



گروه آموزشی ماز



ساعت

جمع بندی در

ریاضیات کنکور جامع

از سری کتاب های جمع بندی در ۲۴ ساعت

جمع بندی کامل + پیش بینی نکات مهم در کنکور سراسری

مهدی عزیزی، سید جواد نظری، محدثه شیخعلی



به نام خدا



گروه آموزشی ماز

به سری کتاب های جمع بندی ماز در **دیجی ماز**، خوش آمدید ...

دیجی ماز؛ کتابخانه دیجیتال ماز



@digimaze



digimaze_org



digimaze.org

اشتراک بی‌نهایت

"یک اشتراک، بی‌نهایت محتوا"

دیجی‌ماز یعنی کتاب‌خانه دیجیتال ماز و شما با تهیه یک اشتراک بی‌نهایت با هزینه‌ای کمتر از یک جلد کتاب، می‌تونید برای همیشه، به همه کتاب‌ها و محتوای متنی و صوتی دیجی‌ماز دسترسی داشته باشید. ممنون از اینکه با استفاده قانونی از کتاب‌های دیجی‌ماز و تهیه اشتراک، به ما انگیزه میدین تا کتاب‌های بیشتری رو براتون آماده کنیم.

پ ن: با توجه به هزینه روزافزون کتاب‌های کاغذی، کاملاً درکتون می‌کنیم که چقدر تهیه کتاب سخت شده و به همین خاطر، اشتراک بی‌نهایت دیجی‌ماز رو معرفی کردیم. اما با وجود هزینه اندک، اگر باز هم برای تهیه اشتراک دیجی‌ماز مشکل مالی دارین، به ما پیام بدین تا شما رو بررسی کنیم.

ارتباط مستقیم با دیجی‌ماز



Digimaze_org



DIGIMAZESUPP



۰۲۱۹۱۳۰۶۰۶۰



DIGIMAZESUPP

مقدمه ناشر

اگه می‌خواهی برنده باشی، سعی کن خوب پیش‌بینی کنی! حدوداً ۱۰ سال پیش بود، زمانی که تصمیم گرفتیم اولین آزمون الکترونیک کشور رو با همکارانم (شما بخونید دوستانم) تأسیس کنیم.

اون روزها همه بهمون می‌خندیدن! آزمون مگه غیرکاغذی و غیرحضورى هم میتونه باشه؟! سال‌ها گذشت ...

تو این سال‌ها هر روز به جمعیت ماز اضافه شد و هر روز تعداد اون‌هایی که به مسیر ماز باور نداشتن، کمتر شد. امروز همه تحسین می‌کنن.

تو این سال‌ها خیلی از آزمون‌های مهم الکترونیکی شد و در آخر قراره به زودی کنکور سراسری هم الکترونیکی بشه ... داستان کتاب هم همینه!

با گرایش بیشتر افراد به وسایل الکترونیک مثل گوشی موبایل، تبلت، لپ‌تاپ و ...، کم‌شدن کاغذ و گران‌تر شدنش، بالا رفتن هزینه‌ها، مشکلات اقتصادی، نیاز به درختان و هوای پاک ... همه این‌ها دست به دست هم خواهد داد و در یک دهه آینده خواهیم دید که انتشارات کاغذی هر روز کمرنگ‌تر میشه.

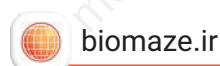
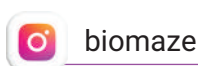
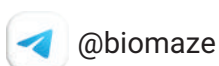
آینده به این شکل خواهد بود:

کتاب‌های الکترونیک بسیار ارزان‌تر از همه کتاب‌ها با هم در یک وسیله الکترونیکی با قابلیت به‌روزرسانی لحظه‌ای، در کنار هوای پاک‌تر!

به همین خاطر، ما دیجی‌ماز رو تأسیس کردیم. قرار هست به همه اشکال ویندوز، IOS و اندروید، کتاب‌ها رو توش قرار بدیم و روز به روز، ویژگی‌هاش رو زیاد کنیم.

ماز به عنوان اولین انتشارات الکترونیک در این پلتفرم کار خودش رو آغاز می‌کنه و سایر انتشارات نیز می‌توانند در این پلتفرم کتاب‌های خود را قرار دهند.

دکتر سید آرمان موسوی‌زاده، مدیرعامل گروه آموزشی ماز



دربارهٔ «جمع‌بندی در ۲۴ ساعت» ریاضی

آب که قطره‌قطره می‌چکد با پایداری و سماجت، سنگ بزرگ را سوراخ می‌کند. (بنجامین فرانکلین)

تا حالا شده یه سوالی رو بلد باشی اما نتونی حلش کنی؟

شده پیش خودت بگی کاش این مبحث رو یه مرور میکردم؟

شده روش حل یه سوال رو بلد باشی اما فرمولش یادته نباشه؟

حتی اگه به یکی از سوال‌های قبل جواب مثبت دادی، این کتاب راستِ کار خودته!

با این کتاب میتونی توی مدت زمان خیلی کوتاهی همه فرمول‌هایی رو که لازم داری رو مرور کنی و گوشه ذهنت داشته باشی همه ما میدونیم که ریاضی درسیه که خلاصه نویسی و تکرار و البته تمرین سوال‌های مهم، حرف اول رو برای به دست آوردن درصد خوب میزنن.

کتابی که الان در اختیار داری با یه تیر دو نشون زده یعنی اینکه ما توی این کتاب همه مطالب و مفاهیم اصلی کتاب درسی رو پوشش دادیم و جاهایی که لازم بوده برای درک بهتر مفاهیم، رابطه‌ها و فرمول‌های مهم رو توی جدول براتون خلاصه کردیم و البته اغلب تست‌های خوب و اصطلاحاً به درد بخور سال‌های گذشته رو با راه‌حل فوق تشریحی براتون آوردیم که با خوندن اونا میتونی خط فکری طراح رو حدس بزنی مهم نیست که توی خونه هستی یا توی مسیر رفت و برگشت به مدرسه، مهم نیست که شبه، ظهره و یا صبحه!

برای اینکه بخوای نکته‌ها و سوال‌های مهم ریاضی رو مرور کنی فقط کافیه که گوشه خودتو برداری و وارد این کتاب بشی و توی مدت خیلی کم، خیلی از مباحث ریاضی رو مرور کنی.

بهت قول میدم با یکبار خوندن این کتاب، خودت متوجه میشی که چه حجمی از مطالب برات یادآوری شدن و کلی از رقبا رو پشت سرت جا میذاری.

دکتر رسول خنجری، مدیر محتوای گروه آموزشی ماز

آماده‌سازی «جمع‌بندی در ۲۴ ساعت» ریاضی

از همه کسانی که در آماده سازی این کتاب نقش داشتند، شبانه روز زحمت کشیدند و برای بهترین شدن این کتاب، بهترین نسخه خودشون رو ارائه دادند، با تمام وجود تشکر می کنیم:

سرپرست پروژه: محدثه شیخعلی

مولفان کتاب: مهدی عزیزی، سیدجواد نظری، محدثه شیخعلی

ویراستاران علمی: معین آعلی، ارسلان حسنوند، فاروق منوچهری، رضا قانع، ابوالفضل میرزایی، سجاد داوطلب، طارق

پورعلی، شمیم پهلوان شریف، سجاد احمدی، مهرداد استقلالیان

ویراستاران فنی و نگارشی: مرضیه بنیانی

بررسی کیفیت محتوا: محمد قانع - رتبه ۲ کنکور سراسری ۱۴۰۲

رسم شکل: مرجان مطلبی زاده

طراحی جلد، گرافیک و صفحه‌آرایی: ویانو



چرا دیجی‌ماز؟

ما در دیجی‌ماز این زمینه رو براتون فراهم کردیم تا از تجربه مطالعه کتاب الکترونیکی، لذت ببرید. در دیجی‌ماز، همه کتاب‌هاتو، حتی کتاب‌های درسیتو یک‌جا و در یک اپلیکیشن کنار هم داری و همه‌جا میتونی با خودت ببریش!

مزیت‌های منحصر به فرد دیجی‌ماز نسبت به سایر ابزارهای مطالعه کتاب الکترونیکی:

■ امکان هایلایت کردن

همونطوری که با ماژیک فسفری توی کتاب‌های کاغذی مطالب مهم رو هایلایت می‌کنی! با این تفاوت که ماژیکت تموم میشه و هر وقت بخوای می‌تونی پاکش کنی!

■ امکان یادداشت گذاری در صفحات

همونطور که گوشه کتابت نکات مهم رو مینویسی؛ اینجا هم هر چه دل تنگت می‌خواهد بنویس و نگران کم‌بودن جا هم نیستی دیگه!

■ امکان نشان دار کردن صفحات برای مرور مجدد

دوست داری قبل امتحانت سریع صفحات مهم رو مرور کنی؟ دیگه نگران نیستی، صفحات مهم رو علامت می‌زنی و خیلی سریع میتونی مرورشون کنی!

■ امکان خط کشیدن و ترسیم آزاد

علاوه بر هایلایت کردن دوست داری زیر کلمه‌های مهم هم خط بکشی؟ مشکلی نیست، توی دیجی‌ماز هم این امکانو داری! تازه خودکارتم چند رنگه و تموم نمیشه!

■ پاک کردن (یادداشت‌ها، خط‌کشی‌ها و هایلایت‌ها)

احساس می‌کنی کتابت خیلی شلوغ شده؟ یا چیزی رو نوشتی و می‌خوای پاکش کنی؟ بازم مشکلی نیست؛ هر چیزی که بخوای رو خیلی راحت می‌تونی پاک کنی! اثری هم ازش نمیمونه!!

■ ذخیره کردن تمامی تغییرات بعد از هر بار استفاده از کتاب

نگرانی که یه موقع نوشته‌ها و هایلایت و یادداشت‌ها توی کتاب گم بشن؟؟ نگران اینم نباش! توی دیجی‌ماز همه چیز ذخیره میشه و توی سیستم باقی می‌مونه!

چرا دیجی‌ماز؟

■ امکان انتقال به صفحات مورد نظر از طریق فهرست مطالب

موقع خوندن pdf کتاب‌ها انگشتت درد می‌گیره و حوصله اسکرول کردن نداری؟ دوست‌داری سریع بری تو همون فصل وسط یا انتهای کتاب؟ واسه اینم مشکل نداری!! هر جای کتاب که باشی می‌تونی فهرست رو باز کنی و فقط با یه کلیک بری توی صفحه مورد نظرت!!

■ امکان جست‌وجوی کلمات

از اون دسته آدم‌هایی هستی که دوست داری ترکیبی بخونی و یه کلمه رو سرچ کنی و تمام مطالب مرتب باهاش رو پیدا کنی؟؟ بازم مشکلی نداری! هر چی که بخوای توی دیجی‌ماز به فارسی یا انگلیسی می‌تونی سرچ کنی و پیدا کنی!

■ وضعیت نایت مود (night mode)

نور گوشی یا تبلت چشمتو اذیت میکنه؟ بازم مشکلی نداری!! کافیه دیجی‌ماز رو بذاری روی حالت نایت مود!

■ هر کتاب رو فقط یک بار تهیه می‌کنی!

تا حالا شده یه کتابی رو تهیه کنی بعد ببینی آپدیت جدیدش اومده و مجبوری یه هزینه مجدد کنی تا تهیه‌ش کنی؟؟ دیگه این دغدغه رو نداشته باش! حتی اگه کتاب‌های دیجی‌ماز ۱۰۰ بار هم آپدیت بشن، نیاز به هزینه مجدد نداری و کتاب جدید برات فعال میشه!

■ آخریشو تو بگو ...

بهمون بگو چه ویژگی‌های دیگه‌ای لازم داری که به دیجی‌ماز اضافه کنیم؟ تا در آپدیت‌های بعدی این‌کارو انجام بدیم. اگه می‌خوای برنده باشی، سعی کن خوب پیش‌بینی کنی!



digimaze.org

فهرست مطالب

با انتخاب هر فصل و کلیک روی آن، به صفحه مربوطه منتقل می‌شوید.

- فصل ۱: مباحث پایه ۹
- فصل ۲: تابع ۶۳
- فصل ۳: توابع نمایی و لگاریتمی ۹۱
- فصل ۴: مثلثات ۱۰۱
- فصل ۵: حد و پیوستگی ۱۲۱
- فصل ۶: مشتق ۱۴۳
- فصل ۷: کاربرد مشتق ۱۶۳
- فصل ۸: هندسه ۱۷۱
- فصل ۹: آمار و احتمال ۲۰۳



فصل ۱: مباحث پایه

توی این فصل با به موضوعاتی کنار تون هستیم از جنس ریاضی، با طعم فیزیک و بوی شیمی!!

تعجب نکنید، بخش‌های این فصل مبنا و پایه ریاضیانه! در واقع پیش‌نیاز همه بخش‌های ریاضی و لازمه حل سوالات و مسائل فیزیک و شیمی.

این بخش‌ها همون کلید کم شده شما برای موفقیت توی ریاضیه که با تسلط رو اینا میتونین خیالتون بابت همه چی کاملاً راحت باشه و به خیز محکم بردارین برای درصد

توب و عالی!

این فصل‌ها در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

سوالات تابع، توابع نمایی و لگاریتمی، حد و پیوستگی، مشتق و کاربردش و حتی احتمال، همه و همه میتونن با این بخش‌ها ترکیب بشن. دیگه نمیدونم با چه زوونی بهتون اهمیت

تحلیل و بررسی این فصل رو نشون بدم.

از این فصل در کتور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

لگتور سراسری	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ - نوبت اول	۱۴۰۲ - نوبت دوم
تعداد سؤال	۶	۴	۶	۷	۵
مباحث مطرح شده در سؤال	۱. توان‌های گویا و عبارتهای جبری ۲. دنباله حسابی ۳. معادله درجه ۲ ۴. نامعادله ۵. سهمی ۶. قدرمطلق	۱. توان‌های گویا و عبارتهای جبری ۲. دنباله حسابی ۳. معادله درجه ۲ ۴. نامعادله ۵. سهمی ۶. قدرمطلق	۱. توان‌های گویا و عبارتهای جبری ۲. دنباله حسابی ۳. معادله درجه ۲ ۴. نامعادله ۵. سهمی ۶. قدرمطلق	۱. توان‌های گویا و عبارتهای جبری ۲. دنباله حسابی ۳. معادله درجه ۲ ۴. نامعادله ۵. سهمی ۶. قدرمطلق	۱. توان‌های گویا و عبارتهای جبری ۲. دنباله حسابی ۳. معادله درجه ۲ ۴. نامعادله ۵. سهمی ۶. قدرمطلق



معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

روش روسی

روش فرمول کلی (دلتا)

روش مربع کامل

روش ریشه گیری

روش تجزیه

روش ضرایب

معرفی

معرفی

تعریف: هر معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $a \neq 0$ و b, c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ باشد را یک معادله درجه دوم بر حسب x می گوئیم. معادله های زیر نمونه ای از معادله درجه دوم هستند:

$$\bullet 2x^2 - x + 1 = 0$$

$$\bullet \sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0$$

$$\bullet 3x^2 - 12 = 0$$

$$\bullet x^2 + x = 0$$

برای حل یک معادله درجه دوم روش های مختلفی وجود دارد که مهم ترین آن ها عبارتند از:

روش ریشه گیری ✓

روش تجزیه ✓

روش ضرایب ✓

روش روسی ✓

روش فرمول کلی (دلتا) ✓

روش مربع کامل ✓

روش ضرایب

در حل معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$; $(a \neq 0)$:

اگر مجموع ضرایب این معادله برابر صفر باشد $(a + b + c = 0)$ ، یکی از ریشه ها برابر ۱ و ریشه دیگر برابر $-\frac{c}{a}$ است، به عبارت دیگر:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

به عنوان مثال در معادله $x^2 - 4x + 3 = 0$ داریم:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3 \end{cases}$$

اگر مجموع ضرایب چپ و راست معادله با ضریب وسطی برابر باشد $(a + c = b)$ ، یکی از ریشه ها برابر ۱- و ریشه دیگر برابر $-\frac{c}{a}$ است به عبارت دیگر:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

به عنوان مثال در معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ داریم:

$$2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{(-5)}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

روش تجزیه

قبل از اینکه این روش رو یاد بگیریم لازمه که ویژگی زیر رو بلد باشیم...

اگر A و B دو عبارت جبری بوده و $AB = 0$ باشد آن گاه حداقل یکی از این دو عبارت برابر صفر است یعنی:

$$AB = 0 \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \text{یا} \\ B = 0 \end{cases}$$

حالا بریم که روش تجزیه رو یاد بگیریم...

برای حل یک معادله درجه دوم به روش تجزیه، ابتدا سعی می کنیم که معادله را به کمک فاکتورگیری، اتحاد مزدوج و یا اتحاد جمله مشترک به حاصل ضرب دو عبارت تبدیل کنیم و سپس با استفاده از ویژگی فوق هر یک از عبارت ها را برابر صفر قرار داده و جواب های معادله را به دست بیاوریم.

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک

$$x^2 + mx + n = (x + \bigcirc)(x + \bigcirc)$$

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

$$x^2 - m^2 = (x - m)(x + m)$$

$$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$$

تجزیه به کمک فاکتورگیری

$$mx^2 + nx = x(mx + n)$$

$$2x^2 - 4x = x(2x - 4)$$



توجه کنید که در تجزیه یک معادله درجه دوم به کمک اتحاد جمله مشترک، ضریب x^2 باید برابر ۱ باشد.
برای تجزیه معادله درجه دوم $x^2 + mx + n = 0$ به کمک اتحاد جمله مشترک، ابتدا این معادله را به صورت $(x + \square)(x + \circ) = 0$ می نویسیم و سپس به جای $\square$ و $\circ$ دو عدد جایگذاری می کنیم که حاصل ضرب آن ها برابر n و مجموع آن ها برابر m باشد.

روش ریشه گیری

در حل معادله درجه دوم به فرم $x^2 = a$ که در آن a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ تر یا مساوی صفر) است، ریشه های معادله عبارتند از: $x_1 = \sqrt{a}$ و $x_2 = -\sqrt{a}$.

$$x^2 = a \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{a} \\ x_2 = -\sqrt{a} \end{cases}$$

به عنوان مثال برای پیدا کردن ریشه های معادله $x^2 - 3 = 25$ به روش ریشه گیری داریم:

$$x^2 - 3 = 25 \rightarrow x^2 = 28 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{28} \rightarrow x_1 = 2\sqrt{7} \\ x_2 = -\sqrt{28} \rightarrow x_2 = -2\sqrt{7} \end{cases}$$

توجه کنید که در معادله $x^2 = a$ ، گفتیم که عدد a باید نامنفی باشد در غیر این صورت معادله جواب نخواهد داشت، به عنوان مثال در معادله $3x^2 + 8 = 2$ داریم:

$$3x^2 + 8 = 2 \rightarrow 3x^2 = -6 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

عدد منفی ↑

در حالت کلی برای پیدا کردن ریشه های معادله $(ax + b)^2 = u$ به روش ریشه گیری داریم:

$$(ax + b)^2 = u \rightarrow \begin{cases} ax + b = \sqrt{u} \rightarrow ax = \sqrt{u} - b \rightarrow x = \frac{\sqrt{u} - b}{a} \\ ax + b = -\sqrt{u} \rightarrow ax = -\sqrt{u} - b \rightarrow x = \frac{-\sqrt{u} - b}{a} \end{cases}$$

روش مربع کامل

برای حل معادله درجه دوم $2x^2 + 5x - 3 = 0$ ، به روش مربع کامل مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

۱ عدد ثابت معادله را به طرف راست تساوی منتقل می کنیم.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \rightarrow 2x^2 + 5x = 3$$

۲ اگر ضریب x^2 عددی غیر از یک باشد طرفین تساوی را بر ضریب x^2 تقسیم می کنیم.

$$2x^2 + 5x = 3 \xrightarrow{\div 2} x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2}$$

۳ ضریب x را نصف کرده و حاصل را به توان دو می رسانیم و سپس آن را به طرفین تساوی اضافه می کنیم.

$$x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{3}{2} \xrightarrow{+\left(\frac{5}{4}\right)^2} x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$$

۴ عبارت سمت چپ تساوی را به صورت مربع کامل نوشته و عبارت سمت راست تساوی را به ساده ترین شکل می نویسیم.

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16} \rightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2$

۵ در نهایت از طرفین تساوی جذر گرفته و معادله را حل می کنیم (همون روش ریشه گیری فورمون)

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \rightarrow \begin{cases} x + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \rightarrow x = \frac{7}{4} - \frac{5}{4} \rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ x + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \rightarrow x = -\frac{7}{4} - \frac{5}{4} \rightarrow x = \frac{-12}{4} = -3 \end{cases}$$



روش فرمول کلی (دلتا)

برای حل یک معادله درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c = 0$; $(a \neq 0)$ به روش فرمول کلی، ابتدا دلتای این معادله را به کمک رابطه $\Delta = b^2 - 4ac$ به دست می آوریم که در این شرایط با سه حالت روبه رو می شویم:

حالت ۱: اگر $\Delta > 0$ باشد:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد که عبارتند از:

معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را می توانیم به صورت $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ نمایش دهیم.

تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور xها را در دو نقطه متمایز قطع می کند.

حالت ۲: اگر $\Delta = 0$ باشد:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

معادله دو ریشه یکسان (یک ریشه مضاعف یا یک ریشه مکرر مرتبه ۲) دارد که عبارتست از:

معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را می توانیم به صورت $a(x - x_1)^2 = 0$ نمایش دهیم.

تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، در نقطه ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ بر محور xها مماس است.

حالت ۳: اگر $\Delta < 0$ باشد:

معادله ریشه حقیقی ندارد.

تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، با توجه به علامت a ، می تواند همواره بالا و یا همواره پایین محور xها باشد.

$$ax^2 + bx + c = 0; (a \neq 0)$$

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	$\Delta = b^2 - 4ac$
معادله ریشه حقیقی ندارد.	معادله یک ریشه مضاعف دارد.	معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.	تعداد ریشه ها
-	$x = -\frac{b}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	ریشه ها

روش روسی

برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$; $(a \neq 0)$ به روش روسی مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱. ضریب x^2 را در عدد ثابت c ضرب می کنیم تا معادله به فرم $x^2 + bx + ac = 0$ تبدیل شود.

۲. ریشه (یا ریشه های) معادله جدید را به دست می آوریم.

۳. در نهایت ریشه (یا ریشه های) معادله جدید را بر ضریب x^2 (یعنی a) تقسیم می کنیم تا ریشه های معادله اصلی به دست بیاید.

به عنوان مثال برای حل کردن معادله $9x^2 - 12x - 5 = 0$ به روش روسی، داریم:

$$9x^2 - 12x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب } a \text{ در } c} x^2 - 12x - 45 = 0$$

حال ریشه های معادله جدید یعنی $x^2 - 12x - 45 = 0$ را به دست می آوریم:

$$x^2 - 12x - 45 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه با جمله مشترک}} (x - 15)(x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x'_1 = 15 \\ x'_2 = -3 \end{cases}$$

در نهایت برای به دست آوردن ریشه های معادله اصلی، باید ریشه های به دست آمده را بر ضریب x^2 یعنی ۹، تقسیم کنیم:

$$\text{ریشه های معادله اصلی: } \begin{cases} x_1 = \frac{x'_1}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{x'_2}{9} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$



روابط بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم

تیپ سوم مسائل روابط بین ریشه ها

تیپ دوم مسائل روابط بین ریشه ها

تیپ اول مسائل روابط بین ریشه ها

معرفی



گاهی به جای حل کردن یک معادله درجه دوم و به دست آوردن مقدار دقیق ریشه های آن می توان تنها با محاسبه مجموع و حاصل ضرب ریشه های آن معادله به جواب مسئله رسید. در این بخش، قصد داریم که چند تیپ از این مسئله ها را با هم بررسی کنیم ولی قبل از ورود به این تست باید بدانیم که: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $(a \neq 0)$ و $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن گاه با فرض $\Delta \geq 0$ داریم:

مجموع ریشه ها	حاصل ضرب ریشه ها
$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$	$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

به عنوان مثال، در معادله درجه دوم $3x^2 + 2x - 1 = 0$ داریم:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه ها} : S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3} \\ \text{حاصل ضرب ریشه ها} : P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

تیپ اول مسائل روابط بین ریشه ها



در این گونه از مسائل، یک معادله درجه دوم با ضرایب معلوم را به ما می دهند و از ما می خواهند که حاصل یک عبارتی را پیدا کنیم که در این عبارت، رابطه متقارنی بین ریشه های معادله درجه دوم برقرار است. برای حل این نوع از سوالات، ابتدا باید رابطه داده شده را به کمک اتحادها، تجزیه، فاکتورگیری، مخرج مشترک، گویا کردن و برحسب S و P بنویسیم و سپس مقدار S و P را از معادله داده شده پیدا کرده و در عبارت خواسته شده جایگذاری کنیم.

توی جدول پایین، مهم ترین رابطه های متقارنی که می تونه توی ذهن طراح کنکور باشه رو براتون آماده کردیم..

رابطه	حاصل برحسب S و P
$\alpha^2 + \beta^2$	$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$
$\alpha^3 + \beta^3$	$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$
$\alpha^4 + \beta^4$	$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$
$\alpha^6 + \beta^6$	$\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^2 + \beta^2)^3 - 3(\alpha\beta)^2(\alpha^2 + \beta^2) = (S^2 - 2P)^3 - 3P^2(S^2 - 2P)$
$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$	$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}$
$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$	$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \alpha^3}{\alpha^3\beta^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3} = \frac{S^3 - 3PS}{P^3}$
$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4}$	$\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4} = \frac{\beta^4 + \alpha^4}{\alpha^4\beta^4} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2}{(\alpha\beta)^4} = \frac{(S^2 - 2P)^2 - 2P^2}{P^4}$
$ \alpha - \beta $	$ \alpha - \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{ a }$
$ \alpha^2 - \beta^2 $	$ \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \left \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } \times S \right $



$ \alpha^3 - \beta^3 $	$ \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \left \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } (S^2 - P) \right $
$ \alpha^4 - \beta^4 $	$ \alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = \left \frac{\sqrt{\Delta}}{ a } (S)(S^2 - 2P) \right $
$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}} \quad (\alpha, \beta > 0)$
$ \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} $	$ \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{S - 2\sqrt{P}} \quad (\alpha, \beta > 0)$
$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{S}{\sqrt{P}}$

تیپ دوم مسائل مربوط به روابط بین ریشه‌ها

در این نوع از سوال‌ها، یک معادله درجه دوم با ضرایب معلوم را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که حاصل یک عبارت را پیدا کنیم که در این عبارت رابطه نامتقارنی بین ریشه‌های معادله درجه دوم برقرار است که برای حل این تپیی از سوالات باید به این نکته توجه داشته باشیم که ریشه‌های یک معادله در خود معادله صدق می‌کنند، بنابراین اگر فرض کنیم که α و β ریشه‌های معادله درجه دوم باشند، باید در معادله داده شده صدق کنند، پس با جایگذاری آن‌ها در معادله درجه دوم داده شده سعی می‌کنیم که عبارت خواسته شده (یا قسمتی از آن) را بسازیم و در نهایت به کمک مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها، حاصل خواسته شده را به دست بیاوریم.

تیپ سوم مسائل مربوط به روابط بین ریشه‌ها

در این تیپ از سوال‌ها، یک معادله درجه دوم با چند ضریب مجهول و همچنین یک رابطه نامتقارن بین ریشه‌های آن معادله را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که مقدار یک مجهول را به دست بیاوریم که برای حل این نوع از سوال‌ها، ابتدا مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) ی معادله داده شده را به دست می‌آوریم و سپس S یا P را به همراه رابطه نامتقارن داده شده در یک دستگاه معادلاتی قرار داده و با حل دستگاه، مجهول مورد نظر را به دست می‌آوریم.

