \Rightarrow ۸x - ۸y + ۲۴ = ۰ \xrightarrow{\div ۸} x - y + ۳ = ۰ \Rightarrow y = x + ۳ (۲)$$

$$\text{از (۱) و (۲)} \Rightarrow x^۲ + (x + ۳)^۲ + ۶x - ۲(x + ۳) + ۲ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۱۰x + ۵ = ۰$$

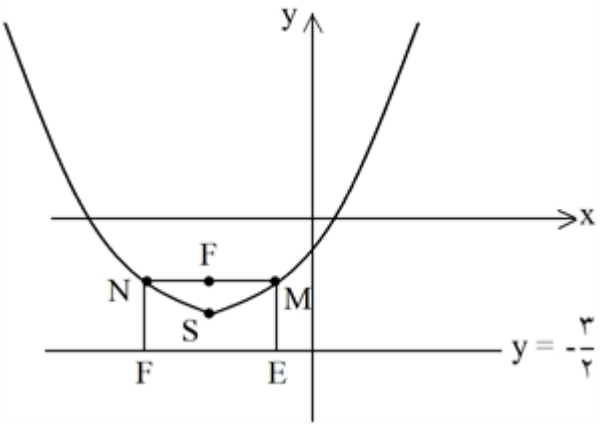
حاصل‌ضرب طول نقاط A و B $= P = \frac{c}{a} = \frac{۵}{۲}$



۵۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در صورت سؤال مشخص نشده است که سهمی افقی یا قائم است. فرض کنیم سهمی قائم رو به بالا با رأس $(-۱, ۱)$ باشد داریم.

معادله سهمی قائم رو به بالا $\Rightarrow (x-\alpha)^۲ = ۴a(y-\beta) \xrightarrow{\alpha=\beta=-۱} (x+۱)^۲ = ۴a(y+۱)$

نقطهٔ $(۱, ۱)$ در این سهمی صدق می‌کند. پس:



$$(x+۱)^۲ = ۴a(y+۱) \Rightarrow (۱+۱)^۲ = ۴a(۱+۱) \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}$$

اگر MN وتر گذرنده از کانون F و عمود بر محور سهمی باشد و ME و NF عمود بر خط هادی باشند آنگاه $\mathrm{MN} = ۴a = ۲$ و $\mathrm{NF} = ۲a = ۱$ است.

$$\text{قطر مستطیل MNFE} = \sqrt{\mathrm{MN}^۲ + \mathrm{NF}^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$$

۶۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$۴\left(y^۲ - \frac{b}{۲}y + \frac{b^۲}{۱۶}\right) = ۳۲x - a + \frac{b^۲}{۴} \Rightarrow \left(y - \frac{b}{۴}\right)^۲ = ۸\left(x - \frac{a}{۳۲} + \frac{b^۲}{۱۲۸}\right)$$

بنابراین رأس این سهمی $\left(\frac{a}{۳۲} - \frac{b^۲}{۱۲۸}, \frac{b}{۴}\right)$ است. بنابراین:

$$\text{راس سهمی } \left(\frac{۱}{۲}, -۲\right) \Rightarrow \begin{cases} \beta = -۲ = \frac{b}{۴} \Rightarrow b = -۸ \\ \alpha = \frac{۱}{۲} = \frac{a}{۳۲} - \frac{b^۲}{۱۲۸} \xrightarrow{b=-۸} a = ۳۲ \end{cases} \Rightarrow a - b = ۴۰$$

۶۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطهٔ $(۱, -۱)$ روی هر دو خط مماس و قائم قرار دارد. پس:

$$L_۱ : x + \mathrm{a}y = ۳ \xrightarrow{(۱,-۱) \in L_۱} a = -۲ \; ; L_۲ = x + \mathrm{b}y = c \xrightarrow{(۱,-۱) \in L_۲} ۱ - b = c \; (۱)$$

از طرف دیگر می‌دانیم خط مماس بر خط قائم عمود است پس:

$$L_۱ : x + (-۲)y = ۳ \Rightarrow m_۱ = \frac{۱}{۲}, L_۲ : x + \mathrm{b}y = c \Rightarrow m_۱ = \frac{-۱}{b} \; ; L_۱ \perp L_۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{-۱}{b} = -۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{از } (۱)} c = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$O\left(\frac{-\alpha}{۲}, \frac{-۱}{۲}\right) \xrightarrow{O \in L_۲} \frac{-\alpha}{۲} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{-۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{-۳}{۲} \; ; (۱, -۱) \in \text{دایره C}$$

$$\Rightarrow ۱ + ۱ - \frac{۳}{۲} - ۱ = \beta \Rightarrow \beta = \frac{-۱}{۲}$$

$$\alpha + \beta = -۲$$

۶۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا معادلهٔ سهمی را استاندارد می‌کنیم:

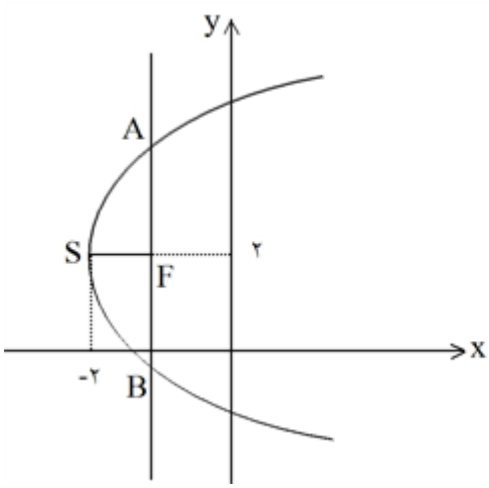
$$y^۲ - ۴y = x - ۲ \xrightarrow{+۴} y^۲ - ۴y + ۴ = x + ۲$$

$$\Rightarrow (y - ۲)^۲ = x + ۲$$

سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت راست است. نقطهٔ $S(-۲, ۲)$ رأس سهمی و $a = \frac{۱}{۴}$ فاصلهٔ کانونی آن است. مطابق شکل AB وتر کانونی سهمی و طول آن ۴ برابر فاصلهٔ کانونی سهمی است، پس داریم:

$$AB = ۴ \times \frac{۱}{۴} = ۱$$

$$S_{SAB} = \frac{۱}{۲} SF \times AB = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۴} \times ۱ = \frac{۱}{۸}$$



۶۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم خط المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک این دو دایره است. پس اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه داریم:

$$M = \frac{A+B}{۲} = \frac{(۱,۴)+(۳,۲)}{۲} = (۲,۳)$$

$$m_{AB} = \frac{۲-۴}{۳-۱} = -۱ \Rightarrow m_d = ۱$$

معادلهٔ خط d (خط المرکزین) : $y - ۳ = ۱(x-۲) \Rightarrow y = x+۱$

طول خط المرکزین دو دایره، دو برابر طول پاره‌خط AB است:

$$AB = \sqrt{(۲-۴)^۲ + (۳-۱)^۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow OO' = ۴\sqrt{۲}$$

چون شعاع دو دایره برابر است، پس فاصلهٔ نقاط O و O' از وتر مشترک یکسان است، یعنی $OM = O'M = ۲\sqrt{۲}$. با توجه به اینکه نقطهٔ O روی خط $y = x+۱$ واقع است، مختصات O از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$OM = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{(۲-x)^۲ + (۳-y)^۲} = ۲\sqrt{۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (۲-x)^۲ + (۳-y)^۲ = ۸$$

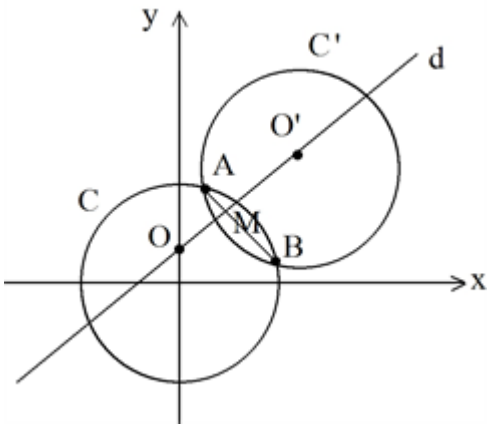
$$\xrightarrow{y=x+۱} (۲-x)^۲ + (۲-x)^۲ = ۸ \Rightarrow (۲-x)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} ۲-x = ۲ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow O(۰,۱) \\ ۲-x = -۲ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow O'(۴,۵) \end{cases}$$

دایره به مرکز $O'(۴,۵)$، محور xها را قطع نمی‌کند. برای دایره به مرکز $O(۰,۱)$ داریم:

$$R = OA = \sqrt{(۱-۰)^۲ + (۴-۱)^۲} = \sqrt{۱۰}$$

معادلهٔ دایره : $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۰ \xrightarrow[\text{تلاقی با محور } x\text{ها}]{y=۰} x^۲ + ۱ = ۱۰ \Rightarrow x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳$

یعنی دایره در دو نقطه به طول‌های ۳ و ۳−، محور xها را قطع می‌کند که فاصلهٔ آنها برابر ۶ واحد است.



۶۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^۲ + ۴y^۲ - ۱۶y - ۲x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۲x) + ۴(y^۲ - ۴y) + ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ - ۱ + ۴\left[(y-۲)^۲ - ۴\right] + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ + ۴(y-۲)^۲ = ۱$$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + \frac{(y-۲)^۲}{\frac{۱}{۴}} = ۱$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^۲ = ۱$ و $b^۲ = \frac{۱}{۴}$ است پس:

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین فاصلهٔ دو کانون برابر $۲c = \sqrt{۳}$ است.

(توجه کنید معادله‌ی بیضی از کتاب درسی هندسه ۳ حذف شده است.)

۶۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای مشخص شدن راه‌حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم برای این کار مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم.

$$x^۲ - ۸x + y^۲ + ۱۵ = ۰ \Rightarrow o\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = (۴, ۰), R = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ + ۴c}}{۲} = \frac{\sqrt{۶۴ - ۶۰}}{۲} = ۱$$

$$x^۲ - ۲x + y^۲ = ۰ \Rightarrow o'\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = (۱, ۰), R' = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲} = \frac{\sqrt{۴}}{۲} = ۱$$

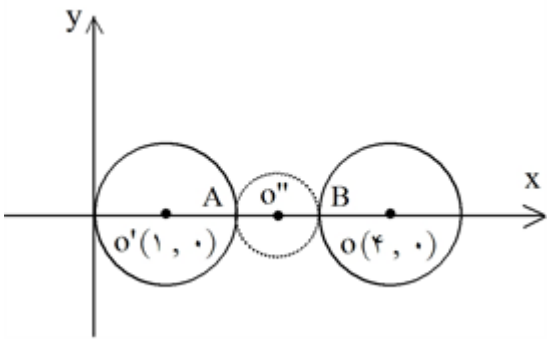
مطابق شکل دایرهٔ خط چین به مرکز o'' و شعاع R'' مرکزش روی محور xها قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است.

در شکل AB قطر دایره خط چین است چون $A(۲, ۰)$ و $B(۳, ۰)$ است. پس $o'' = \frac{A+B}{۲} = \left(\frac{۵}{۲}, ۰\right)$ و

بنابراین معادله این دایره به صورت زیر است: $R'' = \frac{AB}{۲} = \frac{۱}{۲}$

$$\left(x - \frac{۵}{۲}\right)^۲ + (y - ۰)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲ + \frac{۲۵}{۴} - ۵x + y^۲ = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۵x + ۶ = ۰$$



۶۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را بدست آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره بدست می‌آید.

$$\left.\begin{array}{l} m=۲ \Rightarrow ۳y=۶ \Rightarrow y=۲ \\ m=-۱ \Rightarrow -۳x=۶ \Rightarrow x=-۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-۲,۲)$$

چون A روی دایره است پس: $R=\mathrm{OA}=\sqrt{(-۱+۲)^{۲}+(۱-۲)^{۲}}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$

بنابراین: $\text{محیط دایره}=۲\pi\mathrm{R}=۲\sqrt{۲\pi}$

۶۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر در سهمی افقی از معادله‌ی سهمی نسبت به y مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم آنگاه عرض رأس سهمی بدست می‌آید پس:

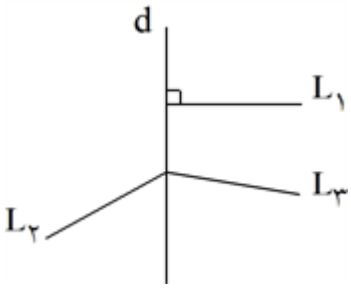
$$f'_{y}=۰ \Rightarrow ۴y-۲a=۰ \xrightarrow{y=۱} ۴-۲a=۰ \Rightarrow a=۲$$

در ضمن رأس سهمی در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند پس:

$$۲-۲a-۸+b=۰ \xrightarrow{a=۲} ۲-۴-۸+b=۰ \Rightarrow b=۱۰$$

بنابراین: $\frac{a}{b}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$

۶۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مجموعه خط هایی که بر خط مفروض d (در فضا) عمود هستند یا موازیند که در صفحه‌های مختلف شامل خط d قرار می‌گیرند. یا متقاطع‌اند که در صفحات عمود بر خط d قرار می‌گیرند، یا متنافرند که هر کدام از آن‌ها در صفحات مختلف گذرنده از خط d قرار می‌گیرند. به نادرستی سایر گزینه‌ها توجه کنید. مخصوصاً گزینه‌ی ۴ که آن‌چه مطرح شده یک سطح مخروطی را ایجاد می‌کند نه یک مخروط.



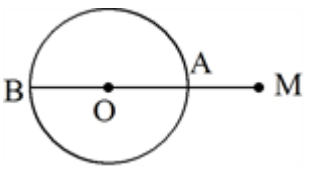
۶۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی قطرهای $x+y=۱$ و $x-y=۳$ مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow y=-۱$$

پس مرکز دایره $O(۲,-۱)$ است. در ضمن فاصله‌ی O تا خط مماس $۴x+۳y+۵=۰$ برابر شعاع دایره است.

$$R=\frac{|\mathrm{ax}_{۰}+\mathrm{by}_{۰}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|۸-۳+۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

نزدیک‌ترین فاصله‌ی $M(۴,-۲)$ از دایره مساوی $|\mathrm{OM}-R|$ است. بنابراین:



$$\mathrm{OM}=\sqrt{(۴-۲)^{۲}+(-۲+۱)^{۲}}=\sqrt{۵}$$

$$\text{نزدیک ترین فاصله}=|\mathrm{OM}-R|=\sqrt{۵}-۲$$

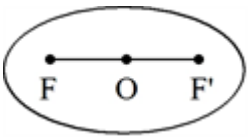
۷۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$(x-۱)^۲ = ۱۲y + ۶ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۱۲\left(y + \frac{۱}{۲}\right)$$

پس این سهمی قائم رو به بالا است و رأس آن $F\left(۱, -\frac{۱}{۲}\right)$ است و $۴a = ۱۲ \Rightarrow a = ۳$ بنابراین کانون این سهمی $F'(\alpha, a+\beta) = \left(۱, ۳ - \frac{۱}{۲}\right) = \left(۱, \frac{۵}{۲}\right)$ است. (توجه کنید α و β مختصات رأس سهمی هستند.)

با توجه به فرض سؤال نقاط $F\left(۱, -\frac{۱}{۲}\right)$ و $F'\left(۱, \frac{۵}{۲}\right)$ کانون‌های بیضی با خروج از مرکز ۰/۶ می‌باشند.

مسلماً مرکز این بیضی وسط FF' است پس داریم.



$$O = \frac{F + F'}{۲} = (۱, ۱) \Rightarrow \text{فاصله } O \text{ تا مبدا مختصات} = \sqrt{۱ + ۱} = \sqrt{۲}$$

۷۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر از معادله $y^۲ + ay + bx - ۹ = ۰$ نسبت به y مشتق گرفته، مشتق را مساوی صفر قرار دهیم معادله‌ی محور سهمی به دست می‌آید.

$$f'_y = ۰ \Rightarrow ۲y + a = ۰ \xrightarrow{y=۱} ۲ + a = ۰ \Rightarrow a = -۲$$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $y^۲ - ۲y + bx - ۹ = ۰$ درمی‌آید. آن‌را استاندارد می‌کنیم:

$$(y-۱)^۲ - ۱ + bx - ۹ = ۰ \Rightarrow (y-۱)^۲ = -bx + ۱۰ \Rightarrow (y-۱)^۲ = -b\left(x - \frac{۱۰}{b}\right)$$

پس این سهمی افقی است و رأس آن $S\left(\frac{۱۰}{b}, ۱\right)$ است و چون علامت b مشخص نیست دهانه سهمی یا به چپ یا به راست باز می‌شود.

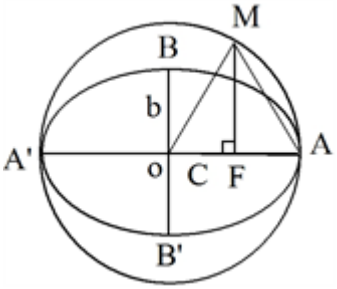
اگر $b > ۰$ آن‌گاه دهانه سهمی به چپ باز می‌شود $۴a = b$ پس $a = \frac{b}{۴}$ است داریم.

معادله‌ی خط هادی : $x = a + \alpha \xrightarrow{x=\frac{۱۳}{۴}} \frac{۱۳}{۴} = \frac{b}{۴} + \frac{۱۰}{b} \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{در } ۴b} ۱۳b = b^۲ + ۴۰$

$$\Rightarrow b^۲ - ۱۳b + ۴۰ = ۰ \Rightarrow (b-۸)(b-۵) = ۰ \Rightarrow b = ۸, b = ۵$$

چون این مقادیر در گزینه ۱ وجود دارند پس حالت $b < ۰$ لزومی به بررسی ندارد.

۷۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال $2a = 14 \Rightarrow a = 7$ و $2b = 4\sqrt{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$ پس:



$c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 24 = 25 \Rightarrow c = 5$

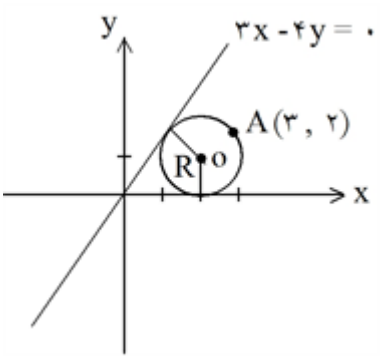
نقطه‌ی O مرکز بیضی و در نتیجه مرکز دایره به قطر AA' است پس $OM = OA = 7$.

$$\overset{\triangle}{OMF} : MF^2 = OM^2 - OF^2 \Rightarrow MF^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow MF = b$$

$$\overset{\triangle}{AMF} : AM^2 = MF^2 + AF^2 \xrightarrow[MF=b]{AF=a-c} AM^2 = b^2 + (a-c)^2$$

$$\Rightarrow AM^2 = (2\sqrt{6})^2 + (7-5)^2 = 24 + 4 = 28 \Rightarrow AM = 2\sqrt{7}$$

۷۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل مرکز دایره $O\left|\begin{matrix}\alpha\\ R\end{matrix}\right.$ است. در واقع عرض مرکز برابر شعاع دایره است. در ضمن فاصله مرکز O از دو خط $3x - 4y = 0$ و $y = 0$ برابراست.



$$\text{فاصله } o \text{ تا } (3x - 4y = 0) = \text{فاصله } o \text{ تا } (y = 0)$$

$$\Rightarrow |R| = \frac{|3\alpha - 4R|}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow R = \frac{|3\alpha - 4R|}{5}$$

چون O در ناحیه‌ی اول مختصات قرار دارد پس باید α مثبت باشد، داریم:

$$5R = 3\alpha - 4R \Rightarrow 3\alpha = 9R \Rightarrow \alpha = 3R \Rightarrow O = (3R, R)$$

از طرف دیگر:

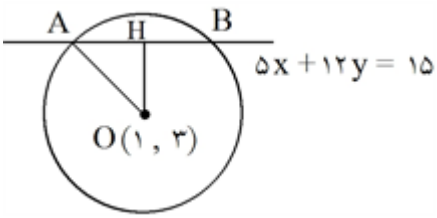
$$OA = R \Rightarrow \sqrt{(3R-3)^2 + (R-2)^2} = R \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9R^2 + 9 - 18R + R^2 + 4 - 4R = R^2$$

$$\Rightarrow 9R^2 - 22R + 13 = 0$$

معادله‌ی به دست آمده را با فرمول b' حل می‌کنیم.

$$R = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 117}}{9} = \frac{11 \pm 2}{9} \Rightarrow R = \frac{13}{9} \text{ یا } R = 1$$

۷۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال وتر AB به طول $۲\sqrt{۲۱}$ است پس $AH = \sqrt{۲۱}$ با به دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم.



$$OH = \frac{|۵+۳۶-۱۵|}{\sqrt{۲۵+۱۴۴}} = \frac{۲۶}{۱۳} = ۲$$

$$\overset{\triangle}{OAH} : OA^{۲} = OH^{۲} + AH^{۲} = ۴ + ۲۱ = ۲۵$$
$$\Rightarrow OA = ۵ \Rightarrow R = ۵$$

معادله دایره : $(x-۱)^{۲} + (y-۳)^{۲} = ۲۵$

حال نقاط برخورد این دایره با محور xها را تعیین می‌کنیم.

$$y = ۰ \Rightarrow (x-۱)^{۲} + ۹ = ۲۵ \Rightarrow (x-۱)^{۲} = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۴ \Rightarrow x = ۵ \\ x - ۱ = -۴ \Rightarrow x = -۳ \end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور xها نقطه‌های $M(۵,۰)$ و $N(-۳,۰)$ است و فاصله‌ی این دو نقطه مساوی $MN = ۸$ است.