تشکیل معادله درجه دوم با استفاده از S و P

حالت دوم: ساخت معادله از روی معادله دیگر

حالت اول: ساخت معادله از روی ریشه‌های آن

توی بعضی از سوال‌ها، ما باید به کمک جمع و ضرب ریشه‌ها یعنی همون S و P ، معادله درجه دوم رو بسازیم که این مدل از سوال‌ها رو توی دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول: ساخت معادله از روی ریشه‌های آن

در این حالت، ریشه‌های معادله درجه دوم را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که معادله مربوط به آن ریشه‌ها را تشکیل دهیم. برای این نوع از سوال‌ها، ابتدا مجموع ریشه‌ها یعنی $S = \alpha + \beta$ و حاصل ضرب ریشه‌ها یعنی $P = \alpha\beta$ را به دست آورده و سپس آن‌ها را در معادله $x^2 - Sx + P = 0$ جایگذاری می‌کنیم. به عبارت دیگر، اگر α و β ریشه‌های معادله خواسته شده باشند، داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta \\ P = \alpha\beta \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

حالت دوم: ساخت معادله از روی معادله دیگر

در این حالت، معادله درجه دومی را به ما می‌دهند و از ما می‌خواهند که معادله درجه دوم جدیدی تشکیل دهیم که ریشه‌های آن با ریشه‌های معادله اولیه رابطه خاصی داشته باشند. برای حل این نوع از سوال‌ها مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

- ابتدا مجموع ریشه‌ها (S) و حاصل ضرب ریشه‌ها (P) ی معادله اولیه را به دست می‌آوریم.
- سپس مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله خواسته شده را به کمک S و P محاسبه کرده و آن‌ها را به ترتیب S' و P' می‌نامیم.
- در نهایت با استفاده از معادله $x^2 - S'x + P' = 0$ ، معادله جدید را تشکیل می‌دهیم.



بررسی تعداد و علامت ریشه های معادله درجه دوم

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$; $(a \neq 0)$:

شرایط	تعداد و علامت ریشه ها
$\Delta > 0, S > 0, P > 0$	اگر معادله دارای دو ریشه متمایز مثبت باشد.
$\Delta > 0, S < 0, P > 0$	اگر معادله دارای دو ریشه متمایز منفی باشد.
$\Delta > 0, P > 0$	اگر معادله دارای دو ریشه هم علامت باشد.
$P < 0$	اگر معادله دارای دو ریشه مختلف علامت باشد.
$S = 0, P < 0$	اگر معادله دارای دو ریشه قرینه هم باشد. $(\alpha, -\alpha)$
$\Delta > 0, P = 1$	اگر معادله دارای دو ریشه معکوس هم باشد. $(\alpha, \frac{1}{\alpha})$
$P = -1$	اگر معادله دارای دو ریشه قرینه و معکوس هم باشد. $(\alpha, -\frac{1}{\alpha})$
$S < 0, P = 0$	اگر معادله دارای یک ریشه صفر و یک ریشه منفی باشد.
$\Delta = 0, S > 0$	اگر معادله دارای یک ریشه مضاعف مثبت باشد.
$\Delta = 0, S < 0$	اگر معادله دارای یک ریشه مضاعف منفی باشد.
$b = c = 0$	اگر معادله دارای یک ریشه مضاعف صفر باشد.
$S > 0, P < 0$	اگر معادله دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است، به طوری که اندازه ریشه مثبت بزرگ تر است.
$S < 0, P < 0$	اگر معادله دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است، به طوری که اندازه ریشه منفی بزرگ تر است.

بحث درباره محل ریشه های معادله درجه دوم

توی این درسنامه قصد داریم که درباره محل ریشه های معادله درجه دوم بحث کنیم و حالت های مختلف اون رو مورد بررسی قرار بدیم:

حالت ۱) اگر ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، بیشتر از $x = \alpha$ باشند:

حالت ها	شرایط
	$a > 0$ $\Delta > 0$ $-\frac{b}{2a} > \alpha$ $f(\alpha) > 0$
	$a > 0$ $\Delta = 0$ $-\frac{b}{2a} > \alpha$ $f(\alpha) > 0$
	$a < 0$ $\Delta > 0$ $-\frac{b}{2a} > \alpha$ $f(\alpha) < 0$
	$a < 0$ $\Delta = 0$ $-\frac{b}{2a} > \alpha$ $f(\alpha) < 0$

بنابراین، برای اینکه این حالت را داشته باشیم، در هر صورت باید شرایط زیر برقرار باشد:

- $\Delta \geq 0$
- $-\frac{b}{2a} > \alpha$
- $af(\alpha) > 0$



حالت ۲) اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ کمتر از $x = \alpha$ باشند:

حالت‌ها	شرایط
	$a > 0$ $\Delta > 0$ $-\frac{b}{2a} < \alpha$ $f(\alpha) > 0$
	$a > 0$ $\Delta = 0$ $-\frac{b}{2a} < \alpha$ $f(\alpha) > 0$
	$a < 0$ $\Delta > 0$ $-\frac{b}{2a} < \alpha$ $f(\alpha) < 0$
	$a < 0$ $\Delta = 0$ $-\frac{b}{2a} < \alpha$ $f(\alpha) < 0$

بنابراین، برای اینکه این حالت را داشته باشیم، در هر صورت باید شرایط زیر برقرار باشد:

- $\Delta > 0$
- $-\frac{b}{2a} < \alpha$
- $af(\alpha) > 0$

حالت ۳) اگر $x = \alpha$ بین ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ قرار داشته باشد:

حالت‌ها	شرایط
	$a > 0$ $\Delta > 0$ $f(\alpha) < 0$
	$a < 0$ $\Delta > 0$ $f(\alpha) > 0$

بنابراین، برای اینکه این حالت را داشته باشیم، در هر صورت باید شرایط زیر برقرار باشد:

- $\Delta > 0$
- $af(\alpha) < 0$

حالت ۴) اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در بازه (α, β) قرار داشته باشند:

حالت‌ها	شرایط
	$a > 0$ $\Delta = 0$ $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$ $f(\alpha) > 0$ $f(\beta) > 0$
	$a > 0$ $\Delta > 0$ $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$ $f(\alpha) > 0$ $f(\beta) > 0$
	$a < 0$ $\Delta = 0$ $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$ $f(\alpha) < 0$ $f(\beta) < 0$
	$a < 0$ $\Delta > 0$ $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$ $f(\alpha) < 0$ $f(\beta) < 0$

بنابراین، برای اینکه این حالت را داشته باشیم، در هر صورت باید شرایط زیر برقرار باشد:

- $\Delta \geq 0$
- $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$
- $af(\alpha) > 0$
- $af(\beta) > 0$

حالت ۵) اگر دقیقاً یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در بازه (α, β) قرار داشته باشد:

حالت‌ها	شرایط
	$a > 0$ $\Delta > 0$ $f(\alpha) > 0$ $f(\beta) < 0$
	$a > 0$ $\Delta > 0$ $f(\alpha) < 0$ $f(\beta) > 0$
	$a < 0$ $\Delta > 0$ $f(\alpha) < 0$ $f(\beta) > 0$
	$a < 0$ $\Delta > 0$ $f(\alpha) > 0$ $f(\beta) < 0$



• $\Delta > 0$

• $f(\alpha)f(\beta) < 0$

بنابراین، برای اینکه این حالت را داشته باشیم، در هر صورت باید شرایط زیر برقرار باشد:

حالت ۴) در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، یکی از ریشه‌ها کم‌تر از $x = \alpha$ و ریشه دیگر بیشتر از $x = \beta$ باشد:

		حالت‌ها
$a > 0$ $\Delta > 0$ $f(\alpha) < 0$ $f(\beta) < 0$	$a < 0$ $\Delta > 0$ $f(\alpha) > 0$ $f(\beta) > 0$	شرایط

• $\Delta > 0$

• $af(\alpha) < 0$

• $af(\beta) < 0$

بنابراین، برای اینکه این حالت را داشته باشیم، در هر صورت باید شرایط زیر برقرار باشد:

معادله‌های قابل تبدیل به معادله درجه دوم

4

معادلات به فرم $ax + b\sqrt{x} + c = 0$

معادلات به فرم $ax^2 + b|x| + c = 0$

معادلات به فرم $ax^4 + bx^2 + c = 0$

معرفی و روش حل

معرفی و روش حل آن

برای حل برخی از معادله‌ها، باید با استفاده از تغییر متغیر، آن معادلات را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. برای این منظور به روش زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا در معادله داده شده، به جای یک عبارت برحسب x ، از یک تغییر متغیر مناسب (مثلاً t) استفاده کرده و معادله داده شده را به یک معادله درجه دوم برحسب t تبدیل می‌کنیم.

سپس معادله درجه دوم را حل کرده و مقدار (مقادیر) t را به دست می‌آوریم.

در نهایت عبارتی را که آن را برابر t فرض کرده بودیم را برابر مقدار (مقادیر) t قرار می‌دهیم و با حل آن مجهول‌های اصلی یعنی x را به دست می‌آوریم.

معادلات به فرم $ax^4 + bx^2 + c = 0$

برای حل معادلات به فرم $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ، از تغییر متغیر $x^2 = t$ استفاده کرده و معادله را به شکل $at^2 + bt + c = 0$ می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم، سپس t های به دست آمده را برابر x^2 قرار داده و مقادیر x را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید که چون $x^2 = t \geq 0$ است، بنابراین t های منفی غیر قابل قبول هستند.

■ بحث درباره تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$:

برای بررسی تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ، کافی است که بر روی تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ تمرکز کنیم. (توجه کنید که فرض ما بر این است که $x^2 = t$ است.)

جدول پایین به‌همون کمک می‌کنه که سوالاتی این قسمت رو فیتیله پیچ کنیم... ببین...

شرط	$at^2 + bt + c = 0$	$ax^4 + bx^2 + c = 0$
$\Delta > 0, S > 0, P > 0$	دو ریشه متمایز مثبت	۴ ریشه حقیقی متمایز
$S > 0, P = 0$	یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت	۳ ریشه حقیقی متمایز
$P < 0$	دو ریشه مختلف‌العلامت	۲ ریشه حقیقی متمایز



$\Delta = 0, S > 0$	برای دو ریشه حقیقی متمایز باشد	فقط یک ریشه حقیقی
$S < 0, P = 0$	یک ریشه صفر و یک ریشه منفی	
$b = c = 0$	یک ریشه مضاعف صفر	
$\Delta < 0$	فاقد ریشه حقیقی	فاقد ریشه حقیقی
$\Delta > 0, S < 0, P > 0$	دو ریشه ساده منفی	
$\Delta = 0, S < 0$	یک ریشه مضاعف منفی	

معادلات به فرم $ax^2 + b|x| + c = 0$



برای حل معادلات به فرم $ax^2 + b|x| + c = 0$ ، از تغییر متغیر $|x| = t$ استفاده کرده و معادله را به شکل $at^2 + bt + c = 0$ می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم. سپس t های به دست آمده را برابر $|x|$ قرار داده و مقادیر x را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید که چون $|x| = t \geq 0$ است، بنابراین t های منفی غیرقابل قبول هستند.

توجه برای بررسی تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax^2 + b|x| + c = 0$ ، دقیقاً مشابه معادله‌های $ax^2 + bx + c = 0$ عمل کرده و از جدول مربوط به آن استفاده می‌کنیم.

معادلات به فرم $ax + b\sqrt{x} + c = 0$



برای حل معادلات به فرم $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ، از تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ استفاده کرده و معادله را به شکل $at^2 + bt + c = 0$ می‌نویسیم و آن را حل می‌کنیم، سپس t های به دست آمده را برابر $\sqrt{x}$ قرار داده و مقادیر x را محاسبه می‌کنیم. توجه داشته باشید که چون $\sqrt{x} = t \geq 0$ است، بنابراین t های منفی غیرقابل قبول هستند.

■ بحث درباره تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$:

برای بررسی تعداد و علامت ریشه‌های معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ، کافی است که بر روی تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ تمرکز کنیم. (توجه کنید که فرض ما بر این است که $\sqrt{x} = t$ است)

شرط	$at^2 + bt + c = 0$	$ax + b\sqrt{x} + c = 0$
$\Delta > 0, S > 0, P \geq 0$	دو ریشه متمایز نامنفی	دو ریشه حقیقی متمایز
$P < 0$	دو ریشه مختلف‌العلامت	فقط یک ریشه مثبت
$\Delta = 0, S > 0$	ریشه مضاعف مثبت	
$S < 0, P = 0$	یک ریشه صفر و یک ریشه منفی	فقط یک ریشه صفر
$\Delta > 0, S < 0, P > 0$	دو ریشه متمایز منفی	فاقد ریشه حقیقی
$\Delta = 0, S < 0$	یک ریشه مضاعف منفی	
$\Delta < 0$	فاقد ریشه حقیقی	



تابع درجه دوم سهمی

محور تقارن (خط تقارن) سهمی

رأس سهمی

عرض از مبدأ سهمی

معرفی



نمودار هر تابع به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را که در آن ضرایب a ، b و c اعداد حقیقی بوده و $a \neq 0$ باشد را یک سهمی (تابع درجه دوم) می‌گوییم که نمودار آن به یکی از دو صورت زیر است:

$$f(x) = ax^2 + bx + c ; (a, b, c \in \mathbb{R}), a \neq 0$$

$a < 0$



- ضریب x^2 منفی است.
- دهانه سهمی رو به پایین است.

$a > 0$



- ضریب x^2 مثبت است.
- دهانه سهمی رو به بالا است.

حالا بیاییم بررسی کنیم و پارامترهای مهم سهمی رو با هم یاد بگیریم.

عرض از مبدأ سهمی

در ضابطه یک سهمی به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، به عدد ثابت c ، عرض از مبدأ سهمی می‌گوییم. به عبارت دیگر، عرض از مبدأ سهمی، محل برخورد نمودار یک سهمی با محور y ها است.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=0} f(0) = c = \text{عرض از مبدأ سهمی}$$

به عنوان مثال، در تابع درجه دوم $f(x) = 3x^2 + x - 1$ ، عرض از مبدأ آن برابر (-1) است چرا که اگر به جای تمامی x ها، $x = 0$ را قرار دهیم، $f(0) = -1$ خواهد بود.

رأس سهمی

رأس یک سهمی در واقع بالاترین نقطه یا پایین‌ترین نقطه از یک سهمی است که با توجه به علامت ضریب x^2 در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌توان گفت که اگر $a > 0$ باشد، رأس سهمی، پایین‌ترین نقطه و اگر $a < 0$ باشد، رأس سهمی، بالاترین نقطه آن است. ببینید:

$a < 0$



$a > 0$



خب! مگر رأس سهمی به نقطه نیست؟ بله! پس باید طول و عرض داشته باشه، حالا می‌خوایم طول و عرض رأس یک سهمی رو توی نمایش‌های مختلف ضابطه به سهمی پیدا کنیم. جدول رو درناب...

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$x_S = h$$

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$x_S = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

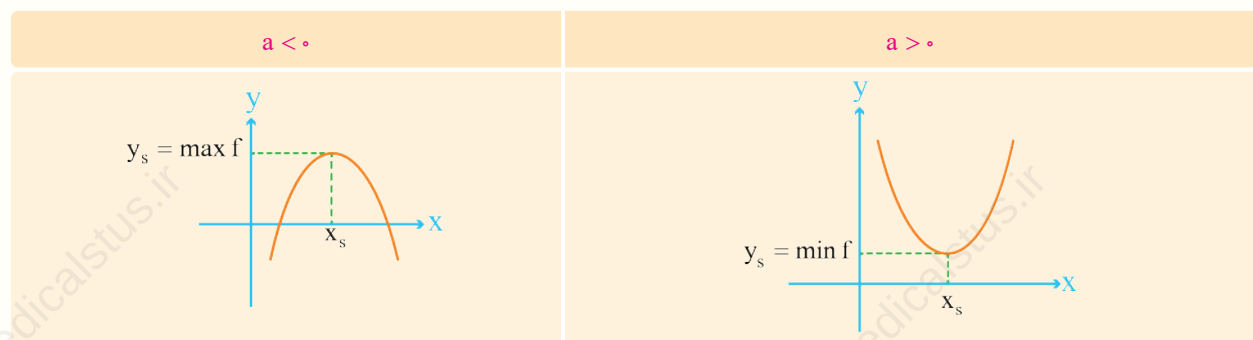
$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

طول رأس



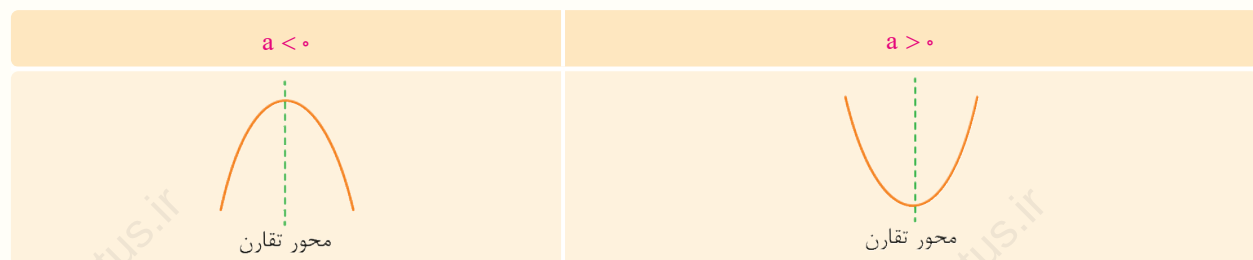
$y_S = k$	$y_S = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$	$y_S = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$	عرض رأس
-----------	--	--	---------

توجه کنید که منظور از بیش ترین مقدار (max) و یا کم ترین مقدار (min) یک سهمی، همان عرض رأس سهمی (y_S) است که با توجه به علامت a در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم:



محور تقارن (خط تقارن) سهمی

محور تقارن سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ در واقع خط عمودی است که با محور y موازی بوده و از رأس سهمی عبور می کند



می دانیم که محور تقارن به سهمی از رأس سهمی عبور می کند، پس می توانیم بگوییم که معادله محور تقارن به سهمی در واقع همون طول رأس سهمی رو نشون میده که اون رو برای نمایش های مختلف ضابطه به سهمی توی جدول زیر براتون آماده کردیم.

$f(x) = a(x-h)^2 + k$	$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$	$f(x) = ax^2 + bx + c$	معادله محور تقارن
$x_S = h$	$x_S = \frac{\alpha + \beta}{2}$	$x_S = -\frac{b}{2a}$	

به عنوان مثال، محور تقارن سهمی $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ به صورت $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$ و محور تقارن سهمی $f(x) = -(x-3)^2 + 1$ به صورت $x_S = h = 3$ است.

نکته می دانیم که یک سهمی نسبت به محور تقارن خود، متقارن است. بنابراین اگر نقطه $A(\alpha, k)$ روی سهمی قرار داشته باشد، نقطه $B(\beta, k)$ نیز قطعاً روی سهمی است و در این حالت، معادله محور تقارن سهمی به صورت $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ است. به بیان دیگر، اگر خط افقی $y = k$ سهمی را در دو نقطه به طول های α و β قطع کند، معادله محور تقارن سهمی برابر $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ بوده که همان طول رأس سهمی است. ببینید:

به عنوان مثال، اگر نقاط $A(-1, 3)$ و $B(5, 3)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله محور تقارن این سهمی برابر است با:

$$\begin{cases} x_A = \alpha = -1 \\ x_B = \beta = 5 \end{cases} \Rightarrow x_S = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \text{معادله محور تقارن } x_S = 2$$



تابع درجه دوم (اسهمی)

وضعیت دو منحنی نسبت به هم	گذشتن از نواحی	تشخیص علامت پارامترهای a, b, c و Δ	نوشتن معادله سهمی	صفرهای تابع درجه دوم	مسائل کاربردی بیشترین مقدار و کمترین مقدار
------------------------------	-------------------	--	----------------------	-------------------------	---

مسائل کاربردی بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع درجه دوم

تا به اینجای داستان با مسائلی روبه‌رو بودیم که در آن‌ها معادله یا نمودار یک تابع درجه دوم را به ما می‌دادند و از ما می‌خواستند که بیشترین مقدار و یا کمترین مقدار آن را به دست بیاوریم، اما در بعضی از سوال‌ها ابتدا باید به کمک اطلاعات موجود در مسئله، تابع درجه دوم را به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ تشکیل داده و سپس با استفاده از رابطه $y_s = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$ ، بیشترین مقدار و یا کمترین مقدار آن را به دست بیاوریم.



اگر مجموع دو متغیر مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آن‌ها زمانی **ماکزیمم** است که آن دو متغیر با هم برابر باشند، به عبارت دیگر:

$$x + y = k \xrightarrow{x=y=\frac{k}{2}} (xy)_{\max} = \frac{k}{2} \times \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4}$$

اگر حاصل ضرب دو متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع این دو متغیر زمانی **مینیمم** است که آن دو متغیر با هم برابر باشند. به عبارت دیگر:

$$xy = k \xrightarrow{x=y=\sqrt{k}} (x+y)_{\min} = \sqrt{k} + \sqrt{k} = 2\sqrt{k}$$

صفرهای تابع درجه دوم

به نقاط برخورد نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ با محور x ‌ها، صفرهای تابع درجه دوم می‌گوییم که در واقع همان ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. به عبارت دیگر در این نقاط، مقدار تابع برابر صفر است.

حال برای اینکه وضعیت نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نسبت به محور x ‌ها را بررسی کنیم باید به سراغ **دلتای معادله سهمی** و همچنین **جهت دهانه سهمی** برویم. (جدول‌ها رو درناب...)

$a > 0$		
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
- تابع درجه دوم محور x‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند. - معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد.	- تابع درجه دوم بالای محور x‌ها و بر آن مماس است. - معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.	- تابع درجه دوم محور x‌ها را قطع نمی‌کند. - تابع درجه دوم همواره بالای محور x‌ها است. - تابع درجه دوم همواره مثبت است. - معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد.

توجه! با توجه به جدول فوق می‌توان نتیجه گرفت شرط اینکه عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد این است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.



$a < 0$		
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
- تابع درجه دوم محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. - معادله درجه دوم دو ریشه ساده دارد.	- تابع درجه دوم پایین محور x ها و بر آن مماس است. - معادله درجه دوم یک ریشه مضاعف $x = -\frac{b}{2a}$ دارد.	- تابع درجه دوم محور x ها را قطع نمی کند. - تابع درجه دوم همواره پایین محور x ها است. - تابع درجه دوم همواره منفی است. - معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد.

توجه: با توجه به جدول فوق می توان نتیجه گرفت شرط اینکه عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره منفی باشد این است که $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

نوشتن معادله سهمی

برای نوشتن معادله یک سهمی با توجه به اطلاعات سؤال و همچنین مختصات نقاط داده شده می توان به چند روش عمل کرد که در ادامه آن ها را مورد بررسی قرار می دهیم:

الف) مختصات سه نقطه از سهمی معلوم باشد:

اگر مختصات سه نقطه از سهمی را داشته باشیم ابتدا معادله سهمی را به فرم $y = ax^2 + bx + c$ در نظر گرفته و سه نقطه داده شده را در آن جایگذاری می کنیم و سپس دستگاه سه معادله - سه مجهول به دست آمده را حل کرده و ضرایب مجهول a ، b و c را محاسبه می کنیم و در نهایت به کمک این ضرایب، معادله سهمی را تشکیل می دهیم.

ب) مختصات رأس سهمی و یک نقطه دیگر از سهمی معلوم باشد:

اگر مختصات رأس سهمی به صورت $S(\alpha, \beta)$ و یک نقطه دیگر از سهمی معلوم باشد معادله سهمی را به فرم $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ در نظر می گیریم و برای به دست آوردن مجهول a ، مختصات نقطه معلوم را در معادله سهمی جایگذاری می کنیم.

پ) صفرهای سهمی و یک نقطه دیگر از سهمی معلوم باشد:

اگر نمودار سهمی محور طول ها را در نقاطی به طول های α و β قطع کند ابتدا معادله سهمی را به فرم $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ در نظر می گیریم و سپس با جایگذاری مختصات نقطه معلوم در آن، مجهول a را به دست می آوریم.

ت) سهمی بر محور x ها مماس بوده و یک نقطه دیگر از سهمی معلوم باشد:

اگر نمودار سهمی در نقطه ای به طول $x = \alpha$ بر محور x ها مماس باشد معادله سهمی را به صورت $y = a(x - \alpha)^2$ در نظر می گیریم و سپس با جایگذاری مختصات نقطه معلوم، مجهول a را نیز به دست می آوریم.

تشخیص علامت پارامترهای a ، b ، c و Δ

اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$; $(a \neq 0)$ را در اختیار داشته باشیم، به کمک آن می توانیم علامت ضرایب a ، b و c و همچنین علامت Δ را مشخص کنیم.

■ **علامت a :** علامت a را از روی جهت دهانه سهمی مشخص می کنیم به این صورت که اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد $a > 0$ و اگر دهانه سهمی رو به پایین باشد $a < 0$ است.

$a < 0$	$a > 0$



فصل اول : مباحث پایه (تابع درجه دوم)

■ **علامت b:** برای تشخیص علامت b، به دو روش زیر می توانیم عمل کنیم:

روش اول: ابتدا با توجه به اینکه طول رأس سهمی در کدام سمت محور yها قرار دارد، علامت طول رأس سهمی $(x_s = \frac{-b}{2a})$ را به دست می آوریم و سپس به کمک علامت a، علامت b را مشخص می کنیم.

توجه کنید که اگر طول رأس سهمی در سمت راست محور yها باشد $x_s = -\frac{b}{2a} > 0$ ، و اگر در سمت چپ محور yها باشد $x_s = -\frac{b}{2a} < 0$ است.

روش دوم: در این روش علامت b را می توان به کمک وضعیت یکنوایی تابع در نقطه برخورد با محور yها مشخص کرد به این صورت که اگر نمودار تابع در نقطه برخورد با محور yها، **صعودی** باشد علامت b **مثبت** است و اگر در نقطه برخورد با محور yها نمودار تابع **نزولی** باشد، علامت b **منفی** است. (توجه کنید که اگر در نقطه برخورد نمودار با محور yها وضعیت یکنوایی تابع تغییر کند $b = 0$ است)

وضعیت یکنوایی در نقطه برخورد	صعودی	نزولی	تغییر می کند
وضعیت نمودار			
	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$
علامت b			

■ **علامت c:** علامت c را از روی عرض از مبدأ سهمی مشخص می کنیم به این صورت که اگر نمودار سهمی محور عرض ها را بالای محور xها قطع کند $c > 0$ و اگر محور عرض ها را پایین محور xها قطع کند $c < 0$ است. توجه کنید که اگر نمودار سهمی از مبدأ مختصات عبور کند $c = 0$ است. نمونه های زیر را ببینید:

$c = 0$	$c < 0$	$c > 0$

■ **علامت Δ:** علامت Δ را از روی وضعیت نمودار سهمی با محور xها مشخص می کنیم به این صورت که اگر نمودار سهمی محور xها را در دو نقطه قطع کند $\Delta > 0$ ، اگر نمودار سهمی بر محور xها مماس باشد $\Delta = 0$ و اگر نمودار سهمی هیچ برخوردی با محور xها نداشته باشد $\Delta < 0$ است.

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$

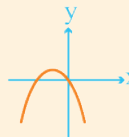
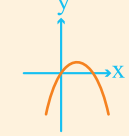
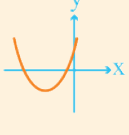
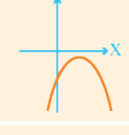
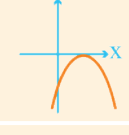
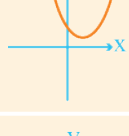
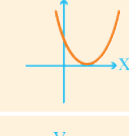
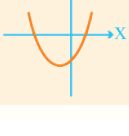
گذشتن از نواحی

گذشتن یا نگذشتن! مسئله این است...