۷۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سهمی $y^{۲} + ay + bx + ۱ = ۰$ افقی است پس عرض رأس سهمی با عرض کانون آن برابر و مساوی ۲- است. پس:

$$f'y = ۰ \Rightarrow ۲y + a = ۰ \xrightarrow{y=-۲} a = ۴$$

در نتیجه معادله‌ی سهمی به صورت $y^{۲} + ۴y + bx + ۱ = ۰$ درمی‌آید. حال این معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$(y+۲)^{۲} - ۴ + bx + ۱ = ۰ \Rightarrow (y+۲)^{۲} = -bx + ۳ \Rightarrow (y+۲)^{۲} = -b\left(x - \frac{۳}{b}\right)$$

با فرض $b < ۰$ نتیجه می‌گیریم سهمی افقی و دهانه‌ی آن رو به راست باز می‌شود و رأس آن $S\left(\frac{۳}{b}, -۲\right)$ است و $۴a = -b$ پس $a = -\frac{b}{۴}$ است. مختصات کانون این نوع سهمی به صورت زیر است.

$$F\begin{vmatrix} a+\alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{b}{۴} + \frac{۳}{b} \\ -۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{۱}{۴} \\ -۲ \end{vmatrix}$$

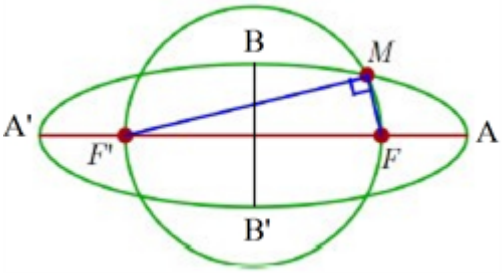
بنابراین:

$$-\frac{b}{۴} + \frac{۳}{b} = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{-b^{۲} + ۱۲}{۴b} = -\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow ۴b^{۲} - ۴b - ۴۸ = ۰ \Rightarrow b^{۲} - b - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (b-۴)(b+۳) = ۰ \Rightarrow b = ۴ \text{ یا } b = -۳$$

کم‌ترین مقدار b برابر ۳- است.

۷۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دایره به قطر FF' بیضی را در نقطه‌ی M قطع کرده است پس زاویه‌ی M محاطی روبه‌رو به قطر FF' است. پس $\widehat{M} = ۹۰^\circ$ یعنی مثلث $\overset{\triangle}{MFF'}$ قائم‌الزاویه است.

از طرف دیگر بنابر فرض $۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$ و $۲b = ۲\sqrt{۷} \Rightarrow b = \sqrt{۷}$ است. پس:



$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۱۶ - ۷ = ۹ \Rightarrow c = ۳$

بنابراین: $\overset{\triangle}{MFF'} : \mathrm{MF}^۲ + \mathrm{MF}'^۲ = \mathrm{FF}'^۲ = (۲C)^۲ = ۳۶ \quad (۱)$

در ضمن $\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = ۲a = ۸$ پس داریم:

$(\mathrm{MF} + \mathrm{MF}')^۲ = ۶۴ \Rightarrow \mathrm{MF}^۲ + \mathrm{MF}'^۲ + ۲\,\mathrm{MF} \times \mathrm{MF}' = ۶۴ \overset{\text{از } ۱}{\rightarrow} ۳۶ + ۲\,\mathrm{MF} \times \mathrm{MF}' = ۶۴$

$\Rightarrow \mathrm{MF} \times \mathrm{MF}' = ۱۴$

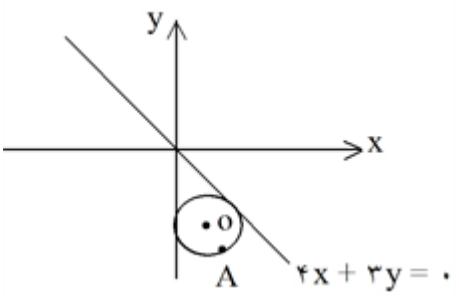
در نتیجه $\mathrm{MF} \times \mathrm{MF}' = ۱۴$ و $\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = ۸$ با فرض $S = ۸$ و $P = ۱۴$ داریم:

$x^۲ - \mathrm{Sx} + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۴ = ۰$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - \mathrm{ac}}}{a} = \frac{۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۱۴}}{۱} = ۴ \pm \sqrt{۲}$$

بنابراین فاصله M از یک کانون $۴ + \sqrt{۲}$ و از کانون دیگر $۴ - \sqrt{۲}$ است پس فاصله تا کانون نزدیک‌تر $۴ - \sqrt{۲}$ است.

۷۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و گذرنده از نقطه‌ی $A(۱, -۴)$ بر خط $۴x + ۳y = ۰$ و محور yها مماس است. چون دایره بر محور yها مماس است پس طول مرکز آن برابر R است. بنابراین $O(R, \beta)$ است. داریم:



فاصله o تا خط $(۴x + ۳y = ۰)$ = فاصله o تا yها

$\Rightarrow R = \frac{|۴R + ۳\beta|}{۵} \Rightarrow ۵R = |۴R + ۳\beta|$

مرکز O در ناحیه چهارم قرار دارد پس β باید منفی باشد داریم:

$۵R = -۴R - ۲\beta \Rightarrow \beta = -۳R \Rightarrow O(R, -۳R)$

بنابراین:

$\mathrm{OA} = R \Rightarrow \sqrt{(R - ۱)^۲ + (-۳R + ۴)^۲} = R \Rightarrow R^۲ + ۱ - ۲R + ۹R^۲ + ۱۶ - ۲۴R = R^۲$

$\Rightarrow ۹R^۲ - ۲۶R + ۱۷ = ۰$

معادله‌ی به دست آمده را با فرمول b' حل می‌کنیم:

$$R = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - \mathrm{ac}}}{a} = \frac{۱۳ \pm \sqrt{۱۶۹ - ۱۵۳}}{۹} = \frac{۱۳ \pm ۴}{۹} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{۱۷}{۹} \\ R = ۱ \end{cases}$$

۷۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کوچک‌ترین دایره‌ی گذرا از دو نقطه‌ی A و B دایره به قطر AB است. پس مرکز دایره وسط AB و شعاع آن نصف طول پاره‌خط AB است.

$$O = \frac{A+B}{۲} = (-۱, ۳), R = \frac{AB}{۲} = \frac{\sqrt{۳۶+۱۶}}{۲} = \frac{\sqrt{۵۲}}{۲}$$

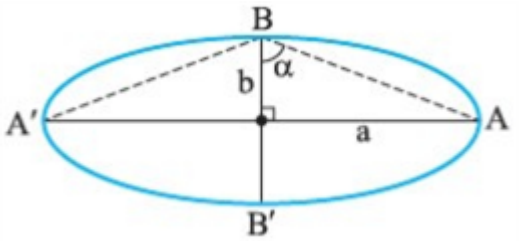
بنابراین معادله دایره به صورت زیر است.

$$(x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = \frac{۵۲}{۴} \xrightarrow{y=۰} (x+۱)^۲ + ۹ = \frac{۵۲}{۴} \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴$$
$$\Rightarrow x+۱ = ۲ \text{ یا } x+۱ = -۲ \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } x = -۳$$

۸۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک فرمول خروج از مرکز بیضی یعنی $e = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{۲}{۳}} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} \Rightarrow \frac{۲}{۳} = ۱ - \frac{b^۲}{a^۲} \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \text{ یا } \frac{a}{b} = \sqrt{۳}$$

به شکل دقت کنید:



به کمک روابط مثلثاتی، زاویهٔ α به راحتی به دست می‌آید.

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{۳} \Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ$$

بنابراین از انتهای قطر کوچک، دو سر قطر بزرگ با زاویهٔ ۲α یعنی ۱۲۰° رؤیت می‌شود.

۸۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مختصات رأس سهمی به کمک مشتق نسبت به عامل درجهٔ ۲ یعنی x به دست می‌آید.

$$۲x^۲ - ۴x + ۳y = ۴ \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} ۴x - ۴ = ۰ \Rightarrow x_{\text{راس}} = ۱$$

مختصات رأس در معادلهٔ سهمی صدق می‌کند، پس:

$$x = ۱ \xrightarrow{۲x^۲-۴x+۳y=۴} y_{\text{راس}} = ۲ \Rightarrow S(۱, ۲)$$

از روی معادله، a به راحتی به دست می‌آید. $a = -\frac{۳}{۴\times ۲} = -\frac{۳}{۸}$

سهمی، قائم است و چون a منفی است، دهانهٔ سهمی به سمت منفی محور y ها باز می‌شود. یعنی اگر از رأس به اندازهٔ a در جهت منفی محور y ها حرکت کنیم، کانون به دست می‌آید.

$$S(۱, ۲) \downarrow -\frac{۳}{۸} \quad F\left(۱, \frac{۱۳}{۸}\right)$$

دقت کنید:

اگر معادلهٔ سهمی به شکل $Ax^۲ + Bx + Cy + D = ۰$ باشد، پارامتر سهمی یعنی a از رابطهٔ $a = \frac{-C}{۴A}$ به دست می‌آید.

۸۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شعاع و مرکز دایره به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۴ = ۰$، عبارتند از:

مرکز : $O'(۲, -۱)$

شعاع : $R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲ + ۲^۲ - ۴(-۴)} = ۳$

نقطه‌ای که تمامی خطوط قائم بر دایره‌ی C از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(۸, ۷)$ مرکز دایره‌ی C است.

$$d = OO' = \sqrt{(۲-۸)^۲ + (-۱-۷)^۲} = ۱۰$$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow ۱۰ = R + ۳ \Rightarrow R = ۷$$

۸۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو خط $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$ موازیند بنابراین مرکز دایره روی خط بین آن‌ها به معادله $y = ۲x + ۵$ قرار دارد. اگر $o(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد آن‌گاه $o(\alpha, ۲\alpha + ۵)$ و چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد پس فاصله‌ی مرکز o از مبدأ با فاصله o تا خط $y = ۲x$ برابر است نتیجه می‌گیریم:

فاصله o تا خط $(y = ۲x)$ = فاصله o تا مبدا مختصات

$$\sqrt{\alpha^۲ + (۲\alpha + ۵)^۲} = \frac{|۲\alpha + ۵ - ۲\alpha|}{\sqrt{۱ + ۴}} \Rightarrow \alpha^۲ + ۴\alpha^۲ + ۲۵ + ۲۰\alpha = \frac{۲۵}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵\alpha^۲ + ۲۰\alpha + ۲۰ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ + ۴\alpha + ۴ = ۰ \Rightarrow (\alpha + ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow \alpha = -۲$$

بنابراین مرکز دایره $o(-۲, ۱)$ می‌باشد.

۸۴ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض تست شکل سهمی به‌صورت مقابل می‌شود در ضمن در این سهمی $a=-۱$ است و سهمی افقی می‌باشد. فرض کنیم $S(\alpha,\beta)$ رأس سهمی باشد. در این صورت معادله‌ی سهمی به‌صورت زیر است:

$$(y-\beta)^۲=۴a(x-\alpha)\xrightarrow{a=-۱}(y-\beta)^۲=-۴(x-\alpha)$$

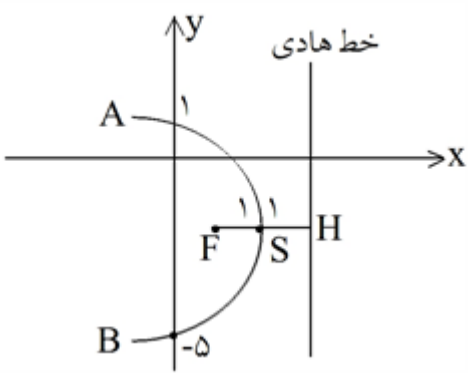
$$A(۰,۱)\in \text{سهمی}\Rightarrow(۱-\beta)^۲=-۴(۰-\alpha)\Rightarrow(۱-\beta)^۲=۴\alpha$$

$$B(۰,-۵)\in \text{سهمی}\Rightarrow(-۵-\beta)^۲=-۴(۰-\alpha)\Rightarrow(-۵-\beta)^۲=۴\alpha$$

$$\Rightarrow(۱-\beta)^۲=(-۵-\beta)^۲$$

$$\Rightarrow ۱-\beta=\pm(-۵-\beta)\Rightarrow\begin{cases}۱-\beta=-۵-\beta\ \text{غ ق ق}\\ ۱-\beta=۵+\beta\Rightarrow\beta=-۲\end{cases}$$

$$(۱-\beta)^۲=۴\alpha\Rightarrow(۱+۲)^۲=۴\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{۹}{۴}$$



۸۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دایره بر محور xها مماس و شعاع آن برابر ۳ می‌باشد پس $\alpha(\alpha,۳)$ مرکز دایره است. مسلماً فاصله‌ی α از خط $۳x+۴y=۰$ برابر شعاع است.

$$OH=\frac{|۳x+۱۲|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۳\Rightarrow|۳\alpha+۱۲|=۱۵\Rightarrow\begin{cases}۳\alpha+۱۲=۱۵\Rightarrow\alpha=۱\\ ۳\alpha+۱۲=-۱۵\Rightarrow\alpha=-۹\end{cases}$$

چون مرکز O در ناحیه‌ی اول قرار دارد پس $\alpha=۱$ قابل قبول است. بنابراین مرکز دایره $O(۱,۳)$ می‌باشد. بنابراین طول نقطه‌ی تماس دایره با محور xها برابر ۱ می‌باشد.