در برخی از سؤالات تابع درجه دوم از ما می خواهند که حدود یک متغیر (مانند m) را طوری تعیین کنیم که نمودار تابع از یک ناحیه خاص عبور نکند یا اینکه از چند ناحیه خاص عبور کند. در این گونه از سؤال ها ابتدا باید به کمک اطلاعات مسئله نمودار سهمی را به صورت تقریبی رسم کنیم و سپس به کمک نمودار رسم شده سؤال را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم. توجه کنید که با رسم تقریبی نمودار علاوه بر بحث در مورد عبور نمودار سهمی از نواحی مختلف، می توان در مورد علامت ریشه ها نیز اظهار نظر کرد.

جدول بعدی بهمون کمک می کنه که سؤال های این قسمت رو بهتر حل کنیم فقط یادت باشه که حفظش نکن...



شرایط	رسم تقریبی نمودار	توضیحات
$a < 0$ $b < 0$ $c \leq 0$ $\Delta > 0$	 	سهمی فقط از ناحیه اول عبور نکند.
$a < 0$ $b > 0$ $c \leq 0$ $\Delta > 0$	 	سهمی فقط از ناحیه دوم عبور نکند.
$a > 0$ $b < 0$ $c \geq 0$ $\Delta > 0$	 	سهمی فقط از ناحیه سوم عبور نکند.
$a > 0$ $b > 0$ $c \geq 0$ $\Delta > 0$	 	سهمی فقط از ناحیه چهارم عبور نکند.
$a < 0$ $\Delta \leq 0$	 	سهمی از نواحی اول و دوم عبور نکند. (سهمی فقط از نواحی سوم و چهارم عبور کند)
$a > 0$ $\Delta \leq 0$	 	سهمی از نواحی سوم و چهارم عبور نکند. (سهمی فقط از نواحی اول و دوم عبور کند)
$\frac{c}{a} < 0$	 	سهمی از هر چهار ناحیه عبور کند.

وضعیت دو منحنی نسبت به هم

دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در نظر بگیرید، اگر بخواهیم وضعیت دو منحنی را نسبت به هم بررسی کنیم، مراحل زیر را انجام می دهیم.

ابتدا معادله $f(x) = g(x)$ را تشکیل می دهیم. (به این معادله، معادله تلاقی یا معادله برخورد دو منحنی می گوئیم)

سپس معادله تلاقی دو منحنی را به فرم $f(x) - g(x) = 0$ نوشته و آن را حل می کنیم. جواب های این معادله، طول نقطه (یا نقاط) برخورد نمودارهای توابع $f(x)$ و $g(x)$ هستند.

توجه کنید که اگر معادله $f(x) - g(x) = 0$ ، یک معادله درجه دوم باشد، با توجه به دلتا (Δ) می توان به نتایج زیر رسید:

$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	دلتای معادله تقاطع
			وضعیت نمودارها
توابع f و g همدیگر را قطع نمی کنند. معادله تقاطع ریشه حقیقی ندارد.	توابع f و g بر هم مماس اند. معادله تقاطع یک ریشه مضاعف دارد.	توابع f و g همدیگر را در دو نقطه قطع می کنند. معادله تقاطع دو ریشه ساده دارد.	توضیحات



معادلات گویا

کاربرد معادله های گویا

نسبت طلایی

معرفی و روش حل

معرفی و روش حل

به معادله های شامل عبارت های کسری که صورت و مخرج آن ها چند جمله ای باشد، معادله های گویا می گوئیم، به عنوان مثال معادله های زیر نمونه ای از معادلات گویا هستند.

$$\bullet \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$$

$$\bullet \frac{x^2+5}{x^2+1} + \frac{5}{x^2+2} = 2$$

آقا! بله؛ به معادله گویا رو چطوری باید حلش کنیم؟

برای حل معادله های شامل عبارت های گویا مراحل زیر را انجام می دهیم:

ابتدا مخرج هر یک از کسرها را (در صورت لزوم) به عامل های اول تجزیه می کنیم. (چند جمله ای)

طرفین معادله را در کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج کسرها ضرب می کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود.

عبارت جبری به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و معادله حاصل شده (معمولاً درجه ۲) را حل می کنیم.

در نهایت جواب های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می کنیم.

توجه کنید که جواب های به دست آمده زمانی قابل قبول خواهند بود که اولاً مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نکنند و ثانیاً این جواب ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت داشته باشند (قسمت دوم رو متوجه نشدم! یعنی اینکه مثلاً اگر قراره با حل به معادله طول یک شکل رو محاسبه کنیم، اندازه این طول رو منفی به دست نیاریم)

توجه اگر بخواهیم ک.م.م چند عبارت را به دست بیاوریم، ابتدا همه عبارت ها را به عامل های اول تجزیه می کنیم و سپس تمامی عامل های مشترک

با توان بیشتر و همچنین تمامی عامل های غیر مشترک را شناسایی کرده و در هم ضرب می کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم ک.م.م عبارت های (x^2-4) ، $(2x-4)$ و (x^2+x-6) را به دست بیاوریم، داریم:

$$\begin{cases} x^2+x-6=(x-2)(x+3) \\ 2x-4=2(x-2) \\ x^2-4=(x-2)(x+2) \end{cases} \rightarrow \text{ک.م.م} = (x-2) \times [2(x+3)(x+2)]$$

عوامل غیر مشترک عامل مشترک

نکته اگر در طرفین یک معادله گویا به فرم $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$ ، عبارت های یکسانی داشته باشیم چگونه می توانیم آن ها را با هم حذف کنیم؛ توجه کنید که:

اگر در طرفین معادله، عبارت های یکسان در مخرج کسرها باشند، بدون هیچ محدودیتی می توانیم آن ها را با هم ساده کنیم. فقط باید دقت کنیم که ریشه این عبارت غیر قابل قبول است. (چون مخرج رو صفر می کنه)

مثال: $\frac{2x}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{(x-2)(x+3)} \rightarrow \frac{2x}{x-1} = \frac{x+1}{x-2}$

اگر در طرفین معادله، عبارت های یکسان در صورت کسرها باشند، به شرطی می توانیم آن ها را با هم ساده کنیم که ریشه آن عبارت را به عنوان یکی از ریشه های معادله در نظر بگیریم (فقط باید دقت کنیم که این ریشه، مخرج هیچ کسری رو صفر نکنه)

مثال: $\frac{(2x-4)(x-3)}{x+1} = \frac{(x+1)(x-3)}{2x-4} \rightarrow \frac{2x-4}{x+1} = \frac{x+1}{2x-4} \rightarrow (2x-4)^2 = (x+1)^2$

$$\rightarrow 4x^2 - 16x + 16 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \checkmark \\ x=\frac{15}{3}=5 \checkmark \end{cases}$$

همان طور که گفتیم، باید ریشه عبارت $(x-3)$ را نیز به عنوان یکی از ریشه های معادله اعلام کنیم بنابراین ریشه های این معادله عبارتند از: $x=1$ ، $x=5$ و $x=3$

اگر عبارت های یکسان در صورت و مخرج یک کسر باشند، بدون هیچ نگرانی می توانیم آن ها را با هم ساده کنیم. فقط باید دقت کنیم که ریشه این عبارت غیر قابل قبول است. (چون مخرج رو صفر می کنه).

مثال: $\frac{(4-x)(3x+4)}{x(4-x)} = \frac{2x}{x-2} \rightarrow \frac{3x+4}{x} = \frac{2x}{x-2} \rightarrow 3x^2 - 6x + 4x - 8 = 2x^2 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \checkmark \\ x=4 \text{ غلط} \end{cases}$

توجه کنید که چون $x=4$ در معادله اصلی مخرج کسر سمت چپ را صفر می کند بنابراین غیر قابل قبول است.



نسبت طلایی

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y ، رابطه زیر برقرار باشد در این صورت به آن مستطیل، مستطیل طلایی و به نسبت $\frac{x}{y}$ ، نسبت طلایی می‌گوییم.

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

حال اگر در معادله فوق $y = 1$ فرض کنیم، داریم:

$$x = \frac{x+1}{x} \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

غریب (طول که نمی‌تونه منفی باشه)

توجه داشته باشید که عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، به عدد طلایی معروف است و مقدار تقریبی آن برابر $1/618$ می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت که در یک مستطیل طلایی، نسبت طول به عرض آن برابر $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

کاربرد معادله‌های گویا

برای حل کردن برخی از مسئله‌ها ابتدا باید با استفاده از اطلاعات موجود در سؤال روابط و معادله‌های مربوط به آن را بنویسیم که در بعضی از این موارد معادله‌هایی که حاصل می‌شوند، معادلات گویا هستند که مهم‌ترین این مسائل عبارتند از:

الف) مسائل مربوط به موازی‌کاری:

اگر شخص A کاری را به تنهایی در x روز (ساعت) و شخص B همان کار را به تنهایی در y روز (ساعت) انجام دهند، در این صورت:

شخص A به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{1}{x}$ از کل کار را انجام می‌دهد.

شخص B به تنهایی در هر روز (ساعت)، $\frac{1}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهد.

اگر شخص A و شخص B هر دو با هم کار کنند در هر روز (ساعت)، $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ از کل کار را انجام می‌دهند.

ب) مسائل مربوط به سرعت:

برای حل این تیپ از مسئله‌ها باید به موارد زیر توجه کرد:

اگر متحرکی با سرعت ثابت v ، مسیری به طول x را در مدت زمان t طی کند در این صورت:

$$v = \frac{x}{t} \rightarrow \begin{cases} x = vt \\ t = \frac{x}{v} \end{cases}$$

اگر متحرکی مسافت x را با سرعت ثابت v_1 و در مدت زمان t_1 طی کند و همان مسیر را با سرعت ثابت v_2 و در مدت زمان t_2 برگردد، در این صورت:

$$t_2 - t_1 = \frac{x}{v_2} - \frac{x}{v_1} = \frac{xv_1 - xv_2}{v_1v_2} = \frac{x(v_1 - v_2)}{v_1v_2}$$

ج) مسائل مربوط به غلظت:

برای حل این مسائل بهتر است نکته‌های زیر را از درس شیمی به خاطر داشته باشیم:

غلظت یک محلول از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{جرم حل‌شونده} = \text{غلظت یک محلول} \times \text{جرم محلول}$$

اگر x گرم از یک ماده با غلظت m و y گرم از ماده دیگر با غلظت n را با هم مخلوط کنیم، غلظت مخلوط برابر است با:

$$\text{غلظت مخلوط} = \frac{xm + yn}{x + y}$$



معادله ها و نامعادله های رادیکالی

نامعادله های رادیکالی (گنگ)

معادله های رادیکالی (گنگ)

معادله های رادیکالی (گنگ)

به معادله هایی که در آن ها مجهول (متغیر) زیر رادیکال قرار داشته باشد، معادله های رادیکالی (گنگ) می گوئیم.
به عنوان مثال معادله های زیر چند نمونه از معادلات رادیکالی هستند.

• $\sqrt{x+2} = x-4$

• $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$

• $\frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

حال سؤال اینجاست که به معادله رادیکالی رو چطوری باید حلش کنیم...

برای حل یک معادله رادیکالی باید مراحل زیر را طی کنیم:

۱ یکی از رادیکال ها را در یک طرف معادله نگه می داریم و مابقی جمله ها را به طرف دیگر معادله منتقل می کنیم.

۲ طرفین معادله را به توان مناسب می رسانیم (معمولاً طرفین را به توان ۲ می رسانیم)

(توجه داشته باشید که اگر با به توان رساندن طرفین معادله، مجدداً در معادله عبارت رادیکالی حضور داشته باشد سعی می کنیم که با تکرار مراحل ۱ و ۲، کل معادله را از حالت رادیکالی خارج کنیم)

۳ معادله به دست آمده را تا حد امکان ساده کرده و آن را حل می کنیم و جواب (یا جواب های) معادله را به دست می آوریم.

۴ جواب (های) به دست آمده را در معادله اصلی آزمایش می کنیم و جواب هایی را قبول می کنیم که **اولاً** در دامنه تعریف متغیر معادله قرار داشته باشند و **ثانیاً** در معادله اصلی صدق کنند.

نکته برای حل برخی از معادله های رادیکالی می توان از ویژگی های زیر استفاده کرد:

اگر $f(x) \times g(x) = 0$ باشد، آن گاه $f(x) = 0$ یا $g(x) = 0$ است.

$$(x-1)\sqrt{4-x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ \sqrt{4-x^2}=0 \rightarrow 4-x^2=0 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

مثال:

مجموع چند عبارت نامنفی زمانی برابر صفر است که به ازای **x مشترک** هر کدام از آن عبارت ها برابر صفر باشند.

مثال: معادله $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+3x+2} = 0$ را حل کنید.

می دانیم که مجموع چند عبارت نامنفی زمانی می تواند برابر صفر باشد که هر کدام از آن عبارت ها (به ازای x مشترک) برابر صفر باشند. بنابراین هر کدام از عبارت ها را برابر صفر قرار می دهیم تا x مشترک پیدا شود.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x-2} = 0 &\rightarrow x^2+x-2=0 \rightarrow (x-1)(x+2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \\ \sqrt{x^2+3x+2} = 0 &\rightarrow x^2+3x+2=0 \rightarrow (x+1)(x+2)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین $x = -2$ ، ریشه مشترک هر یک از عبارت ها می باشد که به ازای آن معادله اصلی نیز برقرار است بنابراین معادله داده شده تنها یک ریشه دارد.

مجموع چند عبارت **همواره مثبت**، هیچ گاه برابر صفر و یا عددی منفی نمی شود. به عنوان مثال معادله های زیر جواب حقیقی ندارند. (خُب معلومه دیگه! جمع چند تا عدد مثبت نه صفر میشه نه منفی)

• $|x^2+2x| + \sqrt{x-4} + 2 \neq 0$
• $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+1} + 1 \neq 0$

برای حل بعضی از معادله های رادیکالی می توئیم از فاکتورگیری، تجزیه، مخرج مشترک گیری و ... هم استفاده کنیم.

نکته برای حل بعضی از معادله های رادیکالی می توانیم از روش هندسی (روش رسم نمودار) استفاده کنیم. برای حل این نوع از معادله ها، اگر خواسته سؤال درباره تعداد جواب ها، محل تقریبی جواب ها و یا علامت جواب ها باشد می توانیم به روش زیر عمل کنیم:

ابتدا معادله داده شده را به فرم $f(x) = g(x)$ تبدیل می کنیم (طوری اجزای معادله اصلی رو در دو طرف تساوی قرار می دیم که بتوئیم نمودار توابع f و g رو رسم کنیم)



سپس نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و نقاط برخورد آن‌ها را مشخص می‌کنیم. تعداد نقاط برخورد دو نمودار، تعداد جواب‌های معادله را مشخص می‌کند.

نامعادله‌های رادیکالی

برای حل نامعادله‌های رادیکالی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

ابتدا حدود متغیر نامعادله (همون دامنه نامعادله) را به دست می‌آوریم.

سپس نامعادله داده شده را با به توان رساندن طرفین آن حل کرده و مجموعه جواب آن را به دست می‌آوریم.

در نهایت بین مجموعه جواب به دست آمده و دامنه نامعادله **اشتراک** می‌گیریم.

توجه داشته باشید که در فرایند به توان رساندن طرفین نامعادله، علامت عبارت‌های دو طرف آن بسیار مهم است چرا که می‌تواند هنگام به توان رساندن جهت نامساوی را تغییر دهد. ببینید...

$a > b \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{a, b > 0} a^{2n} > b^{2n}$	اگر طرفین یک نامساوی مثبت باشند و بخواهیم دو طرف آن را به توان عدد طبیعی زوج برسانیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.
$a > b \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{a, b < 0} a^{2n} < b^{2n}$	اگر طرفین یک نامساوی منفی باشند و بخواهیم دو طرف آن را به توان عدد طبیعی زوج برسانیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.
$a > b \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a^{2n+1} > b^{2n+1}$	اگر بخواهیم دو طرف یک نامساوی را (بدون توجه به علامت طرفین آن) به توان عدد طبیعی فرد برسانیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.



تعیین علامت

تعیین علامت تابع
هموگرافیک

روش سریع
تعیین علامت

تعیین علامت یک عبارت در
حالت کلی

تعیین علامت تابع
درجه دوم (خطی)

تعیین علامت تابع
درجه اول (خطی)

منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری مانند $P(x)$ این است که مشخص کنیم آن عبارت به ازای چه مقادیری از x می تواند مثبت، صفر و یا تعریف نشده باشد.

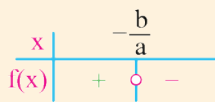
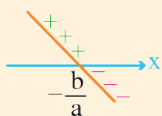
حالا می خواهیم تعیین علامت چند تا تابع مهم رو با هم بررسی کنیم...

تعیین علامت تابع درجه اول (خطی)

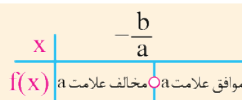
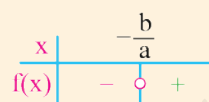
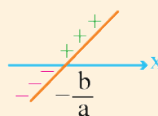
برای تعیین علامت یک تابع درجه اول به فرم $f(x) = ax + b$; $(a \neq 0)$ ، ابتدا ریشه عبارت $f(x) = 0$ را به دست می آوریم و سپس با توجه به علامت a ، جدول تعیین علامت آن را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$f(x) = ax + b ; (a \neq 0)$$

$$a < 0$$



$$a > 0$$



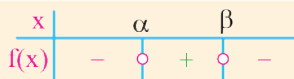
تعیین علامت تابع درجه دوم

برای تعیین علامت یک تابع درجه دوم به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ ، ابتدا ریشه(های) عبارت $f(x) = 0$ را در صورت وجود به دست می آوریم. حال با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

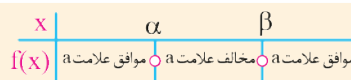
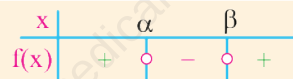
حالت اول: اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ دو ریشه متمایز به صورت α و β خواهد داشت ($\alpha < \beta$) و جدول تعیین علامت آن (با توجه به علامت a) به صورت زیر است:

$$\Delta > 0$$

$$a < 0$$



$$a > 0$$



حالت دوم: اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ یک ریشه مضاعف به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ خواهد داشت و جدول تعیین علامت آن (با توجه به علامت a) به صورت زیر است:



$\Delta = 0$	
$a < 0$	$a > 0$

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله $f(x) = 0$ ریشه حقیقی ندارد و جدول تعیین علامت آن (با توجه به علامت a) به صورت زیر است:

$\Delta < 0$	
$a < 0$	$a > 0$

همان طور که از حالت سوم هم مشخص است:

- ✓ اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد، عبارت درجه دوم، همواره مثبت است.
- ✓ اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد، عبارت درجه دوم، همواره منفی است.

تعیین علامت یک عبارت در حالت کلی

برای تعیین علامت عبارتهایی که از ضرب و یا تقسیم چند عبارت تشکیل شده‌اند به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ۱ ابتدا ریشه (یا ریشه‌های) هر یک از عبارت‌ها را (در صورت وجود) پیدا می‌کنیم.
 - ۲ یک جدول چند سطری می‌کشیم و ریشه‌های به دست آمده را از کوچک به بزرگ در سطر اول این جدول قرار می‌دهیم.
 - ۳ برای هر یک از عبارت‌ها یک سطر اختصاص می‌دهیم و ریشه‌های (های) هر عبارت در سطر خود با نماد $(\circ)$ مشخص می‌کنیم و سپس هر کدام را در سطر مربوط به خود تعیین علامت می‌کنیم.
 - ۴ پس از تعیین علامت همه عبارت‌ها، علامت‌های هر ستون را در هم ضرب کرده و در سطر آخر که مربوط به کل عبارت می‌باشد، قرار می‌دهیم.
- راحت بود، نه؟ (🍷) حالا چند تا مورد داریم که باید بهش توجه ویژه داشته باشی...
- ✓ اگر عبارت داده شده کسری باشد، باید در سطر آخر جدول تعیین علامت، برای ریشه‌های صورت کسر از علامت $(\circ)$ و برای ریشه‌های مخرج کسر از علامت $(\parallel)$ یا (تن) اهر دو به معنی تعریف نشده، استفاده کنیم.
 - ✓ توان فرد و فرجه فرد برای یک عبارت در تعیین علامت تأثیری ندارند به عبارت دیگر برای تعیین علامت عبارت‌های $f(x)$ و $\sqrt[n]{f(x)}$ فقط کافی است که عبارت $f(x)$ را تعیین علامت کنیم.
 - ✓ عبارت‌های زوج $f(x)$ و $|f(x)|$ ، همواره نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) هستند بنابراین در سطر مربوط به آن‌ها در جدول تعیین علامت همواره علامت مثبت قرار می‌دهیم.



فصل اول : مباحث پایه (تعیین علامت)

عبارت $\sqrt[n]{f(x)}$ در دامنه تعریف خود همواره نامنفی (بزرگ تر یا مساوی صفر) است و برای تعیین علامت آن ابتدا دامنه تعریف این عبارت را پیدا می کنیم و سپس در سطر مربوط به آن، در ناحیه هایی که در دامنه این عبارت قرار دارند از علامت مثبت و در ناحیه هایی که در دامنه آن قرار ندارند، از نماد (ت.ن) استفاده می کنیم.

روش سریع تعیین علامت

برای تعیین علامت یک عبارت به روش سریع، به روش زیر عمل می کنیم:

۱ ابتدا به کمک موارد زیر ظاهر عبارت را تغییر می دهیم:

عبارت های همواره مثبت را از عبارت حذف می کنیم، چرا که این عبارت ها در تعیین علامت بی تاثیر هستند به عنوان مثال، عبارت های $(\sqrt{x} + 1)$ ، $(|x| + 2)$ ، $(x^2 - x + 2)$ ، ... همواره مثبت هستند و در تعیین علامت نقشی ندارند.

عبارت های همواره منفی را از عبارت حذف کرده و به جای آن ها یک علامت منفی در عبارت ضرب می کنیم.

عبارت های $\sqrt[n]{f(x)}$ و $f(x)$ را حذف کرده و به جای آن ها عبارت $f(x)$ را قرار می دهیم چرا که می دانیم توان فرد و فرجه فرد عبارت $f(x)$ در تعیین علامت تاثیری ندارند و به جای آن ها می توان عبارت $f(x)$ را تعیین علامت کرد.

عبارت $\sqrt[n]{f(x)}$ را حذف می کنیم ولی دامنه آن را در جدول تاثیر می دهیم (این مورد خیلی مهمه! یادت باشه که دامنه اون رو قوی جدول تاثیر بدی)

۲ حال تمامی عبارت هایی که باقی مانده اند را به کمک اتحادها، فاکتورگیری و ... تجزیه می کنیم.

۳ ریشه هر یک از عبارت ها را به دست آورده و آن ها را در یک جدول تعیین علامت دوسطری (از کوچک به بزرگ) قرار می دهیم.

۴ اگر عبارت صورت سوال کسری باشد، در سطر دوم جدول تعیین علامت، برای ریشه های صورت از علامت () و برای ریشه های مخرج کسر از علامت () یا (ت.ن) استفاده می کنیم.

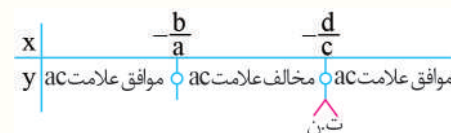
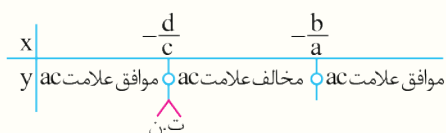
۵ یکی از نواحی سطر دوم را انتخاب می کنیم (به دلخواه) و با عددگذاری علامت آن ناحیه را مشخص می کنیم.

۶ بین نواحی حرکت کرده و علامت ها را بین ریشه ها یکی در میان عوض می کنیم مگر اینکه ریشه موردنظر مربوط به یکی از موارد زیر باشد که در این صورت علامت را تغییر نمی دهیم. (یعنی در دو طرف این ریشه ها علامت یکسان است).

ریشه مضاعف ریشه عبارت داخل قدرمطلق ریشه عبارت با توان زوج

تعیین علامت تابع هموگرافیک

تعیین علامت یک تابع هموگرافیک به فرم $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; $(ac \neq 0)$ ، با تعیین علامت، تابع درجه دوم $y = (ax+b)(cx+d)$ برابر است و به یکی از دو صورت زیر به دست می آید:



فقط باید دقت کنیم که تابع $f(x)$ در ریشه مخرج خود (یعنی $x = -\frac{d}{c}$) تعریف نمی شود.



نامعادله

وضعیت نمودار دو تابع نسبت به هم

نامعادله‌های دوگانه

روش کلی حل نامعادله‌ها

نامعادله‌های هموگرافیک

نامعادله درجه اول

خواص نامعادله‌ها

خواص نامعادله‌ها

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شوند، به صورت زیر است:

$f(x) < g(x)$	$f(x)$ کوچک‌تر از $g(x)$ است.
$f(x) \leq g(x)$	$f(x)$ کوچک‌تر یا مساوی $g(x)$ است.
$f(x) > g(x)$	$f(x)$ بزرگ‌تر از $g(x)$ است.
$f(x) \geq g(x)$	$f(x)$ بزرگ‌تر یا مساوی $g(x)$ است.

حالا بیایم چند تا از خواص نامعادله‌ها رو با هم ببینیم که توی حل نامعادله‌ها خیلی به کارمون میان...

$a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$	اگر بخواهیم دو طرف یک نامعادله را با عدد ثابت c جمع یا تفریق کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.	جمع و تفریق
$a > b \xrightarrow[c \neq 0]{c > 0} ac > bc$ $a > b \xrightarrow[c \neq 0]{c < 0} \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	اگر بخواهیم دو طرف یک نامعادله را در عدد مثبت و غیر صفر c ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.	ضرب و تقسیم
$a > b \xrightarrow[c \neq 0]{c < 0} ac < bc$ $a > b \xrightarrow[c \neq 0]{c < 0} \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	اگر بخواهیم دو طرف یک نامعادله را در عدد منفی و غیر صفر c ضرب و یا بر آن تقسیم کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.	ضرب و تقسیم
$a > b \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{a, b < 0} a^{2n} < b^{2n}$	اگر طرفین یک نامعادله، منفی باشد و بخواهیم دو طرف آن را به توان عدد طبیعی زوج برسانیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.	توان زوج
$a > b \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{a, b > 0} a^{2n} > b^{2n}$	اگر طرفین یک نامعادله، مثبت باشد و بخواهیم دو طرف آن را به توان عدد طبیعی زوج برسانیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.	توان زوج
$a > b \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} a^{2n+1} > b^{2n+1}$	اگر بخواهیم دو طرف یک نامعادله را (بدون توجه به علامت طرفین آن) به توان عدد طبیعی فرد برسانیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.	توان فرد
$a > b \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{a, b > 0} \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$	اگر بخواهیم از دو طرف یک نامعادله فرجه زوج بگیریم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند (توجه کنید که تنها در صورتی می‌توان از طرفین یک نامعادله فرجه زوج گرفت که هر دو طرف آن مثبت باشند)	فرجه زوج
$a > b \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n+1]{a} > \sqrt[n+1]{b}$	اگر بخواهیم از دو طرف یک نامعادله فرجه فرد بگیریم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.	فرجه فرد
$a > b \xrightarrow{ab > 0} \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	اگر طرفین یک نامعادله هم علامت باشد و بخواهیم دو طرف آن را معکوس کنیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.	معکوس کردن
$a > b \xrightarrow{ab < 0} \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	اگر طرفین یک نامعادله مختلف‌العلامت باشد و بخواهیم دو طرف آن را معکوس کنیم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.	معکوس کردن
$a > b \xrightarrow{a, b > 0} a > b $	اگر طرفین یک نامعادله مثبت باشند و بخواهیم از دو طرف آن قدر مطلق بگیریم، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.	تأثیر قدر مطلق
$a > b \xrightarrow{a, b < 0} a < b $	اگر طرفین یک نامعادله منفی باشند و بخواهیم از دو طرف آن قدر مطلق بگیریم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.	تأثیر قدر مطلق



فصل اول : مباحث پایه (نامعادله)

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \xrightarrow[b, d \neq 0]{bd > 0} ad > bc$	اگر در یک نامعادله گویا، عبارت‌های موجود در مخرج، هم علامت باشند، بدون تغییر دادن جهت نامساوی می‌توان عمل طرفین - وسطین را انجام داد.	طرفین - وسطین
$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \xrightarrow[b, d \neq 0]{bd < 0} ad < bc$	اگر در یک نامعادله گویا، عبارت‌های موجود در مخرج، مختلف‌العلامت باشند، با انجام عمل طرفین - وسطین، جهت نامساوی تغییر می‌کند.	