۸۶ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله‌ی سهمی را استاندارد می‌کنیم، رأس سهمی را به دست می‌آوریم. داریم:

$$۳x^۲+۴y-۶x+۱۱=۰\Rightarrow۳x^۲-۶x+۳=-۴y-۸\Rightarrow۳(x^۲-۲x+۱)=-۴(y+۲)$$

$$\Rightarrow(x-۱)^۲=۴\times\left(\frac{-۱}{۳}\right)(y+۲)\Rightarrow S(۱,-۲),a=-\frac{۱}{۳}$$

سهمی داده‌شده یک سهمی قائم است، بنابراین معادله‌ی خط هادی آن به صورت $y=\beta-a$ است. داریم:

$$y=-۲-\left(\frac{-۱}{۳}\right)=-\frac{۵}{۳}$$

۸۷ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$C_۱:(x-۱)^۲+y^۲=۴\Rightarrow R_۱=۲,O_۱(۱,۰)$$

$$C_۲:x^۲+(y+۲\sqrt{۶})^۲=۲۴-b\Rightarrow R_۲=\sqrt{۲۴-b},O_۲(۰,-۲\sqrt{۶})$$

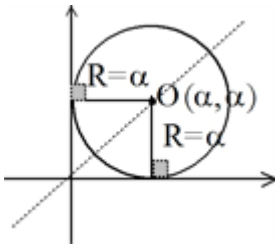
برای آن‌که دو دایره مماس خارج باشند، باید:

$$O_۱O_۲=R_۱+R_۲\Rightarrow\sqrt{۱^۲+(۲\sqrt{۶})^۲}=۲+\sqrt{۲۴-b}\Rightarrow\sqrt{۲۴-b}=۳\Rightarrow b=۱۵$$

۸۸ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون نقطه‌ی A در ربع اول است. پس مرکز دایره روی خط $y=x$ قرار دارد، یعنی $O(\alpha,\alpha)$ و شعاع دایره نیز $R=\alpha$ است (به شکل نگاه کنید) بنابراین:

$$C:(x-\alpha)^۲+(y-\alpha)^۲=\alpha^۲ \xrightarrow{A\in C} (۳-\alpha)^۲+(۶-\alpha)^۲=\alpha^۲$$

$$\Rightarrow \alpha^۲-۱۸\alpha+۴۵=۰ \Rightarrow (\alpha-۱۵)(\alpha-۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۳ \Rightarrow R=۳\\ \alpha=۱۵ \Rightarrow R=۱۵\end{cases}$$



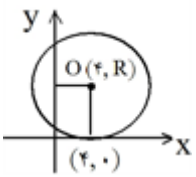
۸۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. عرض مرکز در این حالت برابر شعاع دایره است و معادله‌ی دایره به صورت زیر است:

$$C:(x-۴)^۲+(y-R)^۲=R^۲ \xrightarrow{(۰,۲)\in C} (۰-۴)^۲+(۲-R)^۲=R^۲$$

$$\rightarrow ۱۶+۴-۴R+\cancel{R^۲}=\cancel{R^۲} \rightarrow R=۵ \rightarrow (x-۴)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$$

بنابراین محل تقاطع با محور yها برابر است با:

$$\xrightarrow{x=۰} (۰-۴)^۲+(y-۵)^۲=۲۵ \rightarrow (y-۵)^۲=۹ \rightarrow \begin{cases}y-۵=۳ \rightarrow y=۸\\ y-۵=-۳ \rightarrow y=۲\end{cases}$$

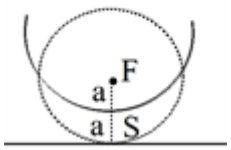


۹۰ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. شعاع دایره برابر ۲a‌ی سهمی می باشد،

$$۲y=x^۲-۶x+۴ \rightarrow (x-۳)^۲=۲y+۵ \rightarrow (x-۳)^۲=۲\left(y+\frac{۵}{۲}\right)$$

بنابراین $S\left(۳,\frac{-۵}{۲}\right)$ راس سهمی و $a=\frac{۱}{۲}$ است، پس مرکز دایره $F\left(۳,\frac{-۵}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)$ و شعاع آن $R=۲a=۱$ می‌باشد:

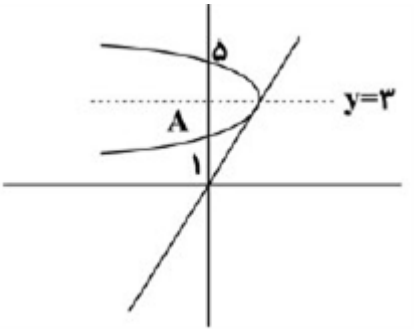
$$(x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱ \rightarrow x^۲+y^۲-۶x+۴y+۱۲=۰$$



۹۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. معادله‌ی محور تقارن سهمی $y = \frac{۵+۱}{۲} = ۳$ می‌باشد و با توجه به این که محور تقارن از رأس سهمی می‌گذرد و با توجه به این که رأس سهمی روی $y = x$ است نتیجه می‌گیریم: $s = (۳, ۳)$ بنابراین معادله ی سهمی افقی به صورت زیر است:

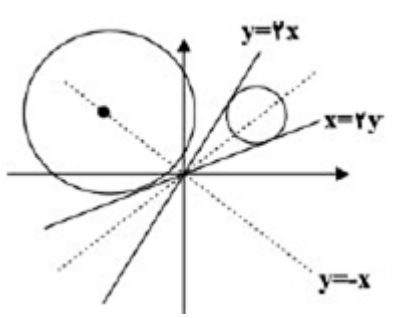
فاصله‌ی کانون تا خط هادی $= ۲|a| = \frac{۲}{۳}$

$(y-۳)^۲ = ۴a(x-۳) \xrightarrow{A(۰,۱)} a = -\frac{۱}{۳}$



۹۲ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مرکز دایره بر روی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط قرار دارد. با توجه به شکل مرکز دایره کوچک‌تر روی y = x و مرکز دایره بزرگ‌تر روی $y = -x$ قرار دارند. $O(۲\sqrt{۵}, ۲\sqrt{۵})$
شعاع دایره برابر با فاصله‌ی مرکز آن از خط $x - ۲y = ۰$ می‌باشد.

$$R = \frac{|۴\sqrt{۵} - ۲\sqrt{۵}|}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}} = ۲$$



۹۳ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. رأس سهمی وسط کانون و خط هادی است پس $S(-۱, ۲)$ است، در ضمن فاصله‌ی کانون تا خط هادی برابر ۲a یعنی ۴ است.

معادله سهمی افقی $\Rightarrow (y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha) \Rightarrow (y-۲)^۲ = ۸(x+۱)$

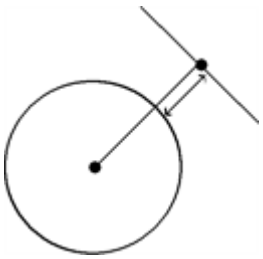
$\xrightarrow{y=۰} ۴ = ۸(x+۱) \Rightarrow x+۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲}$

۹۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فاصله‌ی مرکز دایره را از خط تعیین و طول شعاع را از آن کم می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y=۴ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹ \Rightarrow \text{مرکز}(۱,-۲), R=۳$$

$$\text{فاصله‌ی مرکز از خط}=\frac{|۳\alpha+۴\beta-۱۵|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|۳-۸-۱۵|}{۵}=۴$$

$$\text{فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره از خط}=۴-۳=۱$$

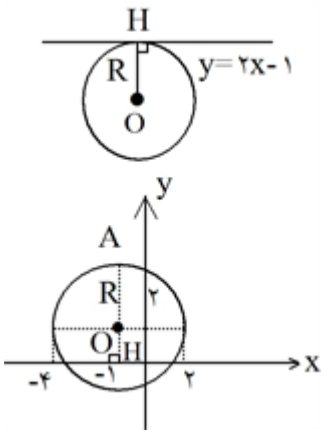


۹۵ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. تمام قائم‌های بر دایره از مرکز آن می‌گذرند، بنابراین طبق گفته‌ی سؤال نقطه‌ی (۲و۱-) مرکز دایره است و از آنجا که دایره برخط مماس شده است پس فاصله‌ی مرکز دایره تا آن خط برابر با طول شعاع دایره است.

$$OH=\frac{|ax_۰+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲-۲(-۱)+۱|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}}(x+۱)+(y-۲)=۵$$

$$AH=R+OH=\sqrt{۵}+۲ \quad \text{بیش‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره از محورxها}$$



۹۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یعنی معادله سهمی چنین است:

$$y^۲-۲y=\frac{ax}{۲} \Rightarrow (y-۱)^۲=\frac{a}{۲}(x+۲a)$$

مرکز (رأس) سهمی $\left(-\frac{۲}{a},۱\right)$ است. در ضمن $P=\frac{|a|}{۸}$.