نامعادله درجه اول

برای حل نامعادله‌های درجه اول، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

- ابتدا تمامی مجهول‌ها را به یک سمت و تمامی اعداد ثابت را به سمت دیگر نامساوی منتقل می‌کنیم.
- عبارت‌های هر دو سمت نامساوی را تا حد امکان ساده می‌کنیم (طوری که در یک طرف نامساوی ضریب x و در طرف دیگر فقط یک عدد باقی بماند).
- طرفین نامعادله را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم.

مثال: نامعادله $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{2} < 1 - \frac{x}{2}$ را حل کنید.

حل: ابتدا همه عبارت‌هایی که مجهول x دارند رو می‌اریم سمت چپ و همه عددهای ثابت رو می‌بریم سمت راست.

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{2} + \frac{x}{2} < 1$$

حالا دو طرف نامعادله رو در عدد ۶ ضرب می‌کنیم تا نامعادله رو از حالت کسری خارج کنیم:

$$2(2x-1) - 3(x+2) + 3x < 6$$

بعد تا حد امکان نامعادله رو ساده می‌کنیم:

$$4x - 2 - 3x - 6 + 3x < 6 \Rightarrow 4x - 8 < 6 \Rightarrow 4x < 14$$

در نهایت دو طرف رو بر ضریب x تقسیم می‌کنیم:

$$4x < 14 \xrightarrow{\div 4} \frac{4x}{4} < \frac{14}{4} \Rightarrow x < \frac{7}{2}$$

نامعادلات هموگرافیک

برای حل نامعادله‌های هموگرافیک به فرم $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ ، کافیست که نامعادله درجه دوم $(ax+b)(cx+d) \geq 0$ را حل کنیم که برای حل آن، باید عبارت $f(x) = (ax+b)(cx+d)$ را تعیین علامت کرده و مجموعه جواب موردنظر را با توجه به علامت نامعادله، پیدا کنیم.

مثال: نامعادله $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم که برای حل نامعادله داده شده باید عبارت $f(x) = (4-2x)(3x+1)$ را تعیین علامت کنیم، سپس:

ac موافق ac مخالف ac موافق

$$\begin{cases} 4-2x=0 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2 \\ 3x+1=0 \rightarrow 3x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

علامت: $ac < 0$

بنابراین، مجموعه جواب نامعادله موردنظر به صورت $x \in (-\frac{1}{3}, 2]$ است.

روش کلی حل نامعادله‌ها

- برای حل یک نامعادله، در حالت کلی، مراحل زیر انجام می‌دهیم:
- ابتدا همه عبارت‌های طرفین نامعادله را به یک طرف آن منتقل می‌کنیم و در طرف دیگر آن عدد صفر را قرار می‌دهیم (معمولاً همشون رو می‌اریم به سمت چپ!).
- سپس عبارت‌ها را به کمک عملیات جبری (جمع، تفریق و ...)، مخرج مشترک گیری، فاکتورگیری، اتحاد و ... تا حد امکان ساده می‌کنیم و به یکی از حالت‌های $f(x) > 0$ ، $f(x) \geq 0$ ، $f(x) < 0$ ، یا $f(x) \leq 0$ می‌رسیم. ($f(x)$ می‌تونه به عبارت درجه اول یا درجه دوم و یا به عبارت کسری باشه)
- در نهایت، $f(x)$ را تعیین علامت کرده و با توجه به جهت نامساوی، محدوده جواب را پیدا می‌کنیم.



نامعادله‌های دو گانه

به نامعادله‌های به فرم $h(x) < f(x) < g(x)$ ، نامعادله‌های دو گانه یا مضاعف می‌گوییم و برای حل آن‌ها به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ۱ ابتدا نامعادله $h(x) < f(x)$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به دست می‌آوریم.
- ۲ سپس نامعادله $f(x) < g(x)$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را نیز به دست می‌آوریم.
- ۳ در نهایت از مجموعه جواب‌های به دست آمده در مراحل ۱ و ۲، اشتراک می‌گیریم.

اگر مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{x+4}{2x-1} < 2$ به صورت (a, b) باشد، حاصل $a - b$ کدام است؟

۴) -۷

۳) -۳

۲) ۳

۱) ۷

حل: ابتدا نامعادله داده شده را به دو نامعادله تقسیم کرده و پس از حل آن‌ها، اشتراک جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$1 < \frac{x+4}{2x-1} < 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+4}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+4}{2x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-x+5}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 5 & (A) \\ \frac{x+4}{2x-1} < 2 \Rightarrow \frac{x+4}{2x-1} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{-3x+6}{2x-1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 2 \end{cases} & (B) \end{cases}$$

حال، اگر بین مجموعه جواب‌های (A) و (B) اشتراک بگیریم، مجموعه جواب نهایی به صورت $2 < x < 5$ خواهد بود. پس:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a - b = 2 - 5 = -3$$

در نتیجه گزینه ۳ صحیح است.

نکته اگر جواب نامعادله $ax^2 + bx + c \geq 0$ به صورت $(\alpha, +\infty)$ و یا به صورت $(-\infty, \alpha)$ باشد:

باید $a = 0$ باشد.

$x = \alpha$ ریشه عبارت $bx + c = 0$ است.

وضعیت نمودار دو تابع نسبت به هم

در حل بعضی از سوالات زمانی که بخواهیم شرایط حاکم بر سوال را اجرا کنیم به یک نامعادله می‌رسیم که باید آن را حل کنیم. یک نوع از این سوال‌ها مربوط به وضعیت نمودار دو تابع f و g است که برای حل آن‌ها جدول زیر می‌تواند راه‌گشای حل مسئله باشد.

نامعادله مربوط به آن	وضعیت نمودار دو تابع f و g
$f(x) > g(x)$	نمودار تابع $f(x)$ بالای نمودار تابع $g(x)$ قرار دارد.
$f(x) < g(x)$	نمودار تابع $f(x)$ پایین نمودار تابع $g(x)$ قرار دارد.
$f(x) \leq g(x)$	نمودار تابع $f(x)$ بالای نمودار تابع $g(x)$ قرار نمی‌گیرد.
$f(x) \geq g(x)$	نمودار تابع $f(x)$ پایین نمودار تابع $g(x)$ قرار نمی‌گیرد.
$f(x) > 0$	نمودار تابع $f(x)$ بالای محور x قرار دارد.
$f(x) \geq 0$	نمودار تابع $f(x)$ بالای محور x و یا در برخورد با آن است.
$f(x) \leq 0$	نمودار تابع $f(x)$ پایین محور x و یا در برخورد با آن است.



تعریف و خواص قدرمطلق

خواص و قواعد قدرمطلق

تعریف قدرمطلق

تعریف قدرمطلق

تعریف: فاصله عدد حقیقی a تا مبدأ را قدرمطلق a می‌گوییم.

قدرمطلق جزء نامنفی‌ها است. قدرمطلق را به صورت $|a|$ در اطراف عدد یا هر عبارت ریاضی نمایش می‌دهیم.

قدرمطلق a را به صورت $|a|$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$|a| = \begin{cases} a & ; a \geq 0 \\ -a & ; a < 0 \end{cases}$$



نکته: در تست‌ها و سوالات مربوط به قدرمطلق، همواره باید سعی کنیم قدرمطلق را برداریم. برای این کار باید، علامت عبارت داخل قدرمطلق را تعیین کنیم. اگر عبارت داخل قدرمطلق شامل متغیر بود (مثل x) باید براساس ریشه‌های داخل قدرمطلق، $\mathbb{R}$ را تفکیک حدود کرده و جدول تعیین علامت تشکیل دهیم و با توجه به آن، علامت قدرمطلق را بر می‌داریم.

خواص و قواعد قدرمطلق

قواعد و خواص قدرمطلق‌ها بعداً در حل معادلات و نامعادلات قدرمطلق به کارمان می‌آید. ببینید:

۱ می‌دانیم حاصل هر رادیکال با فرجه زوج، همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. پس اگر عاملی از زیر رادیکال با فرجه زوج بخواید خارج شود و علامت مشخصی نداشته باشد، باید داخل قدرمطلق قرار بگیرد.

$$\sqrt[n]{0^{2n}} = |0|$$

$$۲ \quad |x| = |-x| \Rightarrow |0| = |-0|$$

$$۳ \quad |f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

$$۴ \quad |f(x)| = a \Rightarrow f(x) = \pm a \quad (a > 0)$$

$$۵ \quad |f(x) \times g(x)| = |f(x)| \times |g(x)|$$

$$۶ \quad \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$۷ \quad |f(x)| \leq a \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a \quad (a > 0)$$

$$۸ \quad |f(x)| \geq a \Rightarrow f(x) \geq a \text{ یا } f(x) \leq -a \quad (a > 0)$$

$$۹ \quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

$$۱۰ \quad |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \Rightarrow \begin{cases} f(x).g(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \\ f(x).g(x) < 0 \Rightarrow |f(x) + g(x)| < |f(x)| + |g(x)| \end{cases} \quad \text{نامساوی مثلثی}$$

$$۱۱ \quad |f(x) - g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)| \quad |f(x) - g(x)| \geq ||f(x)| - |g(x)||$$

$$۱۲ \quad |f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$۱۳ \quad |f(x)| + |g(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0, g(x) = 0$$

$$۱۴ \quad |f(x)^n| = |f(x)|^n$$

قواعد شماره ۱۰ و ۱۱ صرفاً جهت افزایش معلومات ذکر شده‌اند!

رسم توابع قدرمطلق

رسم نمودار $f(|x|)$

رسم نمودار $|f(x)|$

رسم تابع سرسره‌ای یا Z شکل

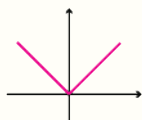
رسم تابع گلدانی

روش کلی رسم

روش کلی رسم توابع قدرمطلق

ساده‌ترین تابع قدرمطلق، تابع $y = |x|$ است و نمودار آن به صورت مقابل است:

$$y = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$



برای رسم نمودار $y = |x + a| + b$ از انتقال نمودار تابع $y = |x|$ استفاده می‌کنیم. بسته به علامت مثبت یا منفی a ، به سمت چپ یا راست و علامت مثبت یا منفی b به بالا یا پایین حرکت می‌کنیم. (در فصل تابع بیشتر در این باره خواهیم خواند)

برای رسم نمودار توابع قدرمطلق، ابتدا دامنه تعریف را که معمولاً مجموعه اعداد حقیقی است، به ازای ریشه‌های داخل قدرمطلق به قسمت‌های مختلف تقسیم می‌کنیم و در هر محدوده، علامت عبارات داخل قدرمطلق را مشخص کرده و قدرمطلق‌ها را برمی‌داریم. سپس در هر حالت ضابطه به دست آمده را در حدودش رسم می‌کنیم.

نکته روش سریع رسم نمودار توابع قدرمطلق خطی:

نمودار توابع قدرمطلق خطی $y = k|x + b| \pm p|cx + d| \pm \dots \pm n|mx + h|$ به صورت یک خط شکسته است که در ریشه‌های داخل قدرمطلق می‌شکند. برای رسم نمودار آن‌ها به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا ریشه‌های داخل قدرمطلق را به دست می‌آوریم و آن‌ها را در تابع جایگذاری می‌کنیم تا مختصات نقاط شکستگی به دست آید. در گام بعدی یک واحد بیشتر از ریشه بزرگ‌تر و یک واحد کمتر از ریشه کوچک‌تر را در نظر می‌گیریم و مقدار تابع را در این نقاط به دست می‌آوریم و در گام آخر نقاط بالا را در دستگاه مختصات مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و تمام.

نکته تیز ببین!

گاهی یک عبارت درجه دوم زیر رادیکال قرار می‌گیرد که می‌توانیم با کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، آن را ساده کرده و از زیر رادیکال خارج کنیم. در این نوع سوالات به ظاهر تابعی رادیکالی داریم اما پس از ساده کردن یک تابع قدرمطلق ایجاد می‌شود که راحت‌تر رسم می‌شود.

رسم تابع گلدانی

نمودار تابع $f(x) = |x - a| + |x - b|$ شبیه به گلدان است.

نکات زیر را در مورد تابع گلدانی به خاطر بسپاریم: (بعداً در فصل تابع بیشتر با این نکات کار می‌کنیم.)

۱ دامنه: $D_f = \mathbb{R}$ ، برد: $R_f = [a - b, +\infty)$

۲ کف گلدان در فاصله $[a, b]$ قرار گرفته و عرض کف گلدان برابر $|a - b|$ است.

۳ شیب دیواره‌های گلدان ۲ و -۲ است.

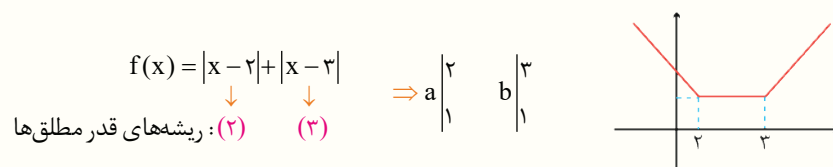
۴ خط $x = \frac{a+b}{2}$ ، محور تقارن قائم منحنی است.

۵ زیر کف گلدان تا محور x ها، مربعی به ضلع $|a - b|$ ساخته می‌شود.

در کنکور تجربی سال ۹۷، رسم نمودار $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ را لازم داشتیم.

طبق مطالب گفته شده در درسنامه فوق تابع $f(x)$ شبیه یک گلدان است. برای رسم آن کافی است ریشه هر کدام از قدرمطلق‌ها را به دست آورده و در خود تابع $f(x)$ قرار دهیم تا مختصات نقاط a ، b مشخص شود.

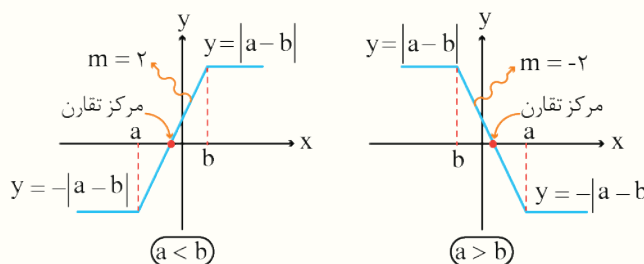
حالا می‌توانیم نمودار تابع $f(x)$ را به راحتی رسم کنیم (دقیقاً مثل رسم یک گلدان)





رسم تابع سرسره‌ای یا (z) شکل

نمودار تابع $f(x) = |x-a| - |x-b|$ شبیه به سرسره، آبشار یا حرف z است. با توجه به ریشه‌های داخل قدرمطلق (a و b) نمودار به یکی از دو صورت زیر است:



نکات زیر را در مورد تابع سرسره‌ای به خاطر بسپاریم: (بعداً در فصل تابع بیشتر با این نکات کار می‌کنیم.)

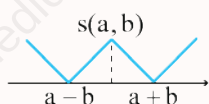
دامنه: $D_f = \mathbb{R}$ ، برد: $R_f = [-|a-b|, |a-b|]$

رسم نمودار $|f(x)|$

اگر ضابطه تابع را کامل بگذاریم داخل قدرمطلق دیگر عرض منفی نداریم و آن‌ها که منفی بودند، قرینه می‌شوند. پس برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ از روی نمودار $y = f(x)$ ، قسمت‌هایی از نمودار را که زیر محور x قرار دارد، نسبت به این محور قرینه می‌کنیم.

رسم نمودار $f(|x|)$

در این حالت، به جای x در تابع $f(x)$ ، قدرمطلق x قرار می‌دهیم. پس برای رسم نمودار تابع $f(|x|)$ ، سمت چپ محور y را حذف کرده و سپس قرینه سمت راست نمودار حاصل نسبت به محور y ها را به نمودار اضافه می‌کنیم.



نمودار تابع $f(x) = ||x-a|-b|$:

نمودار این تابع با شرط $b > 0$ به صورت مقابل است: در نمودار مقابل، شیب خط‌ها برابر 1 و -1 است.

انواع معادلات قدرمطلق

برای حل معادلات قدرمطلق، روش‌های مختلفی وجود دارد. ابتدا انواع معادلات قدرمطلق را بشناسیم:

■ عدد = قدرمطلق

$$|f(x)| = a \Rightarrow \begin{cases} a > 0 & f(x) = \pm a \\ a = 0 & f(x) = 0 \\ a < 0 & \emptyset \end{cases} \quad |2x-1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 2x-1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

■ عبارت = قدرمطلق

$$|f(x)| = g(x) \Rightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases}$$

برای حل معادلات تیپ دوم، می‌گوییم چون سمت چپ تساوی نامنفی است، سمت راست تساوی هم باید نامنفی باشد.

نکته اگر $|0| = 0$ ، آنگاه داریم: $0 \geq 0$

■ قدرمطلق = قدرمطلق

$$|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها یا با هم مساوی‌اند یا قرینه یکدیگرند.

البته می‌توان به توان 2 رساندن هم این نوع معادلات را حل کرد که در نهایت به $(f-g)(f+g) = 0$ می‌رسیم.

نکته مجموع چند عبارت نامنفی: مجموع چند عبارت نامنفی (مثل قدرمطلق) زمانی صفر می‌شود که همه آن‌ها صفر باشند.



تا اینجا کار سعی کردیم با استفاده از قواعد و خواص قدرمطلق ها که در ابتدای درس آموختیم، معادلات قدرمطلق را حل کنیم. اما حالا می خواهیم یک روش کلی برای حل معادلات قدرمطلق را بررسی کنیم. با ما بمانید.

روش کلی حل معادلات قدرمطلق



برای حل معادلات قدرمطلق، ابتدا ریشه های هر کدام از قدرمطلق ها را پیدا کرده و سپس حوزه اعداد حقیقی را به فاصله هایی تقسیم می کنیم که مرزهای آن ها ریشه های عبارت های داخل قدرمطلق باشند. سپس در هر یک از این فاصله ها، علامت عبارت های داخل قدرمطلق را مشخص کرده و قدرمطلق ها را برمی داریم. حال معادله به دست آمده را حل می کنیم.

توجه حواسمان باشد که ریشه های به دست آمده را کنترل کنیم، جوابی که در هر حالت به دست می آید، به شرطی قابل قبول است که در فاصله عددی همان حالت واقع شده باشد، در غیر این صورت جواب مورد نظر غ ق است!

نامعادلات قدرمطلق



با فرض نامنفی بودن a داریم:

$$|f(x)| > a \Rightarrow \begin{cases} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{cases}$$

در هر کدام از حالت های فوق، اگر حالت تساوی داشتیم، در جواب ها هم حالت تساوی را می گذاریم. نامعادله ای را در نظر بگیرید که هر دو طرف آن فقط یک قدرمطلق قرار گرفته باشد، در این صورت می توان از روش «به توان ۲ رساندن» استفاده کرد. اما با عنایت به اتحاد مزدوج می توان گفت:

$$|f(x)| < |g(x)| \Rightarrow (f - g)(f + g) < 0$$

در این روش همواره حاصل ضرب «مجموع» و «تفاضل» را تشکیل می دهیم و جهت نامساوی هر چه بود، همان را قرار می دهیم.

نکته گاهی داخل قدرمطلق، کسری داریم که صورت و مخرج آن درجه اول است. برای حل این مدل سوالات به جای آن که قدرمطلق را دور کسر قرار دهید، یک قدرمطلق برای صورت و یک قدرمطلق برای مخرج بگذارید. حالا که علامت مخرج مشخص است می توان دو طرف را در مخرج ضرب کرد (یا به عبارتی طرفین وسطین کرد) البته پس از بیرون کشیدن ریشه مخرج و حالا به حل نامعادله مبادرت می ورزیم.

توجه یادمان باشد که ریشه مخرج نباید در جواب آخر وجود داشته باشد.

روش کلی حل نامعادلات قدرمطلق



برای حل نامعادلات قدرمطلق دقیقاً مانند حل معادلات قدرمطلق عمل می کنیم، ابتدا حوزه اعداد حقیقی را به فاصله هایی تقسیم می کنیم که مرزهای آن ها ریشه های داخل قدرمطلق ها باشند. سپس در هر یک از این فاصله ها، علامت قدرمطلق را تعیین کرده و قدرمطلق ها را برمی داریم. حال نامعادله حاصل را حل می کنیم.

توجه یادمان باشد بین مجموعه جواب هر نامعادله با فاصله خودش اشتراک بگیریم، همچنین توجه داشته باشید که مجموعه جواب نامعادله از اجتماع تمام نتایج به دست می آید.

روش هندسی



گاهی برای حل نامعادلات و یا معادلات قدرمطلق می توان با رسم طرفین معادله یا نامعادله سریعتر به جواب رسید. و همچنین اگر تعداد جواب های یک معادله قدرمطلق را بخواهیم، آن را به فرم $f(x) = g(x)$ می نویسیم و نمودارهای $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم. نقاط تلاقی همان جواب های مساله هستند. (در فصل معادله و نامعادله، اهمیت این موضوع را بهتر درک خواهید کرد.)

توجه با دیدن گلدانی، آبشاری و w شکل از روش هندسی یاد کنید.



جزء صحیح

آشنایی با دو تابع مشهور براکتی

قواعد و خواص جزء صحیح

معرفی

جزء صحیح، مشهورترین تابع پله‌ای است که در فصل سوم کتاب ریاضی ۲ با آن آشنا شدیم. از خود جزء صحیح تست مستقل نمی‌بینیم. اما برای حل تست‌های «حد و پیوستگی»، «مشتق» و ... نیاز شدیدی به تسلط بر مفاهیم جزء صحیح احساس می‌شود.

معرفی

جزء صحیح، مشهورترین تابع پله‌ای است که در فصل سوم ریاضی ۲ با آن آشنا می‌شویم.

تعریف جزء صحیح: جزء صحیح a ، اولین یا بزرگترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی a است و آن را به صورت $[a]$ نمایش می‌دهند.

نکته: جزء صحیح هر عدد صحیح، برابر با خود آن عدد صحیح است.



توجه: برای تعیین جزء صحیح عددی غیر صحیح، کافی است توجه کنیم که این عدد بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار گرفته است. حال جزء صحیح عدد، برابر با عدد صحیح کوچک‌تر است.

به طور کلی، هرگاه $n \in \mathbb{Z}$ و $n \leq x < n+1$ باشد، آن‌گاه $[x] = n$ ، عکس این موضوع هم برقرار است.

قواعد و خواص جزء صحیح

قواعد زیر را در مورد جزء صحیح به خاطر داشته باشیم:

$$[x] \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{به طور کلی}} [O] = O \quad (O \in \mathbb{Z})$$

۱ حاصل جزء صحیح، همواره عددی صحیح است. (از کلمات شیخ ما اینجاست!)

مثال: $[-\sqrt{5}] = -3$, $[5] = 5$

۲ برای تعیین مقدار عبارت یا عدد داخل جزء صحیح باید ببینیم آن عدد یا عبارت بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار گرفته است.

$$n \leq x < n+1 \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} [x] = n \xrightarrow{\text{به طور کلی}} n \leq O < n+1 \xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} [O] = n$$

مثال: $[\sqrt{2}] = 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow [\sqrt{2}] = 1$ پس داریم: $\sqrt{2} \approx 1/4$

۳ هیچ چیزی از داخل براکت به بیرون **درز نمی‌کند!** مگر عدد یا عبارت صحیحی که داخل براکت جمع یا تفریق شده باشد.

$$[x+k] = [x] + k \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad [x+k[x]] = [x] + k[x] = (k+1)[x]$$

مثال: $[3+x] = 3 + [x]$

توجه: در حالت کلی: $[nx] \neq n[x]$

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

۴ بیان دیگری از قاعده شماره ۲ ببینید: (عکس قاعده شماره ۲)

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

۵ قاعده شماره ۵ را ببینید:

مثال: $[-2] \xrightarrow{-2 \in \mathbb{Z}} -[-2] = -2$, $[-1/2] \xrightarrow{-1/2 \notin \mathbb{Z}} -[-1/2]-1 = -2$

۶ بد نیست دو قاعده زیر را هم بلد باشید!

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

۷ اگر n عددی طبیعی باشد، داریم: (رابطه آیزنشتاین!)

مثال: $[2x] = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right]$

$$[x] + [y] \leq [x+y]$$

۸ اگر x و y عضو $\mathbb{R}$ باشند، داریم:

مثال: $[3-3/5] = [3] + [-3/5]$

$$[-2/3-2/5] > [-2/3] + [-2/5]$$



آشنایی با دو تابع مشهور براکتی

به دلیل تکرار دو عبارت مشهور براکتی زیر در کنکورهای چند سال اخیر، بر آن شدیم که آن‌ها را در یک درسنامه جدا بررسی کنیم.

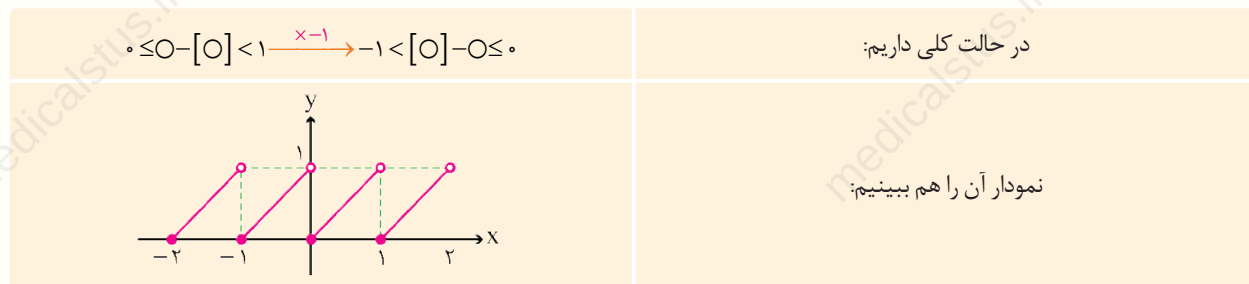
معرفی تابع $x - [x]$

چون هر عدد حقیقی x را می‌توانیم به صورت مجموع یک قسمت صحیح و یک قسمت اعشاری بنویسیم. پس داریم:

$$0 \leq f(x) = x - [x] < 1$$

و تا یادمان نرفته: $[0 - [0]] = 0$

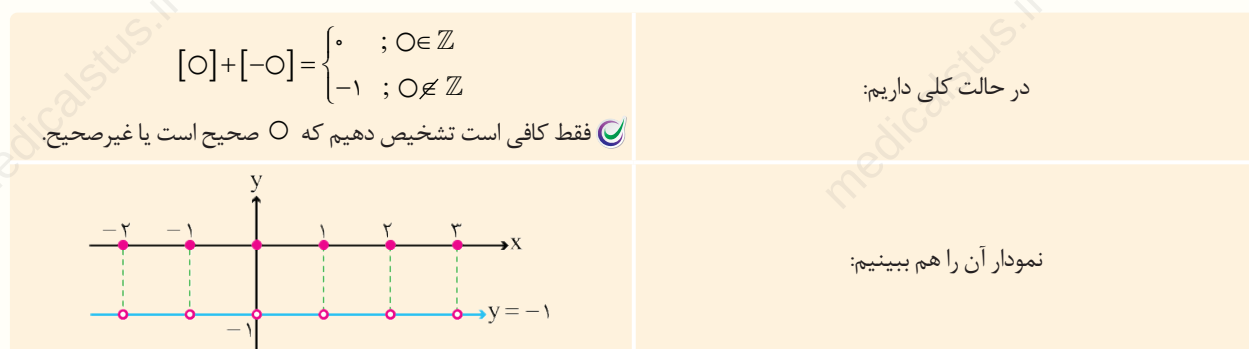
به بیانی ساده‌تر، حاصل این عبارت عددی نامنفی و کوچک‌تر از یک است در ضمن مقدار این عبارت در نقاط صحیح برابر صفر و در نقاط غیر صحیح عددی بین صفر و یک است. به این تابع، تابع «جزء اعشاری» می‌گویند.