حال a چه مثبت باشد چه منفی، با توجه به این‌که خط هادی $x=-۱$ است، داریم.

$$-\frac{۲}{a}-\frac{a}{۸}=-۱ \Rightarrow a=۴$$

یعنی سهمی $(y-۱)^۲=۲\left(x+\frac{۱}{۲}\right)$ است که کانون آن $F(۰,۱)$ است. فاصله این کانون از $A(۳,۴)$ می‌شود.

$$\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=۳\sqrt{۲}$$

۹۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. روش اول:

ابتدا نقطه تلاقی دایره‌ی $x^۲+y^۲=۱۷$ و خط $۲x-y=۳$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۷ \\ ۲x-y=۳ \Rightarrow y=۲x-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۲+(۲x-۳)^۲=۱۷ \Rightarrow ۵x^۲-۱۲x-۸=۰$$

$$\Rightarrow ۵x^۲-۱۲x=۸ \quad (۱)$$

نقطه‌ی A روی هر دو دایره و همچنین روی خط $۲x-y=۳$ است. فرض کنیم $A(x, ۲x-۳)$ و مرکز دایره‌ی C نقطه‌ی $O'\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right.$ باشد پس باید داشته باشیم:

$$O'A=O'B=\sqrt{(\alpha-x)^۲+(\beta-۲x+۳)^۲}=\sqrt{(\alpha-۶)^۲+(\beta+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha^۲}+x^۲-۲\alpha x+\cancel{\beta^۲}+۴x^۲+۹-۴\beta x+۶\beta-۱۲x=\cancel{\alpha^۲}+۳۶-۱۲\alpha+\cancel{\beta^۲}+۱+۲\beta$$

$$\Rightarrow \underbrace{۵x^۲-۱۲x}_{۸}-۲\alpha x-۴\beta x+۹+۶\beta=۳۷-۱۲\alpha+۲\beta \xrightarrow{(۱)} x(-۲\alpha-۴\beta)+۱۲\alpha+۴\beta=۲۰$$

تساوی به دست آمده در صورتی برقرار است که $-۲\alpha-۴\beta=۰$ و $۱۲\alpha+۴\beta=۲۰$ پس:

$$\begin{cases} -۲\alpha-۴\beta=۰ \\ ۱۲\alpha+۴\beta=۲۰ \end{cases} \Rightarrow \alpha=۲, \beta=-۱ \Rightarrow O'(۲,-۱) \Rightarrow R=\mathrm{dB}=۴$$

روش دوم: فرض کنید معادله‌ی دایره‌ی موردنظر به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. برای یافتن معادله‌ی وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=x^۲+y^۲-۱۷ \Rightarrow ax+by=-c-۱۷$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $۲x-y=۳$ منطبق است، پس داریم:

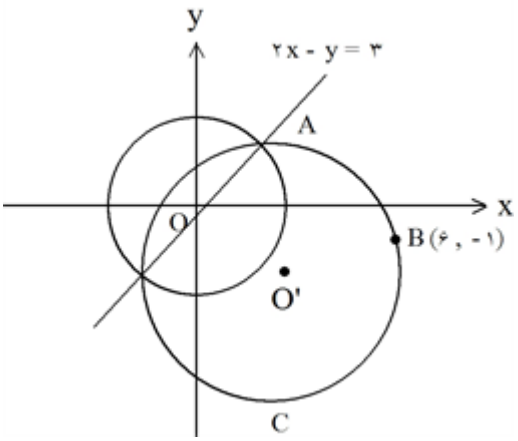
$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{-۱}=\frac{-c-۱۷}{۳} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲b \\ c=۳b-۱۷ \end{cases}$$

نقطه‌ی $(۶,-۱)$ روی دایره است، پس مختصات آن در معادله‌ی دایره صدق می‌کند:

$$x^۲+y^۲+(-۲b)x+by+۳b-۱۷=۰ \xrightarrow{(۶,-۱)} ۳۶+۱-۱۲b-b+۳b-۱۷=۰$$

$$\Rightarrow ۱۰b=۲۰ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow \begin{cases} a=-۴ \\ c=-۱۱ \end{cases}$$

شعاع دایره : $R=\dfrac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\dfrac{\sqrt{۱۶+۴+۴۴}}{۲}=\dfrac{\sqrt{۶۴}}{۲}=۴$



۹۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط A و B و C وسط اضلاع مثلث MNE به مساحت ۱۶ هستند. چون $\overset{\triangle}{MNE}$ با $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه با نسبت $\frac{۱}{۲}$ است. داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{S_{MNE}=۱۶} S_{ABC} = ۴$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$A = (a, ۴, ۱), B = (a, b, ۳), C = (a, ۹, b)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (۰, b-۴, ۲)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (۰, ۵, b-۱)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & b-۴ & ۲ \\ ۰ & ۵ & b-۱ \end{vmatrix} = (b^۲ - ۵b + ۴ - ۱۰)i = (b^۲ - ۵b - ۶)i$$

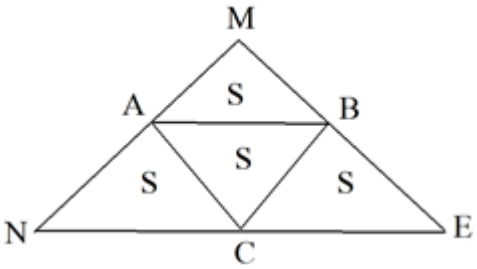
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow ۴ = \frac{۱}{۲}\sqrt{(b^۲ - ۵b - ۶)^۲} \Rightarrow \left|b^۲ - ۵b - ۶\right| = ۸$$

بنابراین:

$$b^۲ - ۵b - ۶ = ۸ \Rightarrow b^۲ - ۵b - ۱۴ = ۰ \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } b = ۵$$

$$b^۲ - ۵b - ۶ = -۸ \Rightarrow b^۲ - ۵b + ۲ = ۰ \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } b = ۵$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر b مساوی ۱۰ است.

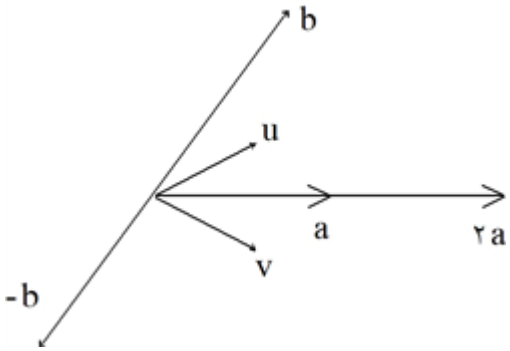


۹۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در شکل بردار یکهٔ $\vec{u}$ در راستای نیمساز زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و بردار یکهٔ v در راستای نیمساز زاویهٔ بین بردارهای $۲a$ و $-b$ است.

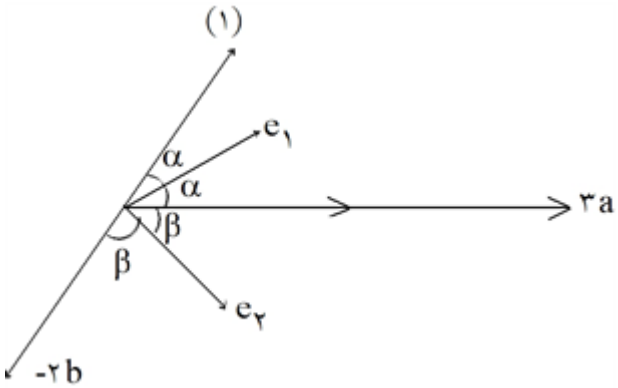
چون دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ در راستای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند پس بر هم عمودند.

بنابراین مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ساخته می‌شود برابر است با:

$$S_\Delta = \frac{۱}{۲}\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \frac{۱}{۲}\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin ۹۰^\circ = \frac{۱}{۲}\times ۱\times ۱\times ۱ = \frac{۱}{۲}$$



۱۰۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



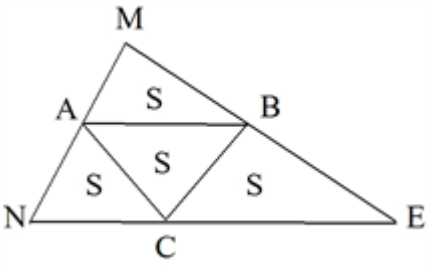
$e_۱$ در راستای نیمساز داخلی زاویهٔ بین بردارهای a و b و $e_۲$ در راستای نیمساز خارجی این دو بردار است. پس: $e_۱ \perp e_۲$. بنابراین متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای واحد $e_۱$ و $e_۲$ مربع به ضلع ۱ می‌باشد. در نتیجه طول قطر این مربع $\sqrt{۲}$ است.

۱۰۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ برابر $\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ است. پس اندازهٔ تصویر بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ روی بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$$\frac{\left|\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right).\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\frac{\vec{a}.\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\frac{|\vec{a}|^۲}{|\vec{a}|}+\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos ۶۰}{|\vec{b}|}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left||\vec{a}|+|\vec{a}|\left(\frac{۱}{۲}\right)\right|}{|\vec{a}|}$$

$$=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

۱۰۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط A و B و C وسط اضلاع مثلث MNE به مساحت ۶۴ است. چون $\overset{\triangle}{ABC}$ با $\overset{\triangle}{MNE}$ متشابه با نسبت $\frac{۱}{۲}$ است داریم:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{S_{MNE}=۶۴} S_{ABC} = ۱۶$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی مساحت مثلث ABC راپیدا می‌کنیم.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-۴, -۲a, ۰)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (۲, -۴ - a, ۰)$$
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -۴ & -۲a & ۰ \\ ۲ & -۴-a & ۰ \end{vmatrix} = (۱۶ + ۴a + ۴a)k = (۱۶ + ۸a)k$$
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \Rightarrow ۱۶ = \frac{۱}{۲}\sqrt{(۱۶ + ۸a)^{۲}} \Rightarrow |۱۶ + ۸a| = ۳۲$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۱۶ + ۸a = ۳۲ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-۴, -۴, ۰) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = ۴\sqrt{۲} \\ ۱۶ + ۸a = -۳۲ \Rightarrow a = -۶ \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-۴, ۱۲, ۰) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = ۴\sqrt{۱۰} \end{cases}$$

۱۰۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حجم متوازی‌السطوح و مساحت قاعده متوازی‌السطوح که متوازی‌الاضلاع به ضلع‌های $\vec{b}$ و $\vec{c}$ است را پیدا می‌کنیم.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & -۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۸i + ۱۰j - ۴k$$

مساحت قاعده $S = \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \sqrt{۸^{۲} + ۱۰^{۲} + ۴^{۲}} = \sqrt{۱۸۰} = ۶\sqrt{۵}$

$a.(b \times c) = (۲, -۳, ۴).(۸, ۱۰, -۴) = ۱۶ - ۳۰ - ۱۶ = -۳۰$

حجم متوازی‌السطوح $V = |a.(b \times c)| = ۳۰$

بنابراین: $V = Sh \Rightarrow ۳۰ = ۶\sqrt{۵}h \Rightarrow h = \sqrt{۵}$

۱۰۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است. در صورتی‌که θ زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد داریم.

$$\left(\frac{۹\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۷\vec{b}}{|\vec{b}|}\right).\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۳\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=۰ \Rightarrow \frac{۹\vec{a}.\vec{a}}{|\vec{a}|^{۲}}-\frac{۲۷\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}+\frac{۷\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{۲۱\vec{b}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}=۰$$

$$\frac{۹|\vec{a}|^{۲}}{|\vec{a}|^{۲}}-\frac{۲۰|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{۲۱|\vec{b}|^{۲}}{|\vec{b}|^{۲}}=۰ \Rightarrow ۹-۲۰\cos\theta-۲۱=۰ \Rightarrow \cos\theta=\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\theta=\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین: $S=$ متوازی الاضلاع $=\left|\left(\frac{۳\vec{a}}{|\vec{b}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)\times\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}-\frac{۳\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)\right|$

$$=\left|\frac{۳\vec{a}\times\vec{a}}{|\vec{b}|^{۲}}-\frac{۶\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}+\frac{۲\vec{b}\times\vec{a}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{۴\vec{b}\times\vec{b}}{|\vec{a}|}\right|$$

$$=\left|\frac{۸\vec{b}\vec{a}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|=\frac{۸}{|\vec{a}||\vec{b}|}\left|\vec{b}\times\vec{a}\right|=\frac{۸}{|\vec{a}||\vec{b}|}(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)=۸\sin\theta=۸\times\frac{۴}{۵}=\frac{۳۲}{۵}=۶/۴$$