معرفی تابع $[x] + [-x]$

حاصل این عبارت به ازای تمام اعداد صحیح برابر صفر و به ازای تمام اعداد غیر صحیح برابر منفی یک است. به عبارتی ساده‌تر:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



رسم نمودار توابع براکتی

سه نمودار براکتی پرتکرار

رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح

رسم نمودار توابع به فرم $y = a[bx]$

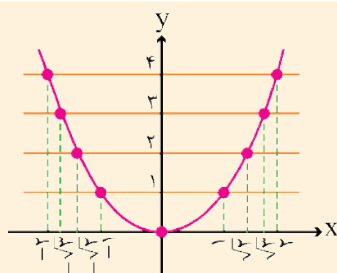
رسم نمودار توابع به فرم $y = [f(x)]$

رسم نمودار توابع به فرم $y = [f(x)]$

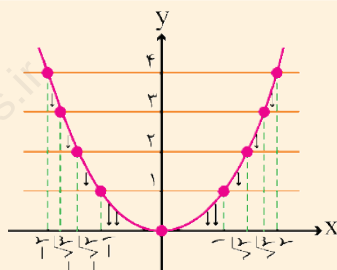
برای رسم این گونه توابع، ابتدا تابع داخل براکت یعنی $f(x)$ را رسم می‌کنیم. سپس خطوط افقی $y = n (n \in \mathbb{N})$ را به فاصله یک واحد- یک واحد رسم می‌کنیم. در گام بعدی آن قسمت‌هایی از منحنی که بین دو خط افقی متوالی قرار گرفته‌اند را روی خط پایینی تصویر می‌کنیم یا به عبارتی ساده‌تر سایه هر قسمت را که بین دو خط افقی قرار گرفته، روی خط پایینی می‌اندازیم. (نکته: بالا سر نمودار یک چراغ روشن کرده‌ایم!) در ضمن محل تلاقی خطوط افقی با تابع $f(x)$ را توپر می‌کنیم. برای مثال برای رسم نمودار تابع $y = [x^2]$ داریم:



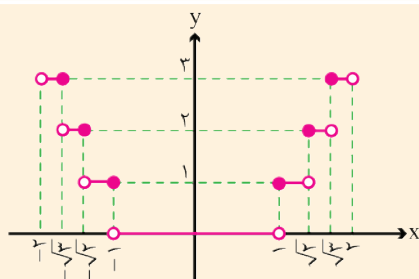
فصل اول : مباحث پایه (جزء صحیح)



۱- در مرحله نخست، ابتدا خطوط افقی با عرض صحیح را رسم می کنیم.



۲- در این مرحله، قسمتی از نمودار y ، که در فاصله بین دو خط قرار می گیرد را روی خط پایینی تصویر می کنیم. در ضمن نقاط برخورد y با خطوط افقی را توپر و نقاط زیر آن ها را توخالی می کنیم.



۳- اگر خطوط افقی رسم شده در مرحله اول را حذف کنیم به نمودار $g = [x^2]$ می رسمیم.

رسم نمودار توابع به فرم $y = a[bx]$

با فرض مثبت بودن a و b در تابع $y = a[bx]$ طول پله ها $\frac{1}{b}$ و ارتفاع آن ها $|a|$ است.

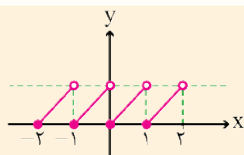
✓ اگر a منفی باشد، علاوه بر تغییر ارتفاع پله ها، نمودار نسبت به محور x قرینه می شود.

✓ اگر b منفی باشد، علاوه بر تغییر طول پله ها، نمودار نسبت به محور y قرینه می شود.

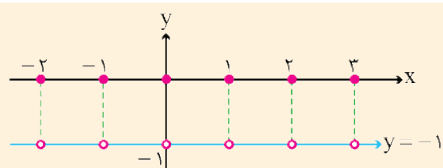
رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح

برای رسم نمودار یک تابع که شامل جزء صحیح است، داخل براکت را بین دسته های دوتایی از اعداد صحیح متوالی قرار می دهیم. با این کار، فاصله های مختلفی برای x پدید می آید و حاصل براکت در هر فاصله عددی ثابت می شود. پس در هر فاصله براکت را برداشته و به جای آن یک عدد ثابت قرار می دهیم و در گام آخر تابع نهایی را رسم می کنیم.

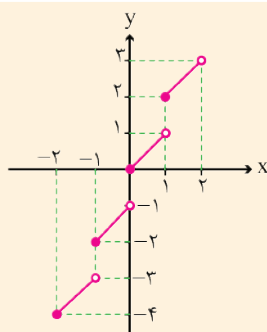
سه نمودار براکتی پر تکرار



تابع $x - [x]$



تابع $[x] + [-x]$

تابع $x + [x]$

معادله‌ها و نامعادله‌های براکتی

نامعادله‌های براکتی

معادله‌های به فرم $[f(x)] = g(x)$ معادله‌های به فرم $[f(x)] = a$

معادلات به فرم $[f(x)] = a$ (عدد = براکت)

اگر $a \in \mathbb{Z}$ باشد، آن گاه $a \leq f(x) < a+1$ اگر $a \notin \mathbb{Z}$ ، آن گاه معادله جواب ندارد.

توجه: در حل معادلات براکتی، استفاده از خواص و ویژگی‌های براکتی را فراموش نکنید!

معادلات به فرم $[f(x)] = g(x)$ (عبارت = براکت)

حاصل براکت، همواره عددی صحیح است، پس اول شرط $g(x) = \mathbb{Z}$ را می‌نویسیم.

در ادامه با دو حالت مواجه می‌شویم:

از $g(x) = \mathbb{Z}$ ، نتیجه می‌شود که عبارت داخل براکت صحیح است و می‌توانیم براکت را برداریم.از $g(x) = \mathbb{Z}$ ، صحیح بودن عبارت داخل براکت نتیجه نمی‌شود، در این حالت $g(x) \leq f(x) < g(x)+1$ ، در نهایت باید با $g(x) = \mathbb{Z}$ اشتراک بگیریم.

توجه: در حل معادلات براکتی، استفاده از خواص و ویژگی‌های براکتی را فراموش نکنید!

نامعادلات براکتی

در نامعادلات براکتی، با توجه به این موضوع که **حاصل براکت همواره عددی صحیح** است، مشخص می‌کنیم که خود براکت چه اعداد صحیحی را می‌تواند اختیار کند. این اعداد صحیح را روی محور اعداد مشخص می‌کنیم. عبارت داخل براکت فاصله بین هر دو عدد صحیح مشخص شده و عدد صحیح بعدی‌اش را می‌تواند اختیار کند.

برای حل نامعادلاتی که شامل براکت هستند باید با **دقت** از شرّ براکت خلاص شویم!نکته: به چند تا نکته زیر در حل نامعادلات براکتی توجه کنید: (در تمامی موارد $a \in \mathbb{Z}$)

۱ $[x] \geq a \Rightarrow x \geq a$

۲ $[x] > a \Rightarrow [x] \geq a+1 \Rightarrow x \geq a+1$

۳ $[x] \leq a \Rightarrow x < a+1$

۴ $[x] < a \Rightarrow [x] \leq a-1 \Rightarrow x < a$



توان های گویا

مقایسه اعداد توان دار

مفاهیم توان

مفاهیم توان

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

توان n ام عدد a را به صورت روبه رو تعریف می کنیم:

می دانیم برای هر عدد حقیقی مخالف صفر داریم: $a^0 = 1$ در ضمن 0 تعریف نشده است.

توان های گویای غیر صحیح، برای پایه های مثبت تعریف می شود، ببینید:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N})$$

نکات زیر را در مورد اعداد با توان گویا به یاد داشته باشید:

قوانین توان ها

$a^0 = 1$	$1^n = 1$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a > 0)$
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$(a^m)^n = a^{m \times n}$
$(ab)^m = a^m \times b^m$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N})$

مقایسه اعداد توان دار

در دو حالت اعداد توان دار را مقایسه می کنیم:

۱ مقایسه اعداد توان دار با پایه های یکسان:

$$\dots < a^{-1} < a^{-0.5} < a < a^2 < \dots$$

اگر پایه بزرگتر از یک باشد، هر چه توان بزرگتر باشد، حاصل بزرگتر خواهد بود. ببینید:

$$\dots > a^{-1} > a^{-0.5} > a > a^2 > \dots$$

اگر پایه بین صفر و یک باشد، هر چه توان بزرگتر باشد، حاصل کوچکتر خواهد بود. ببینید:

در ضمن، اگر پایه منفی باشد، باید توجه کرد که اولاً برای پایه منفی توان های غیر صحیح نمی توان استفاده کرد، ثانیاً زوج یا فرد بودن توان مهم است.

۲ مقایسه اعداد توان دار با توان های مساوی:

اگر توان زوج باشد، با توجه به پایه سه حالت داریم:

$$0 < a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

(الف) در پایه های مثبت، توان زوج، جهت نامساوی را عوض نمی کند.

$$a < b < 0 \Rightarrow a^n > b^n$$

(ب) در پایه های منفی، توان زوج، جهت نامساوی را عوض می کند.

(ج) اگر فقط یکی از پایه منفی باشد، توان زوج، ممکن است جهت را عوض کند یا نکند!

$$a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

در مورد توان فرد، این حالت ها پیش نمی آید! «توان فرد، جهت نامساوی را عوض نمی کند»

ریشه و توان

کار کردن با رادیکال ها

مقایسه ریشه ها

ریشه و ریشه گیری

ریشه و ریشه گیری

ریشه گیری، به نحوی عکس عمل به توان رساندن است.

اگر a و b اعداد حقیقی باشند و $b^n = a$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)، در این صورت می گوئیم عدد b ریشه n ام a است.



نکته چند نکته در مورد ریشه گیری:

۱ اعداد منفی، ریشه مرتبه زوج ندارند، در واقع در تعریف کادر بالا باید می نوشتیم اگر n زوج باشد، a باید نامنفی باشد!

۲ اعداد مثبت، دو ریشه مرتبه زوج دارند که قرینه یکدیگرند.

مثال: ۲۵ دارای دو ریشه دوم است. ± 5

۳ هر عدد حقیقی، یک ریشه مرتبه فرد دارد که با آن عدد هم علامت است.

۴ تمام ریشه های عدد صفر برابر صفر هستند! به عبارتی ساده تر صفر تنها عددی است که از هر مرتبه زوج و فرد فقط یک ریشه دارد، آن ریشه، خود صفر است.

۵ $\sqrt[n]{a}$ را بخوانید ریشه n ام a یا فرجه n ام a ، در ضمن فرجه ۲ را نمی نویسیم!

توجه تفاوت جذر و ریشه: جذر با ریشه فرق دارد! در واقع جذر یک عدد نامنفی، **ریشه دوم و نامنفی** آن عدد است! ببینید:

مثال: جذر ۹ می شود ۳ و می نویسیم $\sqrt{9} = 3$ اما ۹ دارای دو ریشه دوم است ± 3

نکته اگر n یک عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ باشد، آن گاه:

۱ n زوج باشد: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ ۲ n فرد باشد: $\sqrt[n]{a^n} = a$

۳ اگر n یک عدد طبیعی فرد و بزرگتر از ۲ باشد و علامت منفی زیر رادیکال باشد، می توان علامت منفی را از زیر رادیکال خارج کرد: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$

نکته تفاوت $(\sqrt[n]{a})^n$ و $\sqrt[n]{a^n}$:

$$\begin{cases} n \text{ زوج باشد} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt[n]{a})^n = a \\ (\sqrt[n]{a^n}) = |a| \end{cases} \\ n \text{ فرد باشد} \Rightarrow (\sqrt[n]{a^n}) = (\sqrt[n]{a})^n = a \end{cases}$$

مقایسه ریشه ها

برای پیدا کردن مقدار تقریبی ریشه دوم $\sqrt{a}$ باید اولاً پی ببریم a بین کدام دو مربع کامل متوالی قرار گرفته است.

توجه به همین ترتیب می توان مقدار تقریبی ریشه n ام a ($\sqrt[n]{a}$) را هم به دست آورد، بدین صورت که باید مشخص کنیم که a بین توان n ام کدام

دو عدد صحیح متوالی قرار گرفته است و در گام بعدی باید از طرفین نامساوی، ریشه n ام بگیریم:

$$\sqrt[n]{a}, \square^n < a < \bigcirc^n \xrightarrow{\sqrt[n]{}} \sqrt[n]{\square^n} < a < \sqrt[n]{\bigcirc^n} \Rightarrow |\square| < a < |\bigcirc|$$

اعداد صحیح متوالی

توجه قدرمطلق ها برای زمانی است که n زوج باشد.

مقایسه ریشه های مختلف یک عدد:

۱ اگر $a > 1$ باشد، هر چه فرجه بزرگتر باشد، حاصل کوچکتر خواهد بود.

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots$$

۰ اگر $0 < a < 1$ باشد، هر چه فرجه بزرگتر باشد، حاصل بزرگتر خواهد بود.

$$0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots$$

۱ اگر $-1 < a < 0$ باشد، فرجه باید فرد باشد! هر چه فرجه بزرگتر باشد، حاصل کوچکتر خواهد بود.

$$-1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[4]{a} > \dots$$

$$a < -1 \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[4]{a} < \dots$$

۱ اگر $a < -1$ باشد، فرجه باید فرد باشد! و هر چه فرجه بزرگتر باشد، حاصل بزرگتر خواهد بود.

مقایسه ریشه های مرتبه یکسان دو عدد:

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1$$

ریشه های مثبت هر عدد بزرگتر از یک، بزرگتر از یک هستند.

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt[n]{a} < 1$$

اگر عدد بین صفر و یک باشد، ریشه های مثبت آن نیز بین صفر و یک خواهد بود.

$$-1 < a < 0 \Rightarrow -1 < \sqrt[n]{a} < 0, a < -1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} < -1$$

در مورد اعداد منفی نیز، ریشه های مرتبه فرد وضعیت مشابهی دارند.



نکته هیچ عددی به جز صفر، ۱ و -۱ ریشه برابر با خودش ندارد.

کار کردن با رادیکال ها

$$\frac{m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$$

اگر a عددی مثبت باشد، برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

ضرب و تقسیم رادیکال ها:

اگر فرجه ها یکسان باشد:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

رادیکال های با فرجه یکسان را می توان در هم ضرب یا بر هم تقسیم کرد.

راستی تا دایم نرفته، اگر n زوج باشد، a و b باید نامنفی باشند! در ضمن در رابطه سمت راستی باید $b \neq 0$

اگر فرجه ها متفاوت باشد: دو راهکار داریم:

اول اینکه با استفاده از تعریف توان گویا $(\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}})$ رادیکال ها را به شکل توانی می نویسیم و از خواص توان ها استفاده می کنیم.

دومین راهکار، یکسان کردن فرجه هاست. **فرجه مشترک ک.م.م** فرجه هاست. سپس باید فرجه مشترک را بر هر کدام از فرجه ها تقسیم کرده و حاصل

$$\sqrt{5} \times \sqrt[5]{5^3} = \sqrt[2 \times 5]{5^{1 \times 5}} \times \sqrt[5 \times 2]{5^{3 \times 2}} = \sqrt[10]{5^5} \times \sqrt[10]{5^6} = \sqrt[10]{5^{11}}$$

را در توان عبارت زیر رادیکال ضرب کنیم. ببینید:

جمع و تفریق رادیکال ها:

در حالت کلی نمی توان گفت: $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \pm b}$ ، در صورتی می توان رادیکال ها را جمع و تفریق کرد که دقیقاً یکسان باشند، در این صورت

رادیکال را با ضریبش جمع و تفریق می کنیم نه زیر رادیکال ها را!

ورود و خروج رادیکالی:

وقتی عدد زیر رادیکال را تجزیه می کنیم، در عواملی که توانشان بر فرجه بخش پذیر است، توان بر فرجه تقسیم می شود و عدد توان دار حاصل از زیر

$$\sqrt[n]{a^n \times b^m} = a \sqrt[n]{b^m}$$

رادیکال بیرون می آید.

در ضمن اگر توان بزرگ تر از فرجه بود، توان را تفکیک کنید. $\sqrt[n]{a^{n+1}} = \sqrt[n]{a^n \times a} = a \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$ فرد یا زوج و n فرد یا زوج و $a > 0$)

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \times b}$$

و اگر بخواهیم عددی را زیر رادیکال ببریم، باید آن را به توان فرجه برسانیم.

در این حالت، توجه داشته باشید که منفی پشت رادیکال با فرجه زوج بیرون می ماند و حق ورود ندارد!

$$\text{برای مثال: } -3\sqrt{5} = -\sqrt{3^2 \times 5} = -\sqrt{45}$$

قانون ضرب فرجه ها:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

فرجه های زیر هم، در هم ضرب می شوند، همین! ببینید:

نکته چند نکته در مورد ساده کردن فرجه با توان:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

۱ اگر توان و فرجه فرد باشند، هیچ محدودیتی نداریم. با خیال راحت این کار را انجام دهید!

$$\sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[6 \times 2]{a^{4 \times 3}} = \sqrt[4]{a^3}$$

می توان توان و فرجه را تجزیه و عوامل فرد آن ها را ساده کرد بدون ترس! برای مثال:

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

۲ اما! اگر توان و فرجه زوج باشند، پای قدرمطلق به ماجرا باز می شود.

توجه داشته باشید، اگر توان و فرجه را تجزیه کردیم و قسمت زوج از آن ها را با هم ساده کردیم، باز هم قدرمطلق لازم داریم، فقط اگر پس از ساده کردن،

توان زوج باقی بماند، به کار بردن قدرمطلق و توان زوج، کاری است بس بیهوده!

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \sqrt[n]{a^n} = |a|$$

۳ در صورت زوج بودن n ، مواظب باشید:

اما در فرجه های فرد فرقی میان $\sqrt[n]{a^n}$ یا $(\sqrt[n]{a})^n$ وجود ندارد.

$$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[mn]{a^{np}}$$

۲ یک عدد دلخواه را می توان در فرجه و توان ضرب کرد. ببینید:



عبارت های جبری



تکنیک های تجزیه

رادیکال مرکب

اتحادها

اتحادها



مفهوم اتحاد: اتحاد جبری، تساوی بین دو عبارت جبری است که به ازای تمام مقادیر مجاز برای متغیرهایشان برقرار است.

■ اتحاد مربع دوجمله ای:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$ $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$ $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$	نتایج

■ اتحاد مربع سه جمله ای:

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
---	---

■ اتحاد مزدوج:

هر وقت دو عبارت مزدوج دیدید یا تفاضل دو جمله با توان های زوج، مزدوج بزنید.	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
--	------------------------------

■ اتحاد مکعب دوجمله ای:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a + b)^3 = a^3 + 3ab(a + b) + b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - 3ab(a - b) - b^3$	اینجوری هم بلد باشید.
$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$	نتایج

■ اتحاد چاق و لاغر (فیل و فئان):

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
---------------------------------------	---------------------------------------

رادیکال مرکب



در مورد رادیکال مرکب دو قانون زیر را بلد باشید:

$$\text{فرم } \sqrt{A \pm \sqrt{B}}$$

برای ساده کردن عبارت های رادیکالی به این فرم باید عبارت زیر رادیکال را به کمک اتحاد مربع دوجمله ای به صورت مربع کامل نوشته و آن را از

زیر رادیکال خارج کنیم:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{X \pm \sqrt{Y}} \quad (X + Y = A, XY = B)$$



■ قانون رادیکال مرکب:

در عبارت $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ داریم:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \quad c = \sqrt{a^2 - b}$$

نکته: اگر رادیکال مرکب شامل فرجه ۳ باشد، ذهنمان باید سمت تشکیل اتحاد مکعب دوجمله ای یعنی $(a \pm b)^3$ برود.

تکنیک های تجزیه

برای تجزیه عبارت های جبری چند نکته و ایده زیر را به خاطر داشته باشید:

فاکتورگیری: وقتی چند عامل با هم جمع و تفریق شده اند و در شکل تجزیه شده آن عامل مشترکی دیدیم، از آن عامل فاکتور می گیریم.

دسته بندی جملات: گاهی دو یا چند جمله یک عامل مشترک دارند و بقیه جملات عامل مشترک دیگری. بعد از فاکتورگیری ممکن است عامل مشترک جدید مشاهده شود.

کم و اضافه کردن و شکستن جملات: گاهی برای دیدن عامل مشترک لازم است یک جمله را بشکنیم و یا جمله جدید را اضافه و کم کنیم.

استفاده از اتحادها: برای تجزیه عبارت های جبری، اتحادها را از سمت راست به چپ بکار می بریم. اتحادهای جمله مشترک، مزدوج و چاق و لاغر بیشترین کاربرد را دارند.

گویا کردن مخرج کسرها و عبارت های گویا

عبارت های گویا

گویا کردن مخرج کسرها

گویا کردن مخرج

در گویا کردن معمولاً با ۳ حالت زیر مواجه می شویم:

رادیکال تنها:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{O^n}} \times \frac{\sqrt[n]{O^{m-n}}}{\sqrt[n]{O^{m-n}}} = \frac{\sqrt[n]{O^{m-n}}}{O}$$

رادیکال های مزدوج خور: اگر در مخرج، یک رادیکال با فرجه زوج، با عدد یا رادیکالی دیگر با فرجه زوج جمع یا تفریق شده بود، برای گویا کردن، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

رادیکال های چاق و لاغر طلب: اتحاد چاق و لاغر را در ذهنتان مجسم کنید! اگر در مخرج قسمت چاق / لاغر را دیدیم، برای گویا کردن، صورت و مخرج را در لاغر/چاق آن عبارت ضرب و تقسیم می کنیم. همین!

برای گویا کردن مخرج بعضی از کسرها، گاهی لازم است چندین مرحله، صورت و مخرج را در عبارت های مختلف ضرب کنیم تا رادیکال های مخرج ساده شوند.

عبارت های گویا

عبارت هایی به صورت کسرهایی با صورت و مخرج چندجمله ای، گویا هستند!

کسرهایی گویا به ازای تمام مقادیر حقیقی تعریف شده اند، به جز مقادیری که مخرجشان را صفر می کنند.

چندجمله ای ها هم کسرهایی با مخرج ۱ هستند، پس گویا محسوب می شوند.

در عبارت های گویا نباید متغیر زیر رادیکال باشد! عدد ثابت یا ضریب عددی اشکال ندارد زیر رادیکال باشد.

ضرب عبارت های گویا: برای ضرب عبارت های گویا، صورت ها را در هم و مخرج ها را در هم ضرب می کنیم.

تقسیم عبارت های گویا: کسر اول را در معکوس کسر دوم ضرب می کنیم! (یا همان دور در دور، نزدیک در نزدیک انجام می دهیم)

جمع و تفریق: از دوران ابتدایی به یاد داریم که برای جمع و تفریق مخرج مشترک که همان ک.م.م است، می گیریم.

ک.م.م: برای این کار ابتدا عبارت ها را تجزیه می کنیم. سپس هر عامل را با بیشترین توانش انتخاب می کنیم و در عامل های غیرمشترک ضرب می کنیم.

حاصل ضرب این عوامل انتخاب شده، ک.م.م می دهد.



مجموعه ها و بازه



تعریف مجموعه



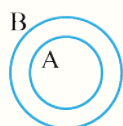
به قول متن کتاب «ریاضی سال نهم»:

ما از مجموعه در ریاضی برای بیان و نمایش دسته ای از اشیاء (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) متمایز (غیر تکراری) استفاده می کنیم. معمولاً مجموعه ها را با حروف بزرگ نمایش می دهیم.

مثال: «دانش آموزان کلاس دوازدهم تجربی مدرسه شما» یک مجموعه است!

مثال: «پنج عدد صحیح زوج» بیانگر یک مجموعه نیست. چرا؟ چون «عضویت اشیاء در مجموعه کاملاً معین نیست» مجموعه ها را می توان با استفاده از منحنی ها یا خط های شکسته بسته نمایش داد، که به آن نمودار ون می گویند.

مثال: مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ با استفاده از نمودار ون به صورت مقابل است:



اگر b متعلق به مجموعه A باشد، آنگاه می نویسیم $(b \in A)$ و می خوانیم (b عضو A است).

اگر هر عضو مجموعه A در مجموعه ای مثل B هم موجود باشد می نویسیم $(A \subseteq B)$ و می خوانیم (A زیرمجموعه B است).

هر مجموعه، زیرمجموعه خودش محسوب می شود!

برای درک بهتر «عضو» و «زیرمجموعه» به مثال زیر توجه کنید.

نکته: هر مجموعه n عضوی دارای 2^n زیرمجموعه است.



توجه: در نمایش مجموعه ها، ترتیب نوشتن عضوهای مجموعه، مهم نیست و با جابه جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی شود، همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ساخته نمی شود. به عنوان مثال می توان به جای مجموعه $\{3, 3, 4\}$ مجموعه $\{3, 4\}$ را نوشت.



نکته: مجموعه تهی: مجموعه ای که در آن هیچ عضوی وجود ندارد را مجموعه تهی گویند و آن را با نمادهای $\emptyset$ و $\{\}$ نمایش می دهند.

توجه داشته باشید که مجموعه $\{\emptyset\}$ که شامل یک عضو است، تهی محسوب نمی شود.

$\emptyset$ زیرمجموعه تمام مجموعه ها است.

مجموعه های مهم و پر کاربرد در ریاضیات عبارتند از:

مجموعه اعداد طبیعی: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$	مجموعه اعداد حسابی: $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
مجموعه اعداد صحیح: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	با اضافه کردن عدد صفر به مجموعه اعداد طبیعی به دست می آید.
مجموعه اعداد گویا: $Q = \{\frac{m}{n} : m, n \in Z, n \neq 0\}$	اعداد کسری با صورت و مخرج صحیح و مخرج غیر صفر!
مجموعه اعداد گنگ (غیر گویا): اعدادی که نتوان آن ها را به صورت کسری نمایش داد و اعداد آن ها تا بی نهایت بدون تکرار و نظم خاصی جلو می رود و آن را با نماد Q' نمایش می دهند. مانند: $\dots, \pi, \sqrt{3}$	مجموعه اعداد حقیقی: تمام اعداد گویا و گنگ را گویند!

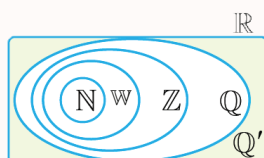


نکته: مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و تقسیم دو عدد گویا، عددی گویا است! (البته در تقسیم، بر عددی غیر صفر مدنظر است).

در مورد دو عدد گنگ نمی توان چنین اظهار نظری کرد.

همچنین می توان گفت حاصل جمع هر عدد گویا با هر عدد گنگی، قطعاً و همواره عددی است گنگ!

بدیهی است که: $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$





$$\begin{cases} \{\beta, 4\} = \{\alpha, 7\} \Rightarrow \alpha = 4, \beta = 7 \\ \theta = 6 \end{cases}$$

نکته دو مجموعه در صورتی مساوی اند که اعضای یکسان داشته باشند.

مجموعه های متناهی و نامتناهی

انواع مجموعه از نظر تعداد اعضا به دو دسته زیر تقسیم بندی می شوند:

- ۱ **مجموعه متناهی**: مجموعه ای که تعداد اعضای آن عددی حسابی باشد، مثلاً تعداد دانش آموزان کلاس شما!
- ۲ **مجموعه نامتناهی**: مجموعه ای که تعداد اعضای آن از هر عددی که در نظر بگیریم بزرگ تر است. مثلاً مجموعه اعداد گویا!!

توجه تعداد اعضای برخی از مجموعه های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد، با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آن ها را به دست آورد.

نکته مجموعه تهی، مجموعه ای متناهی می باشد!

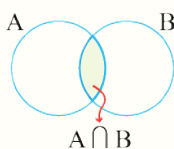
تمامی مجموعه های اعداد گنگ، گویا، حقیقی، حسابی، طبیعی و مجموعه هایی نامتناهی محسوب می شوند.

اگر داشته باشیم $A \subseteq B$:

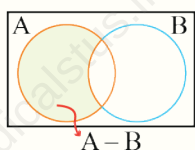
الف) اگر نامتناهی باشد، B نامتناهی است. ب) اگر B متناهی باشد، A متناهی است.

اعمال روی مجموعه ها

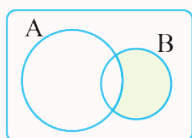
دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید:



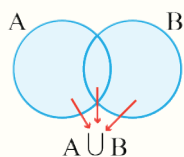
اشتراک $(A \cap B)$: عضوایی که هم در مجموعه A وجود داشته باشند و هم در مجموعه B.



تفاضل $(A - B)$: عضوایی از مجموعه A که در مجموعه B حضور نداشته باشند.



نکته به زبانی ساده تر می توان گفت که باید عضوهای مشترک A و B را از A حذف کرد. $(A - B = A - (A \cap B))$
راستی $B - A$ به صورت مقابل خواهد بود.

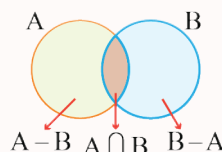


اجتماع $(A \cup B)$: تمام عضوایی که در مجموعه A یا مجموعه B یا در هر دو مجموعه عضویت داشته باشند.

$$\begin{cases} A \cap B = A \\ A \cup B = B \\ A - B = \emptyset \end{cases}$$

نکته اگر مجموعه A زیرمجموعه B باشد، داریم:

نکته اجتماع A و B یعنی $(A \cup B)$ از سه زیرمجموعه تشکیل شده است. ببینید:



برای اجتماع، «قیمه ها رو بریزید تو ماست!» یعنی همه رو باهم قاتی کنید!



نکته اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آن دو مجموعه را مجزا یا جدا از هم گویند.
«یا» متناظر با اجتماع، «و» متناظر با اشتراک است. (در فصل احتمال خیلی خیلی با این نکته مواجه خواهید شد!)

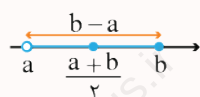


بازه

زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی که مشخص کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» می گویند.
گاهی به جای واژه «بازه» از واژه «فاصله» استفاده می کنیم.
بازه ها نوعی مجموعه محسوب می شوند، از نوع نامتناهی. (به شرط اینکه سرو ته بازه یکی نباشد).
بازه ها، حالت های مختلفی دارند که برای مراعات حال شما/ جناب عالی (عه!! زشته ... بیدیز فرست!) تمامی این حالت ها را در جدول زیر برایتان آورده ایم.
(امید است مقبول افتد...)

نمایش هندسی	نمایش مجموعه ای	بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$	$[a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$(a, +\infty)$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	$(-\infty, b]$
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$(-\infty, b)$

توجه در تمامی حالت های فوق فرض را بر آن گرفته بودیم که a کوچک تر از b باشد. (a و b اعداد حقیقی هستند!)



نکته در بازه ها، اختلاف طول نقطه انتها و ابتدا، طول بازه نام دارد، یعنی در بازه ای مانند (a, b) ، طول بازه $|b - a|$ است.

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \quad , \quad \mathbb{R}^+ = (0, +\infty) \quad , \quad \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$$

نکته بهتر از من می دانید که:

بازه هایی به فرم $[]$ را بسته، بازه هایی به فرم $()$ را باز و بازه هایی به فرم $[)$ و $(]$ را نیم باز گویند.

$$(a, a) = \emptyset \quad , \quad [a, a] = a$$

این دو تا ژ واسه خودم میگم! (می دونم که شما بلدید!):

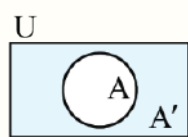
توجه حالت هایی مانند x بازه نیستند!!! اینها اجتماع دو بازه اند.



مجموعه مرجع و متمم مجموعه

مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

مجموعه متمم: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نمایش می‌دهیم.



به عبارتی می‌توان گفت که A' شامل عضوایی از U است که در مجموعه A نیستند. ببینید:

$$U' = \emptyset, \emptyset' = U, (A')' = A, A \cup A' = U, A \cap A' = \emptyset$$

نکته در رابطه با متمم:

$$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$$

تفاضل:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', (A \cap B)' = A' \cup B'$$

قوانین دمورگان: (برعکس کن!)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$$

همچنین به خاطر بسپارید که:

یادداشت: برای کم نیاوردن در کنکور، دیدن این چند نکته هم خالی از لطف نیست:

$$1. A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$$

$$2. A \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap (A \cup B) = U \cap (A \cup B) = A \cup B$$

$$3. A \cap (A' \cup B) = (A \cap A') \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

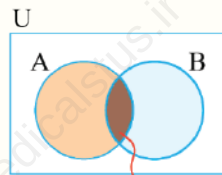
$$4. A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$5. A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

تعداد اعضای مجموعه متناهی A را با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه A و B از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

می‌دونید چرا اینجوری شد؟

شکل مقابل را ببینید:

برای شمارش تعداد اعضای اجتماع، تعداد اعضای $(A \cap B)$ را دوبار شمارش کردیم! پس یکبارش رو حذف می‌کنیم.

دوبار هاشور زده شده

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه جدا از هم:

یادآوری دو مجموعه A و B که هیچ اشتراکی با هم ندارند، مجزا یا جدا از هم می‌گویند.

پس برای دو مجموعه جدا از هم A و B می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{(A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0)} n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

همچنین در مورد دو مجموعه جدا از هم به خاطر بسپارید که:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \xrightarrow{(A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0)} n(A - B) = n(A)$$

$$n(A) + n(A') = n(A \cup A') = n(U)$$

نکته می‌دانیم که A و A' دو مجموعه جدا از هم هستند، پس داریم:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

همچنین مجموعه‌های $B - A$ و $A \cap B$ و $B - A$ دو به دو مجزا از هم محسوب می‌شوند، پس:

$$n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

تعداد اعضای که فقط در یکی از مجموعه‌های A یا B قرار دارند:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

تعداد اعضای که فقط در مجموعه A عضویت دارند:

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$$

تعداد اعضای که در هیچ یک از دو مجموعه A و B قرار ندارند:

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

همچنین بدانید:

$$n(A \cup B)' = n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B)$$

یکم دمورگان ببینیم:

$$n(A \cap B)' = n(A' \cup B') = n(U) - n(A \cap B)$$



الگو و دنباله



معرفی

تعریف الگو: به طور کلی، الگو یک ساختار منظم از شکل‌ها، تصاویر، نمادها و یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشند.

تعریف دنباله: هر تعداد عدد که پشت سرهم قرار می‌گیرند یک دنباله را تشکیل می‌دهند که به این اعداد، جملات دنباله می‌گوییم. جمله اول دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام آن را با t_n نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند.

جمله عمومی الگو یا دنباله: جمله عمومی الگو یا دنباله در واقع ساختار جمله‌های آن را نشان می‌دهد و به کمک آن می‌توان مقدار هر یک از جملات الگو یا دنباله را به دست آورد. به عنوان مثال، الگوی مقابل را در نظر بگیرید، می‌خواهیم هر شکل را با شکل بعدی مقایسه کرده و با توجه به تغییر شکل در هر مرحله، رابطه‌ای را بین آن‌ها بنویسیم.

شماره شکل (n)	۱	۲	۳	...	n
تعداد دایره‌ها	$3(1)+2$	$3(2)+2$	$3(3)+2$	...	$3(n)+2$
جملات دنباله	$t_1 = 5$	$t_2 = 8$	$t_3 = 11$	...	$t_n = 3n + 2$

انواع الگو و دنباله

دنباله بازگشتی

الگو و دنباله درجه دوم

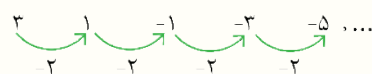
الگو و دنباله خطی

الگو و دنباله خطی: ۱

به الگوها و دنباله‌هایی که اختلاف هر دو جمله متوالی در آن‌ها عددی ثابت باشد، الگو یا دنباله خطی می‌گوییم و جمله عمومی آن‌ها به صورت

$t_n = an + b$; $\{a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ است. توجه کنید که در جمله عمومی دنباله خطی، ضریب n (همون a) اختلاف بین جملات متوالی در دنباله خطی است که به آن قدرنسبت دنباله خطی می‌گوییم.

به عنوان مثال، اگر $t_n = -2n + 5$ جمله عمومی یک دنباله خطی باشد، جملات آن به صورت $3, 1, -1, -3, -5, \dots$ است که در آن هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۲ واحد کاهش یافته است، ببینید:

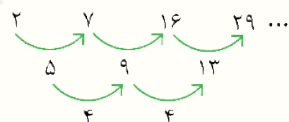


همانطور که می‌بینید، اختلاف جملات متوالی در این دنباله، همان ضریب n در جمله عمومی دنباله است.

الگو و دنباله درجه دوم

به الگوها و دنباله‌هایی که میزان اختلاف جملات متوالی در آن‌ها ثابت نبوده و اختلاف جملات متوالی، خودش تشکیل یک دنباله خطی بدهند، الگو یا دنباله درجه دوم می‌گوییم که جمله عمومی آن به صورت $t_n = an^2 + bn + c$; $(a \neq 0)$ است. به عبارت دیگر، اگر t_n دنباله درجه دوم و a_n دنباله اختلاف جملات متوالی آن باشد، در این صورت a_n دنباله‌ای خطی با قدرنسبت d است.

به عنوان مثال، اگر $t_n = 2n^2 - n + 1$ جمله عمومی یک دنباله درجه دوم باشد، جملات آن به صورت $2, 7, 16, 29, \dots$ است و داریم:



همانطور که می‌بینید، اختلاف جملات متوالی این دنباله به صورت $5, 9, 13, \dots$ هستند که خودشان تشکیل یک دنباله خطی با قدرنسبت ۴ می‌دهند.

۱ در واقع دنباله خطی، نوعی دنباله حسابی است که در ادامه به کمک دنباله حسابی و قوانین آن می‌توان به سوالات این قسمت نیز پاسخ داد.



فصل اول : مباحث پایه (الگو و دنباله)

نحوه به دست آوردن جمله عمومی یک دنباله درجه دوم:

می دانیم که جمله عمومی یک دنباله درجه دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c; (a \neq 0)$ است، حال برای به دست آوردن ضرایب مجهول a, b و c به روش زیر عمل می کنیم:

✓ برای به دست آوردن ضریب a ، اختلاف اختلاف های جملات متوالی دنباله (همان قدرنسبت دنباله خطی a_n) را به دست آورده و آن را نصف می کنیم.

✓ برای به دست آوردن ضریب c ، از رابطه $c = t_1 - (a_1 - d)$ استفاده می کنیم.

✓ در نهایت، برای به دست آوردن ضریب b ، یکی از جملات دنباله (معمولاً جمله اول) را در جمله عمومی t_n جایگذاری می کنیم.

نکته دو نوع خاص از الگوی درجه دوم وجود دارند که در جدول زیر آن ها را به شما معرفی می کنیم:

نوع	الگوی هندسی	دنباله	توضیح	جمله عمومی
مربعی	۱	۱	تعداد دایره ها در هر شکل، با مربع شماره آن شکل برابر است.	$t_n = n^2$
	۲	۴		
مثلی	۳	۹	تعداد دایره های اضافه شده در هر شکل نسبت به شکل قبل با شماره آن شکل برابر است.	$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$
	۴	۱۶		
مربعی	۱	۱	تعداد دایره ها در هر شکل، با مربع شماره آن شکل برابر است.	$t_n = n^2$
	۲	۴		
مثلی	۳	۹	تعداد دایره های اضافه شده در هر شکل نسبت به شکل قبل با شماره آن شکل برابر است.	$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$
	۴	۱۶		

توجه با توجه به الگوی مثلی، می توان به نتایج زیر رسید:

$$مجموع اعداد طبیعی: 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$مجموع اعداد فرد: 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

$$مجموع اعداد زوج: 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

دنباله بازگشتی

به طور کلی به دنباله ای که در آن، هر جمله (به غیر از جمله اول) براساس جمله قبلی اش به دست می آید، دنباله بازگشتی می گوئیم. به عنوان مثال، دنباله $a_{n+1} = 2a_n + 1; a_1 = 1$ را در نظر بگیرید. می دانیم که a_n و a_{n+1} دو جمله متوالی از دنباله بوده و a_{n+1} یک جمله جلوتر از a_n است، پس طبق این رابطه می توان فهمید که هر جمله، از دو برابر جمله قبلی خودش یک واحد بیشتر است. از طرفی، می دانیم که جمله اول این دنباله برابر ۱ است ($a_1 = 1$)، پس جملات این دنباله به صورت زیر به دست می آیند:

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_{1+1} = 2a_1 + 1 \xrightarrow{a_1=1} a_2 = 2(1) + 1 = 3 \\ n=2 \Rightarrow a_{2+1} = 2a_2 + 1 \xrightarrow{a_2=3} a_3 = 2(3) + 1 = 7 \\ n=3 \Rightarrow a_{3+1} = 2a_3 + 1 \xrightarrow{a_3=7} a_4 = 2(7) + 1 = 15 \\ \vdots \end{cases}$$

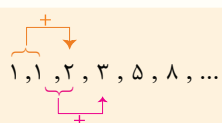
- دنباله حسابی

- دنباله هندسی

- دنباله فیبوناتچی

- معروف ترین دنباله های بازگشتی ۱

دنباله فیبوناتچی: این دنباله، یک دنباله بازگشتی است که در آن جملات اول و دوم برابر ۱ بوده و از جمله سوم به بعد، هر جمله با مجموع دو جمله قبلی خودش برابر است.



$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}; a_1 = a_2 = 1$$

دنباله فیبوناتچی

① دنباله های حسابی و هندسی را به طور مفصل در بخش های بعدی مورد بررسی قرار می دهیم.



دنباله حسابی

قانون اندیس‌ها

واسطه حسابی

قدر نسبت دنباله حسابی

جمله عمومی دنباله حسابی

تعریف

جملات مشترک دو دنباله حسابی

درج m واسطه حسابی

دنباله حسابی و مثلث قائم‌الزاویه

یک ویژگی مهم در دنباله حسابی

تعریف

دنباله حسابی، همان الگوی خطی است، به عبارت دیگر دنباله حسابی نوعی از دنباله بازگشتی است که در آن، هر جمله (به‌جز جمله اول) با اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله قبل از خودش به وجود می‌آید، که آن عدد ثابت را **قدر نسبت** دنباله می‌نامیم و آن را معمولاً با نماد d نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال، دنباله $3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots$ ، یک دنباله حسابی است که در آن هر جمله (به‌جز جمله اول) با اضافه شدن عدد ۲ به جمله قبلی‌اش به دست می‌آید که در این‌جا، عدد ۲ همان قدر نسبت دنباله است. ببینید:

$$-3, -1, 1, 3, 5, \dots \quad (d = 2 \text{ قدر نسبت})$$

$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\ & +2 & +2 & +2 & +2 & +2 & \end{array}$

جمله عمومی دنباله حسابی

اگر در یک دنباله حسابی، جمله اول را با a_1 و قدر نسبت را با d نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{جمله اول} & & \text{جمله دوم } (a_2) & & \text{جمله سوم } (a_3) & & \text{جمله چهارم } (a_4) & & \text{جمله } n\text{ام } (a_n) \\ \uparrow & \xrightarrow{+d} & \uparrow & \xrightarrow{+d} & \uparrow & \xrightarrow{+d} & \uparrow & \xrightarrow{+d} & \uparrow \\ a_1 & & a_1 + d & & a_1 + 2d & & a_1 + 3d & \dots & a_1 + (n-1)d \end{array}$$

بنابراین جمله n ام یک دنباله حسابی که همان جمله عمومی آن می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

a_1 = جمله اول
 a_n = جمله n ام
 n = شماره جمله
 d = قدر نسبت

$$1, 4, 7, 10, \dots$$

$\begin{array}{cccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ & +3 & +3 & +3 \end{array}$

مثال: می‌خواهیم که جمله عمومی دنباله $1, 4, 7, 10, \dots$ را تشکیل دهیم:

جمله اول این دنباله برابر ۱ و قدر نسبت آن نیز برابر ۳ است، پس:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)(3) \Rightarrow a_n = 3n - 2$$

توجه: همان‌طور که می‌بینید، جمله عمومی یک دنباله حسابی، یک عبارت **درجه اول** (خطی) است.

به عنوان مثال: اگر بخواهیم جمله سی‌ویکم این دنباله را به دست بیاوریم، کافی است که در جمله عمومی این دنباله به جای n ، عدد ۳۱ را قرار

$$a_n = 3n - 2 \xrightarrow{n=31} a_{31} = 3(31) - 2 \Rightarrow a_{31} = 93 - 2 = 91 \Rightarrow a_{31} = 91$$

دهیم:

قدر نسبت دنباله حسابی

اگر جمله عمومی دنباله حسابی را به صورت زیر بنویسیم، در این صورت جمله عمومی دنباله به شکل یک عبارت **درجه اول** (خطی) به فرم $a_n = An + B$ تبدیل می‌شود که در آن ضریب n ، همان قدر نسبت دنباله است، ببینید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = a_1 + nd - d \Rightarrow a_n = \underbrace{d}_\text{قدر نسبت دنباله} n + (a_1 - d)$$

قدر نسبت دنباله

مثال: در دنباله $a_n = -\frac{1}{2}n + 1$ ، داریم:

$$d = n \text{ ضریب} = -\frac{1}{2}$$



فصل اول : مباحث پایه (دنباله حسابی)

۲ اگر a_n و a_{n-1} دو جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، در این صورت تفاضل این دو جمله، همان قدر نسبت دنباله است. به عبارت دیگر اگر دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ بیانگر یک دنباله حسابی باشد:

$$d = a_2 - a_1$$

$$d = a_3 - a_2$$

:

$$d = a_n - a_{n-1}$$

مثال: در دنباله حسابی $-\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{5}{3}, -\frac{13}{6}, \dots$ قدر نسبت دنباله برابر است با:

$$d = (\text{جمله دوم}) - (\text{جمله اول}) = \left(-\frac{7}{6}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$d = (\text{جمله سوم}) - (\text{جمله دوم}) = \left(-\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

یا این که:

۳ اگر a_m و a_n دو جمله غیرمتوالی از یک دنباله حسابی باشند در این صورت برای به دست آوردن قدر نسبت دنباله از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

مثال: در یک دنباله حسابی، اگر $a_4 = 21$ و $a_{16} = 117$ باشد در این صورت قدر نسبت دنباله برابر است (لزوماً نباید m از n بزرگتر باشد).

$$\begin{cases} a_m = a_{16} = 117 \Rightarrow m = 16 \\ a_n = a_4 = 21 \Rightarrow n = 4 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \Rightarrow d = \frac{a_{16} - a_4}{16 - 4} \Rightarrow d = \frac{117 - 21}{12} = 8 \Rightarrow d = 8$$

۴ برای تشخیص نوع دنباله حسابی (صعودی، نزولی و یا ثابت) به کمک علامت قدرنسبت، داریم:

نمونه	ترتیب جملات	نوع دنباله حسابی	علامت قدر نسبت
$2, 5, 8, 11, \dots$ ($d = 3$)	$a_1 < a_2 < \dots < a_n$	صعودی (افزایشی)	$d > 0$
$6, 3, 0, -3, \dots$ ($d = -3$)	$a_1 > a_2 > \dots > a_n$	نزولی (کاهشی)	$d < 0$
$4, 4, 4, 4, \dots$ ($d = 0$)	$a_1 = a_2 = \dots = a_n$	ثابت (همصعودی و هم نزولی)	$d = 0$

واسطه حسابی (میانگین حسابی)

اگر a, b, c به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، در این صورت b را واسطه حسابی (میانگین حسابی) a و c می گوئیم و داریم:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

$$b = \frac{25 + 17}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

مثال: واسطه حسابی بین دو عدد ۱۷ و ۲۵ برابر است با:

توجه: اگر فاصله بین جملات یک دنباله حسابی با هم برابر باشند نیز می توان از رابطه بالا استفاده کرد به عبارت دیگر اگر a_n, a_m, a_p سه جمله از یک

دنباله حسابی باشند، به طوری که فاصله بین سه جمله با هم برابر باشد، در این صورت داریم:

$$a_n, \dots, a_m, \dots, a_p$$

$\xrightarrow{+kd}$ $\xrightarrow{+kd}$

$$a_m = \frac{a_n + a_p}{2}$$

قانون اندیس ها

در مسائلی که مجموع دو یا چند جمله از دنباله حسابی را در اختیار داشته باشیم، می توانیم به کمک قانون اندیس ها به جای مجموع این جملات، مجموع چند جمله دیگر از دنباله را قرار دهیم.

فرض کنید a_m, a_n, a_p, a_q جملات یک دنباله حسابی هستند، اگر $m + n = p + q$ باشد، در این صورت:

$$m + n = p + q \Leftrightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$$

البته به شرطی که:

جمع اندیس جملات سمت چپ تساوی با جمع اندیس جملات سمت راست، با هم برابر باشند.



تعداد جملات هر دو طرف تساوی با هم برابر باشند.

مثال: فرض کنید در سوالی $a_3 + a_7$ را داشته باشیم، می‌خواهیم ببینیم به جای آن، مجموع چه جمله‌های دیگری را می‌توان نوشت:

$$a_3 + a_7 = 3 + 7 = 4 + 6 \quad a_4 + a_6$$

$$a_3 + a_7 = 2 + 8 \quad a_2 + a_8$$

$$a_3 + a_7 = 5 + 5 \quad a_5 + a_5 = 2a_5$$

$$a_3 + a_7 = 1 + 9 \quad a_1 + a_9$$

حالا تو بگو به جای $a_3 + a_7$ جمع کدام دو جمله دیگه رو میشه نوشت (🍷)

حال اگر جمع n تا جمله از دنباله حسابی رو داشته باشیم و جمع اندیس این جمله‌ها k برابر تعداد جمله‌ها باشد در این صورت می‌تونیم به جای جمع این n تا جمله، n برابر a_k رو قرار بدیم.

من که نفهمیدم چی شد! (🍷) یه مثال مون نشه؟؟

مثال: فرض کنید جمع سه تا جمله a_2, a_5, a_8 رو داشته باشیم، همون‌طور که می‌بینید، جمع اندیس این سه تا جمله ۱۵ میشه (۵ برابر ۳ تا جمله‌مون یعنی $k = 5$ و $n = 3$)، پس می‌تونیم به جای جمع این ۳ تا جمله، ۳ برابر a_5 رو قرار بدیم.

$$a_2 + a_5 + a_8 = \frac{2+5+8=5 \times 3}{k=5, n=3} a_5 = 3a_5$$

یه مثال دیگه ...

$$a_1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_7 = \frac{1+3+4+5+7=4 \times 5}{k=4, n=5} a_4 = 4a_4$$

یکی دیگه (🍷)

$$a_2 + a_4 + a_7 + a_{11} = \frac{2+4+7+11=6 \times 4}{k=6, n=4} a_6 = 4a_6$$

فقط بازم یادآوری کنیم که تعداد جمله‌های هر دو طرف تساوی باید با هم برابر باشه.

یک ویژگی مهم در دنباله حسابی

در برخی از سؤالات مربوط به دنباله حسابی، اطلاعاتی درباره مجموع، حاصل ضرب و ... جملات دنباله به ما می‌دهند و خواسته‌ای را مطرح می‌کنند. در این گونه مواقع با توجه به متوالی یا غیرمتوالی بودن این جملات، باید این جمله‌ها را نوشته و اطلاعات مسئله را روی آنها پیاده کنیم.

حالت اول: اگر اطلاعات مسئله درباره جملات متوالی دنباله حسابی باشد، جملات دنباله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

قدر نسبت	جملات	سه جمله متوالی
d	$(x-d), x, (x+d)$	
$2d$	$(x-2d), (x-d), (x+d), (x+2d)$	چهار جمله متوالی
d	$(x-2d), (x-d), x, (x+d), (x+2d)$	پنج جمله متوالی

حالت دوم: اگر اطلاعات مسئله درباره جملات غیرمتوالی دنباله حسابی باشد، در این صورت با توجه به شرایط مسئله، تمام جملات را برحسب یکی از جمله‌ها تشکیل می‌دهیم.

به عنوان مثال، فرض کنید که جملات دوم، پنجم و نهم یک دنباله حسابی را داریم و می‌خواهیم همه جمله‌ها را برحسب جمله دوم بنویسیم. می‌دانیم که جمله پنجم (a_5) از جمله دوم، $3d$ جلوتر است بنابراین جمله پنجم را به صورت $(a_2 + 3d)$ می‌نویسیم و یا این که جمله نهم از جمله دوم، $7d$ فاصله دارد پس جمله نهم را به صورت $(a_2 + 7d)$ در نظر می‌گیریم. ببینید:

$$a_2, a_5, a_9 : \begin{cases} \text{همه جملات برحسب } a_2 \rightarrow a_2, (a_2 + 3d), (a_2 + 7d) \\ \text{همه جملات برحسب } a_5 \rightarrow (a_5 - 3d), a_5, (a_5 + 2d) \\ \text{همه جملات برحسب } a_9 \rightarrow (a_9 - 7d), (a_9 - 4d), a_9 \end{cases}$$



دنباله حسابی و مثلث قائم الزاویه

اگر طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه به صورت $3d$ ، $4d$ و $5d$ باشد، در این صورت طول اضلاع این مثلث، تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت d را می دهند، بنابراین:

محیط مثلث	مساحت مثلث
محیط $= 3d + 4d + 5d = 12d$	مساحت $= \frac{1}{2} \times 4d \times 3d = 6d^2$

بزرگترین زاویه	$60^\circ + d$	اگر زاویه های داخلی یک مثلث قائم الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، در این صورت زاویه های مثلث 90° ، 60° و 30° هستند و در حالت کلی اگر زوایای داخلی یک مثلث (حالا هر مثلثی!) تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت d بدهند، در این صورت:
زاویه متوسط	60°	
کوچکترین زاویه	$60^\circ - d$	

درج m واسطه حسابی

اگر بین دو عدد a و b بخواهیم m عدد را چنان قرار بدهیم که $(m+2)$ عدد موجود با هم تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، در این صورت قدر نسبت این دنباله از رابطه زیر به دست می آید: $(a < b)$

$$d = \frac{b-a}{m+1}$$

جمله اول a b جمله $(m+2)$ ام

توجه اگر دقت کرده باشی این همون رابطه $d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$ هستش که چند صفحه قبل یادش گرفتیم.