۱۰۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم θ زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

$$\vec{a}.\vec{b}=-\frac{۳}{۵}|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-\frac{۳}{۵}|\vec{a}||\vec{b}| \Rightarrow \cos\theta=-\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\theta=\sqrt{۱-\cos^{۲}\theta}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین: $S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}\left|\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}-\frac{۲\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\times\left(\frac{۳\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{۲\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)\right|$

$$=\frac{۱}{۲}\left|\frac{۳\vec{a}\times\vec{a}}{|\vec{d}|^{۲}}+\frac{۲\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}-\frac{۶\vec{b}\times\vec{a}}{|\vec{b}||\vec{a}|}-\frac{۴\vec{b}\times\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\frac{۸\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|$$

$$=\frac{۴}{|\vec{a}||\vec{b}|}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{۴}{|\vec{a}||\vec{b}|}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۴\sin\theta=۴\times\frac{۴}{۵}=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

۱۰۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ از رابطهٔ $\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ به دست می‌آید، بنابراین با فرض $\vec{b}=(۱,۰,a)$, $\vec{a}=(۲,-a,۳)$ داریم:

$$\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{b}|}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{|۲+۰+۳a|}{\sqrt{۱+۰+a}}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\Rightarrow\frac{|۲+۳a|}{\sqrt{۱+a^{۲}}}=\frac{۵}{\sqrt{۲}}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

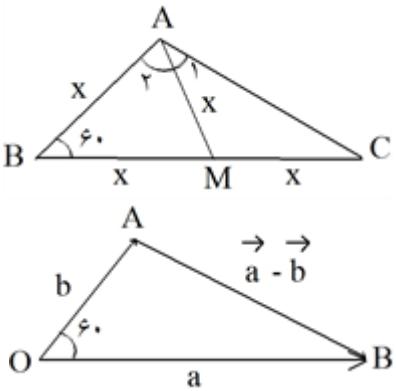
$$\frac{(۲+۳a)^{۲}}{۱+a^{۲}}=\frac{۲۵}{۲}\Rightarrow ۲(۴+۱۲a+۹a^{۲})=۲۵(۱+a^{۲})\Rightarrow ۷a^{۲}-۲۴a+۱۷=۰$$

$$\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{جمع ضرایب}}\begin{cases}a=۱\\ a=\frac{۱۷}{۱۷}\end{cases}\Rightarrow \text{اختلاف مقادیر a}=\frac{۱۷}{۷}-۱=\frac{۱۰}{۷}$$

۱۰۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. درنظر بگیرید $\vec{a}=۲\vec{b}$ در این صورت بردار $\vec{a}-\vec{b}$ مطابق شکل مقابل خواهد بود.

در مثلث OAB یک زاویه ۶۰° و اندازه‌ی دو ضلع این زاویه‌ی ۶۰° به نسبت ۱ به ۲ هستند پس مثلث OAB قائم الزاویه است و $\widehat{A}=۹۰^\circ$ پس $\widehat{B}=۳۰^\circ$ در نتیجه زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ برابر ۳۰° است.

نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC زاویه $\widehat{B}$ مساوی ۶۰° و $AB=x$ و $BC=۲x$ آنگاه $\widehat{A}=۹۰^\circ$. زیرا اگر میانه AM وارد بر BC را رسم کنید آنگاه مثلث ABM متساوی‌الاضلاع و مثلث AMC متساوی‌الساقین است. پس $\widehat{A}_۱=۶۰^\circ$ و $\widehat{A}_۲=۳۰^\circ$ در نتیجه $\widehat{A}=۹۰^\circ$.



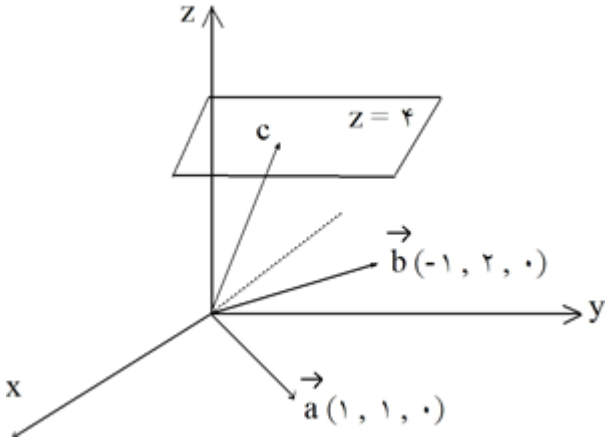
۱۰۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ارتفاع بردار $\vec{h}$ برابر ۴ است پس انتهای بردار $\vec{h}$ روی صفحه‌ی $z=۴$ قرار دارد. در ضمن بردار h بر بردارهای a و b عمود نیست زیرا $\vec{a}.\vec{h}\neq ۰$ و $\vec{b}.\vec{h}\neq ۰$ بنابراین بردار h روی صفحه $z=۴$ قرار دارد. در نتیجه انتهای بردار $\vec{c}$ روی صفحه $z=۴$ واقع است در نتیجه مختصات بردار c به صورت $(x,y,۴)$ است بنابر فرض سؤال داریم. در نتیجه انتهای بردار $\vec{c}$ روی صفحه $z=۴$ واقع است در نتیجه مختصات بردار c به صورت $(x,y,۴)$ است بنابر فرض سؤال داریم:

$$\vec{a}.\vec{c}=۱\Rightarrow(۱,۱,۰).(x,y,۴)=۱\Rightarrow x+y=۱$$

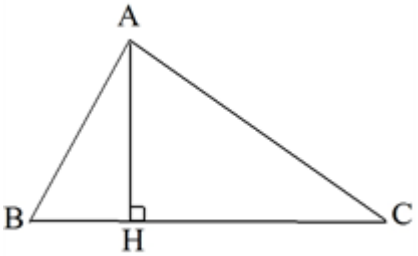
$$\vec{b}.\vec{c}=۵\Rightarrow(-۱,۲,۰).(x,y,۴)=۵\Rightarrow -x+۲y=۵$$

بنابراین: $\begin{cases} x+y=۱ \\ -x+۲y=۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} ۳y=۶\Rightarrow y=۲, x=-۱$

پس $\vec{c}(-۱,۲,۴)$. پس $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{۱+۴+۱۶}=\sqrt{۲۱}$.



۱۰۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول: BH اندازه‌ی تصویر بردار $\overrightarrow{BA}$ روی بردار $\vec{B}$ است.



$$\overrightarrow{BA}=A-B=(-۲,۲,۱)$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-۱,-۱,۲)$$

$$\left|\overrightarrow{BH}\right|=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{۲-۲+۲}{\sqrt{۱+۱+۴}}=\frac{۲}{\sqrt{۶}}$$

$$,=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{۴+۴+۱}=۳$$

بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ABH}:AH^{۲}=AB^{۲}-BH^{۲}\Rightarrow AH^{۲}=۹-\frac{۴}{۶}=\frac{۲۵}{۳}\Rightarrow AH=\frac{۵}{\sqrt{۳}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$

راه‌حل دوم: مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم.

$$\overrightarrow{BA}=AB-(-۲,۲,۱)$$
$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-۱,-۱,۲)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & ۲ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۲ \end{vmatrix}=۵i+۳j+۴k$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲},\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{۱+۱+۴}=\sqrt{۶}$$

بنابراین: $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC\Rightarrow\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}AH\times\sqrt{۶}\Rightarrow AH=\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$

۱۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون $a.b$ یک عدد است پس بردار $(a.b)(a\times b)$ مضرب $a\times b$ است پس $(a.b)(a\times b)$ موازی بردار $\vec{c}$ است، اگر و فقط اگر موازی آن $\vec{a}\times\vec{b}$ موازی $\vec{c}$ باشد پس ابتدا $a\times b$ را به دست می‌آوریم.

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۱ & \alpha & ۲\\ \frac{-۴}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۲\end{vmatrix}=\left(۲\alpha-\frac{۴}{۳}\right)i-\left(-۲+\frac{۸}{۳}\right)j+\left(-\frac{۲}{۳}+\frac{۴\alpha}{۳}\right)k$$

چون $(\vec{a}\times\vec{b})\ ||\ \vec{c}$ است پس مختصات آن‌ها نظیر به نظیر متناسبند.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(۲\alpha-\frac{۴}{۳},-\frac{۲}{۳},-\frac{۲}{۳}+\frac{۴\alpha}{۳}\right),\ \vec{c}=(-۱,۱,-۱)$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\ ||\ \vec{c}\Rightarrow\frac{۲\alpha-\frac{۴}{۳}}{-۱}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{۱}=\frac{-\frac{۲}{۳}+\frac{۴\alpha}{۳}}{-۱}\Rightarrow\begin{cases}۲\alpha-\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۲\alpha=۲\Rightarrow\alpha=۱\\ \frac{۲}{۳}=-\frac{۲}{۳}+\frac{۴\alpha}{۳}\Rightarrow\frac{۴\alpha}{۳}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\alpha=۱\end{cases}$$

بنابراین به ازای $\alpha=۱$ شرط سؤال برقرار است.

۱۱۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زاویه‌ی بین بردار a و محور zها همان زاویه‌ی بین a و بردار $\vec{k}$ است.

$$\text{Cos}\,۴۵^\circ=\frac{\vec{a}.\vec{k}}{|\vec{a}||\vec{k}|}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{(-۱,\alpha,۱).(۰,۰,۱)}{\sqrt{۱+\alpha^۲+۱}\sqrt{۱}}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{\alpha^۲+۲}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۲}\sqrt{\alpha^۲+۲}=۲\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲+۲=۲\Rightarrow\alpha=۰$$

پس $a=(-۱,۰,۱)$ بنابراین:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۱ & ۰ & ۱\\ -\frac{۴}{۳} & \frac{۲}{۳} & ۲\end{vmatrix}=-\frac{۲}{۳}i-\frac{۲}{۳}j-\frac{۲}{۳}k$$

$$\text{Cos}\,\theta=\frac{(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{k}}{|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{k}|}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{\sqrt{\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}+\frac{۴}{۹}\times۱}}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}}=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۱۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر روی بردارهای a و b و $a\times b$ مساوی است با:

$$|(a\times b).(a\times b)|=|a\times b|^۲$$

پس لازم است $a\times b$ را به دست آوریم.

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۲ & ۳ & -۱\\ ۴ & ۰ & ۱\end{vmatrix}=۳i-۶j-۱۲k$$

$$\text{حجم}=|a\times b|^۲=۹+۳۶+۱۴۴=۱۸۹$$

۱۱۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر بردار a به صورت مجموع دو بردار در راستاهای دو بردار b و c نوشته شود، آن‌گاه سه بردار a ، b و c قطعاً هم‌صفحه‌اند، یعنی $a.(b\times c)=۰$ است. داریم:

$$\begin{vmatrix} -۳ & ۱۰ & m \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow (۶+۲۰+۱۲m)-(m-۲۴-۶۰)=۰ \Rightarrow ۱۱m+۱۱۰=۰$$
$$\Rightarrow ۱۱m=-۱۱۰ \Rightarrow m=-۱۰$$

۱۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر 'b تصویر قائم b روی a باشد آن‌گاه $b'=\frac{a.b}{|a|^۲}a$ بنابراین $\frac{a.b}{|a|^۲}$ را باید به دست آوریم.

$$|a-b|^۲=|a|^۲+|b|^۲-۲a.b \Rightarrow ۴+۱+۹=۲۵+۴۹-۲a.b \Rightarrow a.b=۳۰$$

پس $\frac{a.b}{|a|^۲}=\frac{۳۰}{۲۵}=\frac{۶}{۵}=۱/۲$.