مثال: می خواهیم بین دو عدد -3 و 17 ، چهار عدد قرار بدهیم به طوری که شش عدد حاصل، تشکیل دنباله حسابی بدهند، در این صورت داریم:

$$d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{17 - (-3)}{4+1} = \frac{20}{5} = 4$$

حالا که قدر نسبت رو داریم، می تونیم جمله های دنباله رو بنویسیم:

$$-3, 1, 5, 9, 13, 17$$

با فاصله $+4$

چند تا سؤال که ممکنه بپرسن:

واسطه دوم چنده؟ 5

واسطه آخر چنده؟ 13

جمله چهارم دنباله چنده؟ 9

جمع واسطه ها؟ $1 + 5 + 9 + 13 = 28$

جملات مشترک دو دنباله حسابی

اگر a_n یک دنباله حسابی با قدر نسبت d_1 و b_n دنباله حسابی دیگری با قدر نسبت d_2 ، جملات مشترکی داشته باشند، در این صورت جملات مشترک آنها نیز یک دنباله حسابی جدید با ویژگی های زیر تشکیل می دهند:

اولین جمله مشترک دو دنباله a_n و $b_n \Rightarrow$ جمله اول دنباله حسابی جدید

کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) d_1 و $d_2 \Rightarrow$ قدر نسبت دنباله حسابی جدید



دنباله هندسی



معرفی

دنباله هندسی، نوعی از دنباله بازگشتی است که در آن، هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب عددی ثابت و غیر صفر در جمله قبلی اش به دست می آید که این عدد ثابت را **قدرنسبت** دنباله می نامیم و آن را معمولاً با نماد q نمایش می دهیم.

به عنوان مثال، دنباله $2, 6, 18, 54, 162, \dots$ یک دنباله هندسی است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب عدد 3 در جمله قبلی اش به دست می آید که در اینجا، عدد 3 همان قدرنسبت دنباله است. ببینید:

$$\begin{aligned} 2, 6, 18, 54, 162, \dots \\ \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3 \quad \times 3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{قدرنسبت: } q = 3 \\ \text{جمله اول: } a_1 = 2 \end{array} \right.$$

توجه کنید که جمله اول a_1 و قدرنسبت q یک دنباله هندسی باید غیر صفر باشند. $(a_1, q \neq 0)$

جمله عمومی دنباله هندسی

اگر در یک دنباله هندسی، جمله اول را با a_1 و قدرنسبت را با q نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{جمله اول} & & \text{جمله دوم } (a_2) & & \text{جمله سوم } (a_3) & & \text{جمله چهارم } (a_4) & & \text{جمله پنجم } (a_5) & & \text{جمله } n\text{ام } (a_n) \\ a_1 & \xrightarrow{\times q} & a_1 q & \xrightarrow{\times q} & a_1 q^2 & \xrightarrow{\times q} & a_1 q^3 & \xrightarrow{\times q} & a_1 q^4 & \dots & a_1 q^{n-1} \end{array}$$

بنابراین، جمله n ام یک دنباله هندسی که همان جمله عمومی آن می باشد، به صورت زیر تعریف می شود:

$$a_n = a_1 q^{n-1}; (n \in \mathbb{N})$$

$$a_1 = \text{جمله اول}$$

$$a_n = \text{جمله } n\text{ام}$$

$$q = \text{قدرنسبت}$$

$$n = \text{شماره جمله}$$

توجه کنید که در جمله عمومی یک دنباله هندسی توان قدرنسبت، یک عبارت درجه اول بر حسب n بوده که ضریب n در آن برابر 1 است.

قدرنسبت دنباله هندسی

1 می دانیم که جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است و در آن، عددی که به توان $(n-1)$ می رسد، قدرنسبت دنباله است. به طور کلی می توان گفت که اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به فرم $a_n = a_1 q^{(bn+c)}$ باشد، قدرنسبت آن برابر $(q)^n$ است.

به عنوان مثال، در دنباله $a_n = \sqrt{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2n}$ ، داریم:

$$\text{قدرنسبت} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = 9$$

2 اگر a_n و a_{n-1} دو جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، در این صورت حاصل تقسیم a_n بر a_{n-1} ، همان قدرنسبت دنباله است. به عبارت دیگر، اگر دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ بیانگر یک دنباله هندسی باشد، در این صورت حاصل تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر قدرنسبت دنباله است. یعنی:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

به عنوان مثال، در دنباله هندسی $2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 1, \dots$ قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3 اگر a_m و a_n دو جمله (متوالی یا غیرمتوالی) از یک دنباله هندسی باشند، در این صورت برای به دست آوردن قدرنسبت دنباله از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$



فصل اول : مباحث پایه (دنباله هندسی)

به عنوان مثال، در یک دنباله هندسی، اگر جمله هفتم برابر $-\frac{1}{2}$ و جمله چهارم برابر $\frac{1}{16}$ باشد، در این صورت قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$\begin{cases} a_7 = -\frac{1}{2} \\ a_4 = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{a_7}{a_4} = q^{7-4} = q^3 \Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{16}} = q^3 \Rightarrow q^3 = -8 \Rightarrow q = -2$$

۴ برای تشخیص نوع دنباله هندسی (صعودی، نزولی، ثابت و ...) به کمک علامت جمله اول و نیز علامت قدرنسبت، داریم:

نمونه	ویژگی دنباله	جمله اول	قدرنسبت
$(q = -\frac{1}{2})$ $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$	جملات دنباله یکی در میان مثبت و منفی هستند. (نه صعودی و نه نزولی)	به جمله اول بستگی ندارد.	$q < 0$
$(q = \frac{1}{3})$ $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots$	نزولی (کاهشی)	$a_1 > 0$	$q > 0$
$(q = \frac{1}{3})$ $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \dots$	صعودی (افزایشی)	$a_1 < 0$	
$(q = 1)$ $3, 3, 3, 3, \dots$	ثابت (هم صعودی و هم نزولی)	به جمله اول بستگی ندارد.	
$(q = 2)$ $2, 4, 8, 16, \dots$	صعودی (افزایشی)	$a_1 > 0$	
$(q = 2)$ $-1, -2, -4, -8, \dots$	نزولی (کاهشی)	$a_1 < 0$	$q > 1$

با توجه به جدول فوق، می توان نتیجه گرفت که در یک دنباله هندسی، اگر همه جملات مثبت، یا همه جملات منفی باشند، قدرنسبت دنباله مثبت است.

✓ اگر به عددی به طور متوالی n درصد اضافه شود، اعداد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی با قدرنسبت $q = 1 + \frac{n}{100}$ می دهند.

✓ اگر از عددی به طور متوالی n درصد کاسته شود، اعداد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی با قدرنسبت $q = 1 - \frac{n}{100}$ می دهند.

حاصل ضرب جملات دنباله هندسی

اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ جملات یک دنباله هندسی باشند، در این صورت حاصل ضرب آنها برابر است با:

$$A = a_1 a_2 a_3 \dots a_n = a_1 (a_1 q) (a_1 q^2) (a_1 q^3) \dots (a_1 q^{n-1})$$

$$A = a_1^n (q^1 \times q^2 \times q^3 \times \dots \times q^{n-1}) = a_1^n (q^{1+2+3+\dots+(n-1)}) = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

در نتیجه:

$$\text{حاصل ضرب جملات دنباله هندسی} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

توجه کنید که مجموع اعداد ۱ تا $(n-1)$ برابر است با: $\frac{n(n-1)}{2}$

بهتره اینطوری هم بلد باشید:

n	حاصل ضرب جملات دنباله هندسی
فرد	a_1^n (جمله وسط)
زوج	$a_1^{\frac{n}{2}} \times a_n^{\frac{n}{2}}$ (جمله آخر $\times$ جمله اول)



واسطه هندسی

اگر c و b و a به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند در این صورت، b را واسطه هندسی a و c می‌گوییم و داریم:

$$b^2 = ac \Rightarrow b = \pm \sqrt{ac}$$

به عنوان مثال، واسطه هندسی بین دو عدد $\frac{1}{27}$ و 3 برابر است با:

$$b^2 = ac \Rightarrow b^2 = 3 \times \frac{1}{27} = \frac{1}{9} \Rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

توجه اگر فاصله بین جملات یک دنباله هندسی با هم برابر باشند نیز می‌توان از رابطه بالا استفاده کرد. به عبارت دیگر، اگر a_n, a_m و a_p سه جمله از یک دنباله هندسی باشند، به طوری که فاصله بین سه جمله با هم برابر باشد، در این صورت داریم:

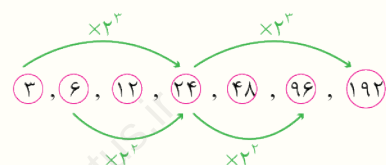
$$a_n, \dots, a_m, \dots, a_p \quad \begin{matrix} \times q^k & \times q^k \end{matrix} \quad a_m^2 = a_n a_p$$

به عنوان مثال، اگر a_1, a_2, a_3 سه جمله (غیرمتوالی) از یک دنباله هندسی باشند، در این صورت، چون فاصله جمله سوم با جمله دوازدهم، و نیز فاصله جمله دوازدهم با جمله بیست و یکم با هم برابر است، بنابراین جمله دوازدهم واسطه هندسی بین جمله سوم و جمله بیست و یکم است. به عبارت دیگر:

$$a_1, \dots, a_{12}, \dots, a_{21} \Rightarrow a_{12}^2 = a_3 a_{21} \quad \begin{matrix} \times q^9 & \times q^9 \end{matrix}$$

به مثال دیگه ...

در دنباله هندسی $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192$ که قدرنسبت دنباله برابر 2 است، داریم:



می‌دانیم که جملات a_1, a_4, a_7 متساوی‌الفاصله هستند، پس: $a_4^2 = a_1 a_7$

می‌دانیم که جملات a_2, a_4, a_6 نیز متساوی‌الفاصله هستند، پس: $a_4^2 = a_2 a_6$

قانون اندیس‌ها

در بعضی از سوالات، حاصل ضرب دو یا چند جمله از دنباله هندسی را در اختیار داریم. در این گونه از مسائل می‌توانیم به کمک قانون اندیس‌ها، به جای حاصل ضرب این جملات، حاصل ضرب چند جمله دیگر از دنباله را جایگزین کنیم. حالا این قانون به ما چی می‌ده؟ فرض کنید a_m, a_n, a_p, a_q جملات یک دنباله هندسی باشند، اگر $m+n=p+q$ باشد، در این صورت:

$$m+n=p+q \Leftrightarrow a_m a_n = a_p a_q$$

البته به شرطی که:

جمع اندیس جملات سمت چپ تساوی با جمع اندیس جملات سمت راست با هم برابر باشند.

تعداد جملات هر دو طرف تساوی با هم برابر باشند.

به عنوان مثال، فرض کنید که در یک سوال، $a_7 \times a_2$ را به ما داده باشند. می‌خواهیم ببینیم که به جای آن حاصل ضرب چه جمله‌های دیگری را می‌توانیم قرار دهیم:

$$a_7 a_2 \stackrel{2+7=1+8}{=} a_1 a_8 \quad a_7 a_2 \stackrel{2+7=3+6}{=} a_3 a_6 \quad a_7 a_2 \stackrel{2+7=4+5}{=} a_4 a_5$$

حال، اگر حاصل ضرب n تا جمله از دنباله هندسی رو داشته باشیم و جمع اندیس این جمله‌ها k برابر تعداد جمله‌ها باشد، در این صورت می‌توانیم به جای حاصل ضرب این n تا جمله بنویسیم: a_k^n

به عنوان مثال، فرض کنید که حاصل ضرب سه جمله a_3, a_5 و a_7 رو داشته باشیم. همان‌طور که می‌بینید، جمع اندیس این سه تا جمله 15 میشه (5 برابر 3 تا جمله‌مون یعنی $k=5$ و $n=3$)، پس می‌توانیم به جای حاصل ضرب این 3 تا جمله بنویسیم: a_5^3

$$a_3 a_5 a_7 \stackrel{3+5+7=3 \times 5}{k=5, n=3} a_5 a_5 a_5 = a_5^3$$

به مثال دیگه ...

$$a_2 a_3 a_5 a_7 a_9 a_{11} \stackrel{2+3+5+7+9+11=6 \times 6}{k=6, n=6} a_6 a_6 a_6 a_6 a_6 a_6 = a_6^6$$



یک ویژگی مهم در دنباله هندسی

گاهی اوقات در برخی از سوالات مربوط به دنباله هندسی، اطلاعاتی را درباره مجموع، حاصل ضرب و ... جملات دنباله را به ما می دهند و خواسته ای را مطرح می کنند، در این گونه از سوالات، با توجه به متوالی یا غیرمتوالی بودن جملات دنباله داریم:

حالت اول: اگر اطلاعات مسئله درباره جملات متوالی دنباله هندسی باشد، جملات دنباله را به صورت زیر فرض کرده و سوال را حل می کنیم:

حاصل ضرب جملات	قدرنسبت	جملات	سه جمله متوالی
x^3	q	$\frac{x}{q}, x, xq$	
x^4	q^2	$\frac{x}{q^3}, \frac{x}{q}, xq, xq^3$	چهار جمله (هم علامت) متوالی
x^5	q	$\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2$	پنج جمله متوالی

حالت دوم: اگر اطلاعات مسئله درباره جملات غیرمتوالی دنباله هندسی باشد، در این صورت با توجه به شرایط مسئله، تمامی جملات را برحسب یکی از جمله ها تشکیل داده و سوال را حل می کنیم.

به عنوان مثال، فرض کنید که جملات سوم، هفتم و دهم یک دنباله هندسی را در اختیار داریم و می خواهیم که تمامی جمله ها را برحسب یک جمله (مثلاً برحسب جمله سوم) بنویسیم. می دانیم که اگر جمله سوم را در q^4 ضرب کنیم، جمله هفتم به دست می آید، پس جمله هفتم را می توان به صورت $a_7 = a_3 q^4$ (برحسب جمله سوم) نوشت و یا اینکه اگر جمله هفتم را در q^3 ضرب کنیم، جمله دهم حاصل می شود، پس جمله دهم را می توان به فرم $a_{10} = a_7 q^3$ (برحسب جمله هفتم) نیز نوشت:

$$a_3, a_7, a_{10} : \begin{cases} \text{همه جملات برحسب } a_3 \rightarrow a_3, a_3 q^4, a_3 q^7 \\ \text{همه جملات برحسب } a_7 \rightarrow \frac{a_7}{q^4}, a_7, a_7 q^3 \\ \text{همه جملات برحسب } a_{10} \rightarrow \frac{a_{10}}{q^7}, \frac{a_{10}}{q^3}, a_{10} \end{cases}$$

درج m واسطه هندسی

اگر بین دو عدد a و b بخواهیم m عدد را چنان قرار بدهیم که $(m+2)$ عدد موجود با هم تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، در این صورت، قدرنسبت این دنباله از رابطه زیر به دست می آید: $(a < b)$

جمله اول $a, \dots, b$ جمله $(m+2)$ ام b

$$q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

مثال: بین دو عدد ۲ و $\frac{1}{64}$ ، شش عدد چنان قرار دهیم که اعداد حاصل جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند.



$$q^{m+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow q^7 = \frac{\frac{1}{64}}{2} = \frac{1}{128} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

به کمک قدرنسبت به دست آمده، جملات دنباله را می نویسیم:

$$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$$

$$\times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

حالا چند تا سوال بپرسم:

واسطه سوم چنده؟ $\frac{1}{4}$

واسطه آخر چنده؟ $\frac{1}{32}$

مجموع واسطه ها چنده؟ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$

جمله ششم دنباله چنده؟ $\frac{1}{16}$



میکس دنباله حسابی و هندسی



برای حل سوالات ترکیبی دنباله حسابی و هندسی به روش زیر عمل می کنیم:

ابتدا با استفاده از رابطه جمله عمومی، جملات **دنباله اولیه** را تشکیل می دهیم.

سپس با توجه به نوع **دنباله ثانویه** و به کمک قاعده واسطه ها (واسطه حسابی یا واسطه هندسی)، سوال را حل می کنیم.

به عنوان مثال، اگر جملات سوم، هفتم و نهم یک دنباله حسابی غیر ثابت، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند و بخواهیم قدرنسبت دنباله هندسی را به دست بیاوریم، به روش زیر عمل می کنیم:

ابتدا با استفاده از رابطه جمله عمومی دنباله حسابی، جملات این دنباله را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \\ a_7 = a_1 + 6d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{cases}$$



از طرفی، می دانیم که a_3, a_7, a_9 ، جملات متوالی یک دنباله هندسی اند، بنابراین به کمک قاعده واسطه هندسی، داریم:

$$t_2 = t_1 t_3 \Rightarrow a_7 = a_3 a_9 \Rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow \cancel{a_1^2} + 12a_1d + 36d^2 = \cancel{a_1^2} + \underbrace{10a_1d}_{10a_1d} + 16d^2 \Rightarrow 2a_1d + 20d^2 = 0 \xrightarrow{\div 2} a_1d + 10d^2 = 0$$

$$\Rightarrow d(a_1 + 10d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \text{ (غ ق ق)} \\ a_1 + 10d = 0 \Rightarrow a_1 = -10d \end{cases}$$

توجه کنید که دنباله حسابی، غیر ثابت است، پس $d = 0$ قابل قبول نیست، چرا که در این صورت، دنباله حسابی، دنباله ای ثابت خواهد بود. از طرفی،

می دانیم که در یک دنباله هندسی قدرنسبت برابر است با: $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ ، پس:

$$q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{a_7}{a_3} = \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 2d} = \frac{-10d + 6d}{-10d + 2d} = \frac{-4d}{-8d} = \frac{1}{2}$$

نکته اگر جملات n ام و m ام و k ام یک دنباله حسابی غیر ثابت $(k > m > n)$ ، به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، در این صورت،

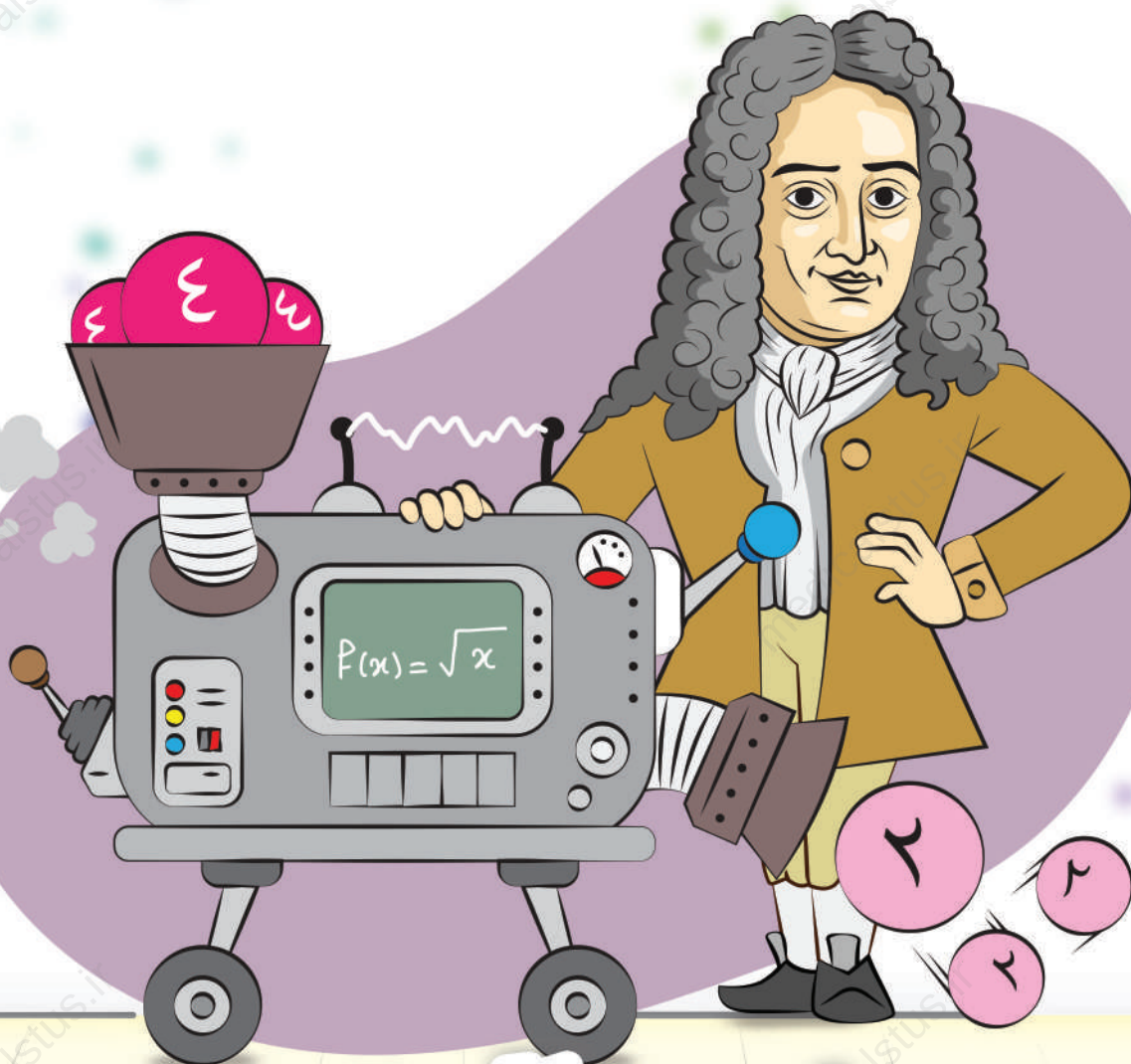
قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با:

$$q = \frac{k-m}{m-n}$$

$$q = \frac{9-7}{7-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

حال، اگر بخواهیم مثال قبل را به کمک رابطه فوق حل کنیم، داریم:

نکته اگر یک دنباله، هم حسابی و هم هندسی باشد، در این صورت، آن دنباله یک **دنباله ثابت** بوده و تمامی جملات آن با هم **برابر** و **مخالف صفر** است.



فصل ۲: تابع

این فصل از جذاب‌ترین و شیرین‌ترین فصل‌های ریاضی هشتش، چون خیلی جمع و جور و خوش تخته و به قول اساتید هنر و سینما، فرم و محتوای خوبی داره، خلاصه کمتر کسی توی این کره خاکی پیدا میشه که با این فصل حال نکنه.

جونم براتون بگم که از این فصل سرجمع حدود ۵ تا ۱۵ تست توی کنکور سوال میاد که واقعاً هر چقدر بخوان سختش کنن باز میشه حلشون کرد پس حواست باشه که توی سوال‌ها سوتی ندی و این تست‌ها رو مال خودت بکنی.

از مهمترین بخش‌های این فصل میشه به بخش‌های انتقال توابع، ترکیب و وارون توابع اشاره کرد. البته یادت باشه که خیلی از وقت‌ها از این فصل به صورت ترکیبی سوال میدن، مثلاً میان تابع لگاریتمی رو میبرن تو فاز انتقال توابع، پس مراقب باش که اخیراً رد پای سوال‌های ترکیبی، توی ریاضی هم مشاهده شده، پس بزرگ بریم که توی این فصل کلی تست‌های خوب انتظارمون رو میکشه پس تا میتونی روی رسم نمودار توابع هم مسلط باش که توی حل خیلی از تست‌ها غوغا می‌کنه و کار رو برامون درمیاره!

کنکور سراسری	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ - نوبت اول	۱۴۰۲ - نوبت دوم
تعداد سؤال	۴	۴	۵	۴	۴
مباحث مطرح شده در سؤال	انتقال نمودار ترکیب توابع تابع وارون (۲ سوال)	دامنه توابع رسم نمودار توابع انتقال توابع تابع وارون و انتقال توابع	اصول توابع انتقال توابع تابع وارون ترکیب توابع توابع صعودی و نزولی	تابع ثابت انتقال توابع وارون و ترکیب توابع دامنه توابع	دامنه توابع ترکیب توابع یکنوایی توابع تابع وارون



زوج مرتب و رابطه

رابطه

زوج مرتب

زوج مرتب



دو تایی (x, y) را **زوج مرتب** می‌نامیم که در آن عضو اول (x) را «مؤلفه اول» و عضو دوم (y) را «مؤلفه دوم» می‌گوییم.
زوج مرتب (x, y) نشان‌دهنده یک نقطه در دستگاه مختصات است که x را **طول نقطه** و y را **عرض نقطه** می‌نامیم.
ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج، مهم است، به عنوان مثال زوج‌های $(1, 2)$ و $(2, 1)$ با هم برابر **نیستند** و دو نقطه متفاوت را در نمودار مختصاتی نشان می‌دهند.

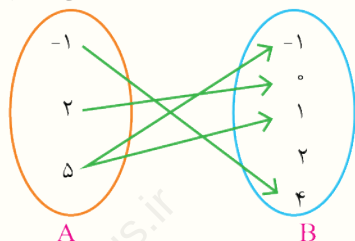
توجه دو زوج مرتب، زمانی با هم برابرند که مؤلفه اول آن‌ها با هم و مؤلفه دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند:

$$(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

رابطه



به مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب که مؤلفه اول آن‌ها از مجموعه A و مؤلفه دوم آن‌ها از مجموعه B باشند، یک رابطه از مجموعه A به مجموعه B می‌گوییم.
به عنوان مثال: اگر بخواهیم از مجموعه $A = \{-1, 2, 5\}$ به مجموعه $B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ یک رابطه بنویسیم، می‌توانیم رابطه R را به صورت زیر نشان دهیم:



$$R = \{(-1, 0), (2, 1), (5, 4)\}$$

توجه همان‌طور که مشخص است یک رابطه می‌تواند مؤلفه اول تکراری داشته باشد.

- توصیفی

- نمایش جدولی

- نمایش زوج مرتبی

- نمایش پیکانی

- نمایش نموداری

روش‌های نمایش یک رابطه

- نمایش ضابطه‌ای (نحوه‌ای از نمایش یک رابطه است که در آن رابطه بین مؤلفه اول و دوم به صورت ضابطه بیان می‌شود)

حال می‌خواهیم، رابطه‌ای را که به هر عدد طبیعی کمتر از ۴، مجذور آن را نسبت می‌دهد، با روش‌های مختلف نمایش دهیم:

زوج مرتبی	جدولی				توصیفی
$R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$	عدد	۱	۲	۳	 رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی کمتر از ۴، مجذور آن را نسبت می‌دهد
	مجذور	۱	۴	۹	

ضابطه‌ای	نموداری	پیکانی
$R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 1 \leq x < 4, y = x^2\}$		

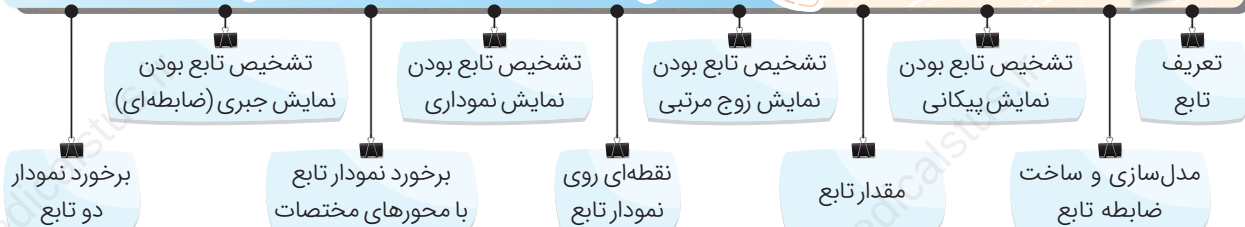


نکته برای به دست آوردن عضوهای یک رابطه، با توجه به شروط گفته شده و محدوده متغیرهای آن، ضابطه آن را مقداردهی می‌کنیم:

$$R = \{(x, y) \mid \underbrace{x, y \in \mathbb{Z}}_{\text{شروط رابطه}}, \underbrace{x + 2y = 5}_{\text{ضابطه}}\}$$

محدوده متغیرهای رابطه

مفهوم تابع و نمایش‌های مختلف آن



تعریف تابع:

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.
مثال:

رابطه	توضیح
رابطه‌ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می‌دهد.	این رابطه یک تابع است چرا که هر فرد دقیقاً یک گروه خونی دارد.
رابطه‌ای که به هر فرد دوستان او را نسبت می‌دهد.	این رابطه بیانگر یک تابع نیست چرا که هر فرد می‌تواند بیش از یک دوست داشته باشد.
رابطه‌ای که به هر عدد حقیقی، ریشه سوم آن را نسبت می‌دهد.	این رابطه یک تابع است چرا که هر عدد حقیقی دقیقاً یک ریشه سوم دارد.