۱۱۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ داریم:

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{۳}{۴}\overrightarrow{AB} \Rightarrow ۴(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA})=-۳(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) \Rightarrow$$
$$۴\overrightarrow{OM}-۴\overrightarrow{OA}=-۳\overrightarrow{OB}+۳\overrightarrow{OA} \Rightarrow ۴\overrightarrow{OM}=-۳\overrightarrow{OB}+۷\overrightarrow{OA} \Rightarrow$$
$$۴\overrightarrow{OM}=-۳(-i+۵j+۴k)+۷(۳i+j)=۲۴i-۸j-۱۲k \Rightarrow \overrightarrow{OM}=۶i-۲j-۳k$$
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{j}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|\left|\overrightarrow{j}\right|}=\frac{-۲}{\sqrt{۳۶+۴+۹}}=-\frac{۲}{۷}$$

۱۱۶ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{matrix} a\times d=c\times b \\ a\times c=d\times b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\times d-d\times b=c\times b-a\times c \Rightarrow a\times d+b\times d=c\times b+c\times a$$
$$\Rightarrow (a+b)\times d=c\times(b+a) \Rightarrow (a+b)\times d-c\times(b+a)=۰$$
$$\Rightarrow (a+b)\times d+(a+b)\times c=۰ \Rightarrow (a+b)\times(d+c)=۰ \Rightarrow a+b\,||\,d+c$$

پس دو بردار موازیند و گزینه‌ی ۴ درست است.

۱۱۷ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{matrix} V_۱.V_۲=۰ \Rightarrow ۲-b+a=۰ \\ V_۱.V_۳=۰ \Rightarrow c-۳+۲a=۰ \\ V_۲.V_۳=۰ \Rightarrow ۲c+۳b+۲=۰ \end{matrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a-b=-۲ \\ c+۲a=۳ \\ ۲c+۳b=-۲ \end{matrix}\right. \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a-b=-۲ \\ ۳b-۴a=-۸ \end{matrix}\right.$$
$$\Rightarrow -a=-۲ \Rightarrow a=۲, b=۴, c=-۱$$

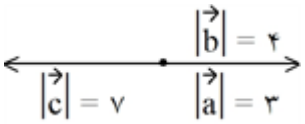
پس $a+b+c=۵$ و گزینه‌ی ۱ درست است.

۱۱۸ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = |a|^{۲}+|b|^{۲}+|c|^{۲}+۲\overbrace{(\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})}^{x} \longrightarrow$$

$$۰ = ۳^{۲}+۴^{۲}+۷^{۲}+۲x \rightarrow x = -۳۷$$

روش دوم: از آن‌جا که $۳+۴=۷$، بنابراین این سه بردار به شکل زیر هستند و داریم:



$$\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a} = ۳\times۴\times \text{Cos}\,۰^{\circ}+۴\times۷\times \text{Cos}\,۱۸۰^{\circ}+۷\times۳\times \text{Cos}\,۱۸۰^{\circ} = ۱۲-۲۸-۲۱ = -۳۷$$

۱۱۹ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{matrix}\vec{a}=(۱,۲,-۴)\\ \vec{k}=(۰,۰,۱)\end{matrix} \rightarrow \vec{a}\times\vec{k} = (۲,-۱,۰)$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار a و $a\times k$ ساخته می‌شود برابر است با اندازه‌ی حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار:

$$\begin{matrix}\vec{a}=(۱,۲,-۴)\\ \vec{a}\times\vec{k}=(۲,-۱,۰)\end{matrix} \rightarrow \vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{k}) = (-۴,-۸,-۵) \rightarrow S = \left|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{k})\right| =$$

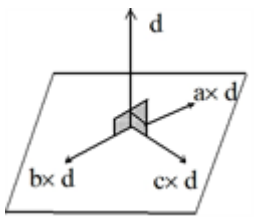
$$= \sqrt{۱۶+۶۴+۲۵} = \sqrt{۱۰۵}$$

۱۲۰ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Cos}\,\gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|} = \frac{m}{\sqrt{۱+۱+m^{۲}}} \rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{m}{\sqrt{m^{۲}+۲}} \rightarrow$$

$$۲m^{۲} = m^{۲}+۲ \rightarrow m^{۲} = ۲ \rightarrow \text{Cos}\,\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱+۱+۲}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۲۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بردارهای $\vec{a}\times\vec{d}$ و $\vec{b}\times\vec{d}$ و $\vec{c}\times\vec{d}$ همگی عمود بر $\vec{d}$ هستند و در نتیجه در صفحه‌ای عمود بر $\vec{d}$ (یا به عبارت دیگر در صفحه‌ای که بردار نرمالش $\vec{d}$ باشد) قرار می‌گیرند.



۱۲۲ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تمام بردارهای هم‌راستا با بردار $\vec{V}$ به صورت $\alpha\vec{V}$ می‌باشند، بنابراین طبق صورت تست

$$(۱,۲,m)=\underbrace{\alpha(۲,۳,-۱)}_{\text{هم راستا با }(۲,۳,-۱)}+\underbrace{\beta(۰,-۱,۲)}_{\text{هم راستا با }(۰,-۱,۲)}\longrightarrow(۱,۲,m)=(۲\alpha\ ,\ ۳\alpha-\beta,-\alpha+۲\beta)$$

داریم:

حال مولفه‌ها را نظیر به نظیر برابر هم قرار می‌دهیم:

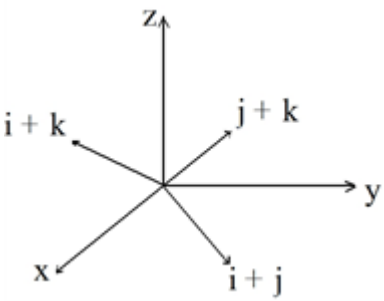
$$\begin{cases}۲\alpha=۱\\ ۳\alpha-\beta=۲\\ -\alpha+۲\beta=m\end{cases}\rightarrow\alpha=\frac{۱}{۲},\beta=\frac{-۱}{۲}\rightarrow m=\frac{-۳}{۲}$$

روش دوم: بردار c را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از دو بردار a و b نوشت (یعنی $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$)، اگر و فقط اگر سه بردار در یک صفحه باشند یا به عبارت دیگر $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰$، بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix}۰ & -۱ & ۲\\ ۲ & ۳ & -۱\\ ۱ & ۲ & m\end{vmatrix}=۰\rightarrow ۰+۱(۲m+۱)+۲(۴-۳)=۰\rightarrow ۲m+۳=۰\rightarrow m=\frac{-۳}{۲}$$

۱۲۳ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. نیمسازهای این صفحه‌ها بردارهای $a_۱=i+j$ و $b_۱=j+k$ و $c_۱=i+k$ می‌باشند و اما طول آن‌ها همگی مضرب $\sqrt{۲}$ است. برای این منظور که طول آن‌ها $\sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{۲}$ و $۳\sqrt{۲}$ شود اولی را در ۱ و دومی را در ۲ و سومی را در ۳ ضرب می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l}a=i+j\\ b=۲j+۲k\\ c=۳i+۳k\end{array}\right\}\rightarrow V=|a.(b\times c)|=\begin{vmatrix}۱ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۲\\ ۳ & ۰ & ۳\end{vmatrix}=۶+۶=۱۲$$



۱۲۴ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. قطرهای متوازی‌الاضلاع بردارهای $a+b$ و $a-b$ می‌باشند.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(۳,۳,۰)\\ \vec{b}=(۱,-۱,-۲)\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}a+b=(۴,۲,-۲)=\vec{u}\\ a-b=(۲,۴,۲)=\vec{v}\end{cases}$$

$$\text{Cos}\,\theta=\frac{u.v}{|u|\,|v|}=\frac{۸+۸-۴}{\sqrt{۲۴}\sqrt{۲۴}}=\frac{۱}{۲}$$

۱۲۵ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(a-c)\times b=a\times c\Rightarrow a\times b-c\times b=a\times c\Rightarrow a\times b+b\times c+c\times a=۰$$

$$\xrightarrow[\text{داخلی می کنیم}]{\text{درضرب } a}a.(b\times c)=۰$$

۱۲۶ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & +۳ \end{vmatrix}=(-۳,-۶,۲)$$

مساحت قاعده‌ی متوازی السطوح $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۹+۳۶+۴}=\sqrt{۴۹}=۷$

حجم متوازی السطوح $V=\left|\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})\right|=|(۴,۰,-۱).(-۳,-۶,۲)|=|-۱۲-۲|=۱۴$

$$V=S.h\Rightarrow h=\frac{V}{S}=\frac{\left|\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})\right|}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}=\frac{۱۴}{۷}=۲$$

۱۲۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\vec{V}_۱=(۲,a,۱),\ \vec{V}_۲=(b,۲,۴),\ \vec{V}_۳=(۲,۱,c)$$

اولاً باید این سه بردار دو به دو بر هم عمود باشند (یال‌های مکعب مستطیل).

$$\begin{cases}\vec{V}_۱.\vec{V}_۲=۰\\ \vec{V}_۱.\vec{V}_۳=۰\\ \vec{V}_۲.\vec{V}_۳=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲b+۲a+۴=۰\\ ۴+a+c=۰\\ ۲b+۲+۴c=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\ b=۱\\ c=-۱\end{cases}$$

ثانیاً: حجم مکعب مستطیل (متوازی‌السطوح) قدرمطلق حاصلضرب مختلط سه بردار است.

$$\Rightarrow\left|\vec{V}_۱.(\vec{V}_۲\times\vec{V}_۳)\right|=\begin{vmatrix} ۲ & -۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۴ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{vmatrix}=۴۲$$

۱	۴	۳	۲	۱
۲	۴	۳	۲	۱
۳	۴	۳	۲	۱
۴	۴	۳	۲	۱
۵	۴	۳	۲	۱
۶	۴	۳	۲	۱
۷	۴	۳	۲	۱
۸	۴	۳	۲	۱
۹	۴	۳	۲	۱
۱۰	۴	۳	۲	۱
۱۱	۴	۳	۲	۱
۱۲	۴	۳	۲	۱
۱۳	۴	۳	۲	۱
۱۴	۴	۳	۲	۱
۱۵	۴	۳	۲	۱
۱۶	۴	۳	۲	۱
۱۷	۴	۳	۲	۱
۱۸	۴	۳	۲	۱
۱۹	۴	۳	۲	۱
۲۰	۴	۳	۲	۱
۲۱	۴	۳	۲	۱
۲۲	۴	۳	۲	۱
۲۳	۴	۳	۲	۱
۲۴	۴	۳	۲	۱
۲۵	۴	۳	۲	۱
۲۶	۴	۳	۲	۱
۲۷	۴	۳	۲	۱
۲۸	۴	۳	۲	۱
۲۹	۴	۳	۲	۱
۳۰	۴	۳	۲	۱
۳۱	۴	۳	۲	۱
۳۲	۴	۳	۲	۱
۳۳	۴	۳	۲	۱
۳۴	۴	۳	۲	۱
۳۵	۴	۳	۲	۱
۳۶	۴	۳	۲	۱
۳۷	۴	۳	۲	۱
۳۸	۴	۳	۲	۱
۳۹	۴	۳	۲	۱
۴۰	۴	۳	۲	۱
۴۱	۴	۳	۲	۱
۴۲	۴	۳	۲	۱
۴۳	۴	۳	۲	۱
۴۴	۴	۳	۲	۱
۴۵	۴	۳	۲	۱
۴۶	۴	۳	۲	۱
۴۷	۴	۳	۲	۱
۴۸	۴	۳	۲	۱
۴۹	۴	۳	۲	۱
۵۰	۴	۳	۲	۱
۵۱	۴	۳	۲	۱
۵۲	۴	۳	۲	۱
۵۳	۴	۳	۲	۱
۵۴	۴	۳	۲	۱
۵۵	۴	۳	۲	۱
۵۶	۴	۳	۲	۱
۵۷	۴	۳	۲	۱
۵۸	۴	۳	۲	۱
۵۹	۴	۳	۲	۱
۶۰	۴	۳	۲	۱
۶۱	۴	۳	۲	۱
۶۲	۴	۳	۲	۱
۶۳	۴	۳	۲	۱
۶۴	۴	۳	۲	۱
۶۵	۴	۳	۲	۱
۶۶	۴	۳	۲	۱
۶۷	۴	۳	۲	۱
۶۸	۴	۳	۲	۱
۶۹	۴	۳	۲	۱
۷۰	۴	۳	۲	۱
۷۱	۴	۳	۲	۱
۷۲	۴	۳	۲	۱
۷۳	۴	۳	۲	۱
۷۴	۴	۳	۲	۱
۷۵	۴	۳	۲	۱
۷۶	۴	۳	۲	۱
۷۷	۴	۳	۲	۱
۷۸	۴	۳	۲	۱
۷۹	۴	۳	۲	۱
۸۰	۴	۳	۲	۱
۸۱	۴	۳	۲	۱
۸۲	۴	۳	۲	۱
۸۳	۴	۳	۲	۱
۸۴	۴	۳	۲	۱
۸۵	۴	۳	۲	۱
۸۶	۴	۳	۲	۱
۸۷	۴	۳	۲	۱
۸۸	۴	۳	۲	۱
۸۹	۴	۳	۲	۱
۹۰	۴	۳	۲	۱
۹۱	۴	۳	۲	۱
۹۲	۴	۳	۲	۱
۹۳	۴	۳	۲	۱
۹۴	۴	۳	۲	۱
۹۵	۴	۳	۲	۱
۹۶	۴	۳	۲	۱
۹۷	۴	۳	۲	۱
۹۸	۴	۳	۲	۱
۹۹	۴	۳	۲	۱
۱۰۰	۴	۳	۲	۱
۱۰۱	۴	۳	۲	۱
۱۰۲	۴	۳	۲	۱
۱۰۳	۴	۳	۲	۱
۱۰۴	۴	۳	۲	۱
۱۰۵	۴	۳	۲	۱
۱۰۶	۴	۳	۲	۱
۱۰۷	۴	۳	۲	۱
۱۰۸	۴	۳	۲	۱
۱۰۹	۴	۳	۲	۱
۱۱۰	۴	۳	۲	۱
۱۱۱	۴	۳	۲	۱
۱۱۲	۴	۳	۲	۱
۱۱۳	۴	۳	۲	۱
۱۱۴	۴	۳	۲	۱
۱۱۵	۴	۳	۲	۱
۱۱۶	۴	۳	۲	۱
۱۱۷	۴	۳	۲	۱
۱۱۸	۴	۳	۲	۱
۱۱۹	۴	۳	۲	۱
۱۲۰	۴	۳	۲	۱
۱۲۱	۴	۳	۲	۱
۱۲۲	۴	۳	۲	۱
۱۲۳	۴	۳	۲	۱
۱۲۴	۴	۳	۲	۱
۱۲۵	۴	۳	۲	۱
۱۲۶	۴	۳	۲	۱
۱۲۷	۴	۳	۲	۱

رتبه برترهای کنکور ۱۴۰۴ مدیکال

گروه آموزشی مدیکال استوز

مهشید فاطمی

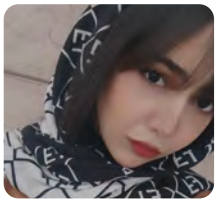
پزشکی
علوم پزشکی کاشان

هانیه مصدق

پرستاری
آزاد نیشابور

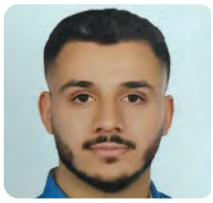
یاسینا نوروزی

پزشکی
جندی شاپور



نرگس مردانی

پرستاری
علوم پزشکی ایران



شایان جعفری

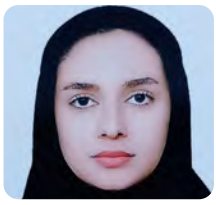
دندانپزشکی
علوم پزشکی بندرعباس

مهدیس رفیعی

اعضای مصنوعی و وسایل کمکی
علوم پزشکی ایران

ابراهیم هناره

دندانپزشکی
علوم پزشکی ارومیه

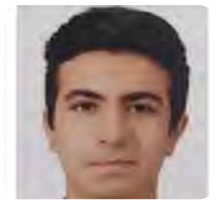


زهرا حمدی

علوم آزمایشگاهی
علوم پزشکی دزفول

محمدحسین نظری

پزشکی
علوم پزشکی همدان



ابوالفضل حسینی ارسون

دندانپزشکی
علوم پزشکی رشت

مائده نظری

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی گرگان

مبینا گودرزی

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی سبزوار

پریسا سادات موسوی

زیست شناسی سلولی و مولکولی
دانشگاه تهران

سحر درخشان

پزشکی
آزاد نجف آباد

نگار دلاوری

پرستاری
آزاد رشت

شنتیا زمانی

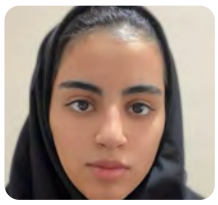
دندانپزشکی
علوم پزشکی شهید بهشتی

سارا مرادی

پرستاری
دانشگاه آزاد واحد شهرکرد

هستی عباسلو

هوشبری
علوم پزشکی رفسنجان



فاطمه حبیبی

پزشکی
علوم پزشکی سمنان

الینا بصیری

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی همدان

ملیکا ابراهیمی نژاد

دندانپزشکی
آزاد بروجرد

محمدصفا مارمائی

پزشکی
علوم پزشکی گرگان

محدثه خان محمدی

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی زنجان

سوگند تیموری

پزشکی
علوم پزشکی کرمانشاه

محمدفرحان کرمی

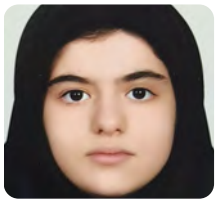
پرستاری
علوم پزشکی بابل

فاطمه شریفی پیرکوهی

فیزیوتراپی
دانشگاه علوم پزشکی جندی شاپور

محمدامین متین

پزشکی
علوم پزشکی دزفول



بهار اسلامی

پزشکی
علوم پزشکی رشت

زینب رنجبر

پرستاری
آزاد اسلامی واحد ساری

فاطمه محمد رحیمی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند

ساناز جعفری

علوم تغذیه
علوم پزشکی اصفهان

مینو رسولی

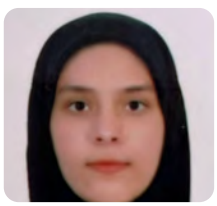
پزشکی
علوم پزشکی شیراز

محمدرضا اسپرجانی

پزشکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

فاطمه میرزایی

پزشکی
علوم پزشکی زنجان



شایان جعفری

کار درمانی
علوم توانبخشی و سلامت اجتماعی تهران

نرگس کلیچ

پزشکی
علوم پزشکی سمنان

رتبه برترهای کنکور ۱۴۰۴ مدیکال

گروه آموزشی مدیکال استوز

سحر قنبری

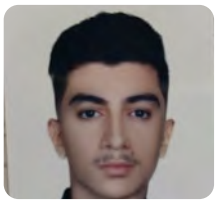
داروسازی
علوم پزشکی کرمان

زهرا حمدی

پزشکی
علوم پزشکی زنجان

هانیه اعتمادی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری

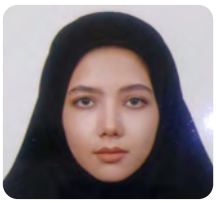


عرشیا نادری

پزشکی
آزاد اسلامی واحد نجف آباد

الهه غلامپور

پزشکی
علوم پزشکی مازندران



فاطمه علی پناه

پزشکی
علوم پزشکی مازندران

فرناز اقایی

پرستاری
علوم پزشکی کاشان

پارمیس یوسفی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند

فاطمه رحمانی

دندانپزشکی
علوم پزشکی زنجان

امیرعلی جهانشاهی

داروسازی
علوم پزشکی مازندران

نرگس دهاقین

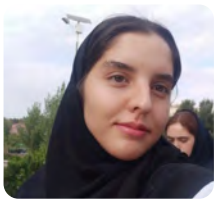
داروسازی
علوم پزشکی همدان

سجاد قویدل

مهندسی صنایع
دانشگاه صنعتی اصفهان

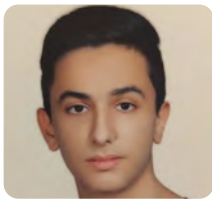
عرشیا شفیع زاده

مهندسی برق
شهید باهنر کرمان



مهتاب سلیمی

ریاضیات و کاربرد ها
دانشگاه الزهرا(س)



علی فتاح

مهندسی صنایع
دانشگاه یزد

سوگند احمدی

مهندسی نفت
دانشگاه شیراز

ثنا شریفی

آمار
دانشگاه علامه طباطبایی تهران

محمد اکبری

مهندسی برق
دانشگاه صنعتی اصفهان

حمید رضا بهزادی

مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شریف

کوثر صحتی

مهندسی معماری
دانشگاه خوارزمی تهران

یاس سنجرانی

مهندسی مکانیک
دانشگاه کاشان

ماهان استرکی

مهندسی شیمی
دانشگاه صنعت نفت آبادان

محمد شیرزایی

مهندسی مکانیک
دانشگاه فردوسی مشهد

مهسا یاری

بیم سنجی
دانشگاه شهید بهشتی تهران

محمد حسن نوابی

مهندسی مکانیک
دانشگاه بوعلی همدان

مبینا مروتی

حسابداری
دانشگاه تهران

حامد لاوی

مهندسی شیمی
صنعتی نوشیروانی بابل

آرمین دارابی

مهندسی مکانیک
دانشگاه قم

محمد هادی تاجیکی

مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید رجایی

مهلا الهی

مهندسی علم و مواد
دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

نگار مشهدی

عکاسی
دانشگاه سمنان

فهیمه امیری مقدم

نوازندگی موسیقی جهانی
دانشگاه تهران

ایلیاد پورمهدی

سینما
دانشگاه دامغان

زینب میرزائی

حسابداری
دانشگاه اراک

مبینا رودنی

حسابداری
دانشگاه زاهدان

ساره کریمی

اقتصاد
دانشگاه خوارزمی تهران