تشخیص تابع بودن نمایش پیکانی:

یک نمایش پیکانی از مجموعه A به مجموعه B، زمانی نشان‌دهنده یک تابع است که از هر عضو مجموعه A، دقیقاً یک پیکان خارج شود.

نکته از هر عضو مجموعه A نباید بیش از یک پیکان خارج شود، و تنها در صورتی این اتفاق می‌تواند رخ بدهد که عضوایی از مجموعه B که به آن‌ها پیکان وارد می‌شود، با هم برابر باشند.

نکته از تمامی عضوهای مجموعه A، حتماً باید پیکانی خارج شود. (هیچ عضوی از مجموعه A نباید alone بماند)
ممکن است به تعدادی از عضوهای مجموعه B، پیکانی وارد نشود یا بیش از یک پیکان وارد شود، که در این صورت مشکلی در تابع بودن رابطه ایجاد نمی‌کند.

تابع نیست	تابع هست	تابع نیست
چون از عضو c در مجموعه A، پیکانی خارج نشده است.	چون از هر عضو مجموعه A، دقیقاً یک پیکان خارج شده است.	چون از عضو a در مجموعه A، دو پیکان خارج شده است و تنها در صورتی می‌تواند تابع باشد که d = e باشد.

تشخیص تابع بودن نمایش زوج مرتبی

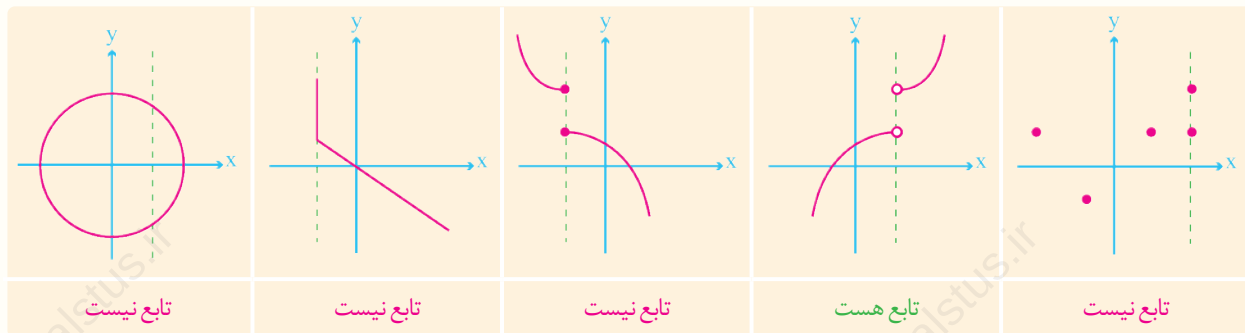
یک نمایش زوج مرتبی زمانی نشان‌دهنده یک تابع خواهد بود که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، مؤلفه اول برابر نداشته باشند.

توجه در نمایش زوج مرتبی یک تابع، اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب با هم برابر باشند، باید مؤلفه دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند.



تشخیص تابع بودن نمایش نموداری

یک نمایش نموداری زمانی نشان دهنده یک تابع خواهد بود که هر خط موازی محور y ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. به عبارت دیگر هر خط موازی محور y ها، یا نمودار تابع را قطع نکند یا فقط در یک نقطه قطع کند.



تشخیص تابع بودن نمایش جبری (ضابطه‌ای)

نمایش جبری (ضابطه‌ای) یک تابع، رابطه‌ای بین ورودی‌های تابع (x) و خروجی آن (y) است. به عنوان مثال، تابع $f = \{(1,1), (2,3), (3,5), (-1,-3)\}$ را در نظر بگیرید، در این تابع خروجی‌های تابع از دو برابر ورودی‌های آن یک واحد کمتر است. بنابراین می‌توان ضابطه تابع را به صورت $f(x) = 2x - 1$ نشان داد.

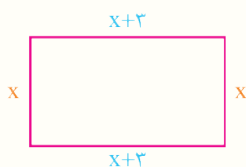


از بحثمون دور نشیم! می‌خواستیم ببینیم که به نمایش ضابطه‌ای کی می‌تونه تابع باشه. نمایش ضابطه‌ای یک رابطه زمانی نشان دهنده یک تابع است که به ازای هر مقدار دلخواهی که برای x در نظر می‌گیریم، حداکثر یک مقدار برای y حاصل شود. حال برای این که نشان دهیم یک ضابطه مربوط به یک تابع نیست، سعی می‌کنیم که با استفاده از مثال نقض، مقداری برای x معرفی کنیم که به ازای آن مقدار، دو یا چند مقدار برای y به دست بیاید، به عنوان مثال ضابطه $y^2 - 3 = x$ مربوط به یک تابع نیست، چرا که به ازای $x = 1$ ، مقادیر $y = 2$ و $y = -2$ برای y به دست می‌آید.

توجه: از روش مثال نقض برای اثبات تابع بودن یک رابطه نمی‌توان استفاده کرد و فقط از آن برای نشان دادن تابع نبودن یک رابطه کمک می‌گیریم.

مدل سازی و ساخت ضابطه تابع

در برخی از مواقع باید به کمک توصیفی که سؤال از تابع ارائه می‌کند، خودمان ضابطه را تشکیل دهیم. به عنوان مثال، فرض کنید طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است و می‌خواهیم تابع f که محیط این مستطیل را برحسب عرض آن بیان می‌کند، تشکیل دهیم. برای این کار ابتدا عرض مستطیل را برابر x فرض می‌کنیم که در این صورت طول آن برابر $x + 3$ بوده و تابع f که محیط این مستطیل را برحسب عرض آن نشان می‌دهد، برابر است با:



$$f(x) = 4x + 6 \Rightarrow f(x) = 2x + 2(x + 3) = \text{محیط مستطیل}$$

مقدار تابع

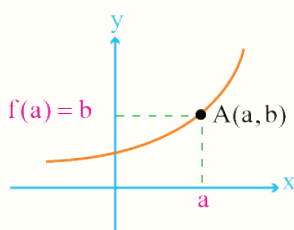
اگر f یک تابع و زوج مرتب (a, b) عضوی از تابع f باشد، در این صورت $f(a) = b$ است به عبارت دیگر، b را مقدار تابع f به ازای ورودی a می‌گوییم:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow f(a) = b$$

در حالت کلی اگر ضابطه تابع $f(x)$ را داشته باشیم و بخواهیم مقدار تابع f را به ازای $x = \square$ به دست بیاوریم، در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $x = \square$ را قرار می‌دهیم.

نقطه‌ای روی نمودار تابع

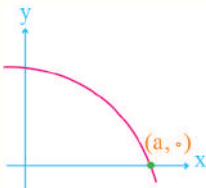
هر نقطه‌ای که روی نمودار تابع قرار داشته باشد، مختصات آن نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند. به عبارت دیگر اگر تابع f از نقطه A به مختصات $A(a, b)$ عبور کند، در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که $f(a) = b$ است.



$$(a, b) \in f \Leftrightarrow f(a) = b$$



برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات



حالت اول: اگر نمودار تابع $f(x)$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول $x = a$ قطع کند:

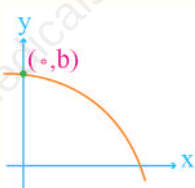
مختصات محل برخورد به صورت $(a, 0)$ خواهد بود.

برای پیدا کردن طول نقطه برخورد، کافی است که معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم.

مثال: می‌خواهیم مختصات محل برخورد نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x - 3$ با محور x ها را پیدا کنیم، برای این منظور باید معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

بنابراین مختصات محل برخورد نمودار تابع f با محور x ها به صورت $(1, 0)$ و $(-3, 0)$ است.



حالت دوم: اگر نمودار تابع $f(x)$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض $y = b$ قطع کند:

مختصات محل برخورد به صورت $(0, b)$ خواهد بود.

برای پیدا کردن عرض نقطه برخورد، کافی است که در ضابطه تابع به جای تمامی x ها، $x = 0$ را قرار دهیم، به عبارت دیگر باید $f(0)$ را محاسبه کنیم.

مثال: می‌خواهیم مختصات محل برخورد تابع $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$ با محور y ها را پیدا کنیم، می‌دانیم که باید در ضابطه تابع به جای تمامی x ها، $x = 0$ را قرار دهیم، پس:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 2 \xrightarrow{x=0} f(0) = \sqrt{0+1} - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow f(0) = -1$$

پس مختصات محل برخورد نمودار تابع f با محور y ها به صورت $(0, -1)$ است.

برخورد نمودار دو تابع



اگر نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ همدیگر را در نقطه A به مختصات $A(a, b)$ قطع کنند:

مختصات نقطه A در ضابطه هر دو تابع صدق می‌کند یعنی:

$$\begin{cases} f(a) = b \\ g(a) = b \end{cases} \Rightarrow f(a) = g(a) = b$$

۲ برای پیدا کردن طول نقطه برخورد، کافی است که ضابطه هر دو تابع f و g را با هم برابر قرار داده و معادله $f(x) = g(x)$ را حل کنیم تا طول نقطه برخورد به دست آید، سپس با جایگذاری طول نقطه برخورد در ضابطه یکی از توابع f یا g ، عرض نقطه برخورد نیز به دست می‌آید.



مفهوم دامنه و برد توابع



برد تابع

دامنه تابع

دامنه تابع

به مجموعه مقادیری که متغیر x در تابع $y = f(x)$ می تواند بپذیرد، دامنه تابع می گوییم و معمولاً آن را با نماد D_f نمایش می دهیم. در جدول زیر دامنه چند نمونه تابع را با نمایش های مختلف ببینید:

نمایش به صورت	تابع	دامنه تابع
زوج مرتبی	$f = \left\{ \left(5, 3 \right), \left(4, 1 \right), \left(6, \frac{2}{3} \right), \left(3, 0 \right) \right\}$	$D_f = \{ 5, 4, 6, 3 \}$ مجموعه همه مؤلفه های اول
پیکانی		$D_g = \{ a, b, c \}$ همه عضوهای مجموعه اول
نموداری		$D_h = [-2, 4)$ تصویر نمودار روی محور x ها

برد تابع

به مجموعه مقادیری که به ازای ورودی های x از تابع $f(x)$ خارج می شوند، برد تابع f می گوییم و معمولاً آن را با نماد R_f نشان می دهیم. در جدول زیر برد چند نمونه تابع را با نمایش های مختلف ببینید:

نمایش به صورت	تابع	برد تابع
زوج مرتبی	$f = \left\{ \left(2, -1 \right), \left(3, 0 \right), \left(-1, 1 \right), \left(4, \frac{1}{2} \right) \right\}$	$R_f = \left\{ -1, 0, 1, \frac{1}{2} \right\}$ مجموعه همه مؤلفه های دوم
پیکانی		$R_g = \{ 4, 5, 7 \}$ عضوهایی از مجموعه دوم که به آنها پیکانی وارد می شود.
نموداری		$R_h = [-2, 3)$ تصویر نمودار روی محور y ها

تعداد اعضای دامنه، همواره بزرگ تر یا مساوی تعداد اعضای برد است. به عبارت دیگر: $n(D) \geq n(R)$



انواع تابع



تابع	تابع	تابع	تابع	تابع	تابع	تابع	تابع	تابع	تابع	تابع	تابع	تابع
هموگرافیک	مثلاثاتی	دامنه توابع قدر	مطلق و براکتی	ضابطه‌ای	لگاریتمی	نمایی	رادیکالی	گویا	خطی	همانی	ثابت	چند جمله‌ای

تابع چند جمله‌ای

تعریف: به طور کلی توابع به فرم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ عددی حقیقی، $a_n \neq 0$ و n عددی حسابی باشد را یک چند جمله‌ای از درجه n می‌گوییم. به عبارت دیگر:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ; \begin{cases} a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \mathbb{R} \\ a_n \neq 0 \\ n \in \mathbb{W} \end{cases}$$

درجه چند جمله‌ای:

در یک چند جمله‌ای، بزرگترین توان x را درجه چند جمله‌ای می‌نامیم.

دامنه و برد توابع چند جمله‌ای:

دامنه توابع چند جمله‌ای در حالت کلی برابر $\mathbb{R}$ است اما برد توابع چند جمله‌ای، به نوع چند جمله‌ای بستگی دارد. در جدول زیر چند نمونه از چند جمله‌ای‌های معروف را ببینید:

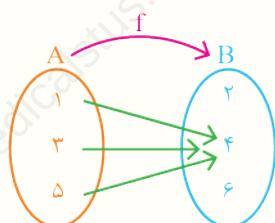
نمونه	نوع چند جمله‌ای	تابع
$f(x) = -1$	چند جمله‌ای درجه صفر (تابع ثابت)	$f(x) = k$
$f(x) = 3x - 1$	چند جمله‌ای درجه یک (تابع خطی)	$f(x) = ax + b ; a \neq 0$
$f(x) = x^2 - 2x + 1$	چند جمله‌ای درجه دو (تابع سهمی)	$f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	چند جمله‌ای درجه سه	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d ; a \neq 0$

تابع ثابت

معرفی: تابع ثابت، تابعی است که به ازای تمامی ورودی‌ها، تنها یک عدد ثابت را به عنوان خروجی در اختیار ما قرار می‌دهد به عبارت دیگر برد تابع ثابت تنها شامل یک عضو می‌باشد.

نمایش‌های مختلف تابع ثابت:

نمایش جبری (ضابطه‌ای): ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x) = k$ می‌باشد که در آن k عددی حقیقی و ثابت است. به عنوان مثال توابع $f(x) = 2$ و $f(x) = -\sqrt{3}$ همگی توابع ثابتی هستند.



نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع ثابت، همه پیکان‌ها از مجموعه A ، فقط به یک عضو از مجموعه B وصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} D_f &= \{1, 3, 5\} \\ R_f &= \{4\} \end{aligned}$$

نمایش زوج مرتبی: در نمایش زوج مرتبی یک تابع ثابت، مؤلفه‌های دوم تمامی زوج مرتب‌ها با هم برابر است.

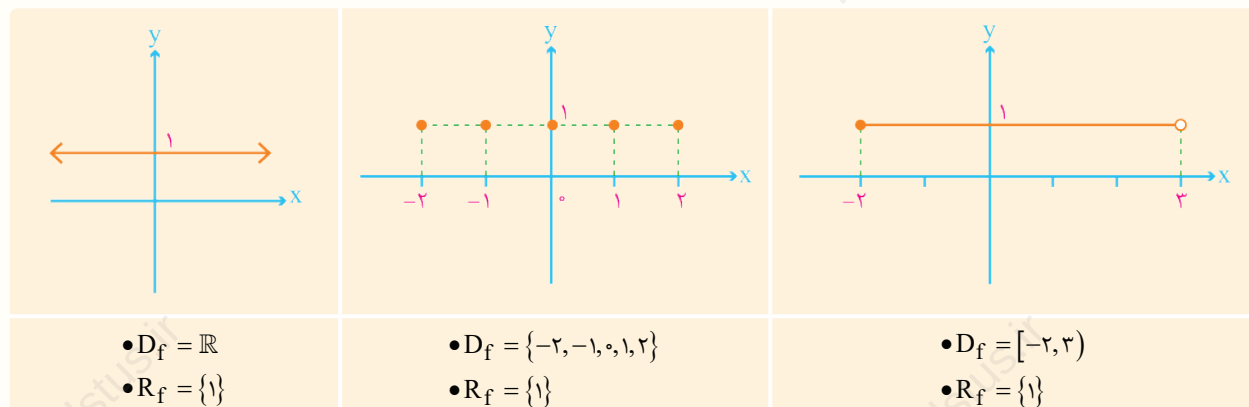
$$f(x) = \{(2, 3), (0, 3), (-1, 3)\} \quad \begin{aligned} D_f &= \{-1, 0, 2\} \\ R_f &= \{3\} \end{aligned}$$

نمایش نموداری:

(الف) با دامنه $\mathbb{R}$: در این حالت نمودار تابع ثابت، خط افقی $y = k$ است.



(ب) با دامنه محدود: در این حالت نمودار تابع ثابت، بخشی از خط افقی $y = k$ یا نقاطی روی این خط است.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \dots = \frac{m}{m'} = k$$

اگر تابع $f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + m}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + m'}$ تابع ثابت $y = k$ باشد در این صورت باید:

تابع همانی

معرفی: تابع همانی، تابعی است که هر عضو از دامنه را دقیقاً به همان عضو در برد، نظیر می‌کند به عبارت دیگر دامنه و برد تابع همانی با هم برابر است.

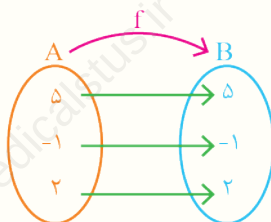
■ نمایش‌های مختلف تابع همانی:

$$f(-3) = -3$$

نمایش جبری (ضابطه‌ای): ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. برای مثال:

$$f(-x+2) = -x+2$$

نمایش پیکانی: در نمایش پیکانی تابع همانی هر پیکان از مجموعه A، به همان عضو در مجموعه B وارد می‌شود.



$$D_f = R_f = \{5, -1, 2\}$$

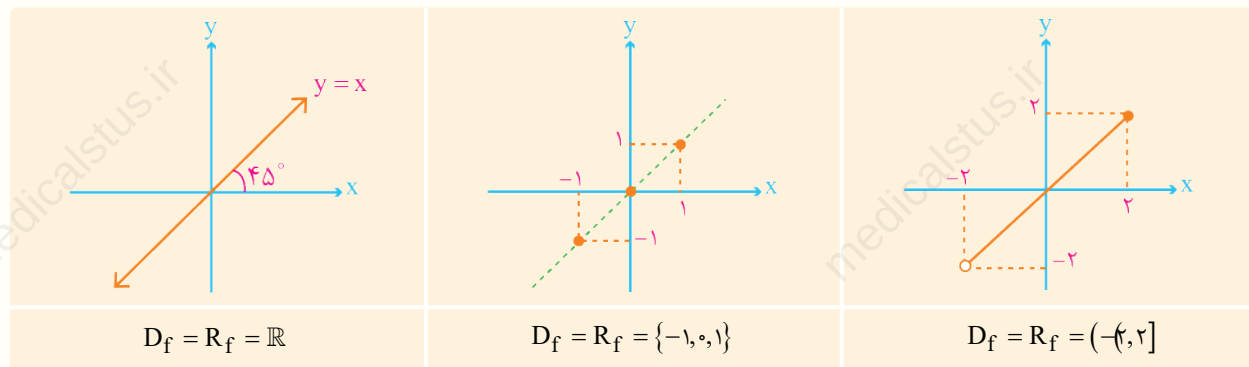
نمایش زوج مرتبی: در نمایش زوج مرتبی تابع همانی، تمامی زوج مرتب‌ها، مؤلفه اول و دوم برابری دارند.

$$f(x) = \{(-2, -2), (1, 1), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\} \quad D_f = R_f = \{-2, 1, \sqrt{2}\}$$

نمایش نموداری:

(الف) با دامنه $\mathbb{R}$: در این حالت نمودار تابع همانی، همان نیمساز ناحیه اول و سوم ($y = x$) است.

(ب) با دامنه محدود: در این حالت نمودار تابع همانی، بخشی از نیمساز ناحیه اول و سوم یا سوم یا نقاطی روی این خط است.





تابع خطی

هر تابع که بتوان آن را به صورت $f(x) = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می شود ($a, b \in \mathbb{R}$). در این رابطه a را شیب و b را عرض از مبدأ می نامیم.

به عنوان مثال، توابع $y = 3$ و $y = -2x + 1$ خطی هستند اما توابع $y = \sqrt{x+3}$ و $y = x|x-1|$ خطی نیستند.

📌 قوی جدول زیر انواع توابع خطی رو می بینید:

$a < 0$	$a > 0$	$a = 0$
تابع خطی نزولی	تابع خطی صعودی	تابع ثابت

دامنه و برد تابع خطی:

✓ دامنه و برد یک تابع خطی در حالت کلی برابر $\mathbb{R}$ است (به جز در مواردی که خود سؤال، دامنه و برد تابع خطی را محدود کرده باشد).

✓ اگر دامنه تابع خطی $f(x) = ax + b$ ، به صورت $[\alpha, \beta]$ باشد، در این صورت برای به دست آوردن برد این تابع خطی داریم:

$a < 0$	$a > 0$	
		نمودار
$[f(\beta), f(\alpha)]$	$[f(\alpha), f(\beta)]$	برد

💡 نکته: اگر مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را روی نمودار تابع خطی داشته باشیم، برای نوشتن ضابطه آن به دو روش زیر عمل می کنیم:

روش اول: به کمک مختصات دو نقطه

مختصات نقاط داده شده را در رابطه $y = ax + b$ جایگذاری می کنیم سپس با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول، مقادیر a و b را به دست می آوریم.

روش دوم: به کمک شیب خط و مختصات یک نقطه

✓ ابتدا به کمک مختصات نقاط داده شده، شیب خط را پیدا می کنیم.

$$m = \text{شیب خط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

✓ سپس با داشتن شیب خط و مختصات یکی از نقاط، ضابطه تابع (معادله خط) را با استفاده از رابطه زیر تشکیل می دهیم.

$$\text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0)$$

💡 نکته: می دانیم که در یک تابع خطی، شیب خط همواره مقدار ثابتی است بنابراین برای این که نمایش زوج مرتبی یک تابع، بیانگر یک تابع خطی باشد،

باید نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، برای هر دو زوج مرتب دلخواه، مقدار ثابتی باشد.



تابع گویا



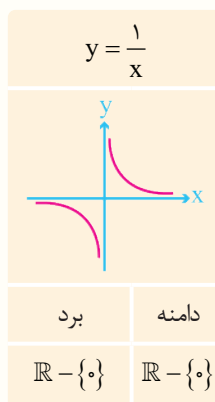
هر تابع به فرم $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای بوده و $q(x) \neq 0$ باشد را یک تابع گویا می‌نامیم.

به عنوان مثال، توابع $y = \frac{x+3}{x-2}$ ، $y = \frac{1}{x-1}$ و $y = 3x$ توابعی گویا هستند اما تابع $y = \frac{2\sqrt{x}+3}{x^2-1}$ تابعی گویا نیست. (دلیلش هم اینه که

عبارت $2\sqrt{x}+3$ که در صورت کسر قرار داره چندجمله‌ای نیست. چرا که توان x تو اون برابر $\frac{1}{2}$ هست، در حالی که می‌دونیم توان x تو چندجمله‌ای‌ها باید عددی صحیح و نامنفی باشه!)

بچه معروفشون...

شناخته‌شده‌ترین تابع گویا، تابع $y = \frac{1}{x}$ می‌باشد.



دامنه توابع گویا:

برای پیدا کردن دامنه توابع گویا به فرم $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابع چندجمله‌ای هستند، ریشه‌های عبارت مخرج کسر را (در صورت وجود) پیدا کرده و آن‌ها را از مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) حذف می‌کنیم. به عبارت دیگر:

$$D_f = \mathbb{R} - \{x | Q(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج کسر}\}$$

توجه: برای به دست آوردن دامنه یک تابع (حالا هر تابعی، کسری، رادیکالی و ...)، به هیچ عنوان **حق ساده کردن ضابطه تابع را نداریم.**

توجه: اگر در توابع گویا، مخرج کسر ریشه نداشته باشد، دامنه آن برابر $\mathbb{R}$ خواهد بود.

نکته: در توابع گویا، اگر صورت و مخرج کسر ریشه مشترک $x = a$ داشته باشند، نمودار تابع در نقطه‌ای به طول $x = a$ ، توخالی خواهد بود. ببینید:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} \Rightarrow f(x) = x+1; x \neq 2$$

تابع رادیکالی



هر تابعی را که در آن متغیر تابع در زیر رادیکال قرار گرفته باشد، تابع رادیکالی می‌گوییم.

به عنوان مثال، توابع $y = \sqrt[3]{1-x}$ ، $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و $y = \sqrt{\frac{x-3}{2x+1}}$ نمونه‌هایی از توابع رادیکالی هستند.

توجه کنید تابعی که در ضابطه آن رادیکال وجود داشته باشد و قابل ساده شدن به یک عبارت غیر رادیکالی باشد را نمی‌توان به عنوان یک تابع رادیکالی معرفی کرد. به عنوان مثال، تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ یک تابع رادیکالی نیست چرا که ضابطه این تابع را می‌توان به یک عبارت غیر رادیکالی تبدیل کرد. ببینید:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$$

حالا ببینیم نمودار چند تابع رادیکالی معروف رو با هم ببینیم



ضابطه	$y = \sqrt{x}$	$y = -\sqrt{x}$	$y = \sqrt{-x}$	$y = -\sqrt{-x}$
نمودار				
دامنه	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0]$
برد	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$	$(-\infty, 0]$

ضابطه	$y = \sqrt{ x }$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{a^2 - x^2}$
نمودار				
دامنه	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$	$[-a, a]$
برد	$[0, +\infty)$	$\mathbb{R}$	$(0, +\infty)$	$[0, a]$

■ دامنه توابع رادیکالی:

برای پیدا کردن دامنه توابع رادیکالی، با توجه به فرجه رادیکال داریم:

اگر فرجه رادیکال فرد باشد، دامنه تابع با دامنه عبارت زیر رادیکال برابر است. به عبارت دیگر، رادیکال فرجه فرد را نادیده می گیریم و فقط دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست می آوریم.

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow D_f = D_g$$

به عنوان مثال، برای پیدا کردن دامنه تابع $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$ ، کافی است که رادیکال را نادیده گرفته و فقط دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست بیاوریم:

$$g(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} 1-x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

اگر فرجه رادیکال زوج باشد، برای پیدا کردن دامنه تابع، مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱ دامنه عبارت زیر رادیکال را به دست می آوریم. (D_g)

۲ عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار می دهیم و مجموعه جواب آن را به دست می آوریم. ($g(x) \geq 0$)، دقت کنید که اگر رادیکال با فرجه زوج در مخرج کسر باشد، باید عبارت زیر رادیکال رو بزرگ تر صفر بذاریم. خب معلومه زیاده، مخرج کسره نمیتونه صفر باشه!

۳ از محدوده های به دست آمده در مراحل ۱ و ۲، اشتراک می گیریم.

$$f(x) = \sqrt[2]{g(x)} \Rightarrow D_f = \{x \mid x \in D_g, g(x) \geq 0\}$$

به عنوان مثال، برای به دست آوردن دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{3-x}}$ ، داریم:

$$g(x) = \frac{x-2}{3-x} \xrightarrow{\text{ریشه مخرج}} 3-x=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{3\}$$

ابتدا دامنه عبارت زیر رادیکال را پیدا می کنیم:

حال، عبارت زیر رادیکال را بزرگ تر یا مساوی صفر قرار می دهیم و مجموعه جواب آن را به دست می آوریم:

$$\frac{x-2}{3-x} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x \in [2, 3]$$

در نهایت از مجموعه جواب های به دست آمده در مراحل قبل، اشتراک می گیریم:

$$(\mathbb{R} - \{3\}) \cap [2, 3] = [2, 3) \Rightarrow D_f = [2, 3)$$



نکته می‌دانیم که برای پیدا کردن دامنه در توابع به فرم $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ باید $ax^2 + bx + c \geq 0$ باشد، حال با توجه به جدول زیر، داریم:

شرایط	$ax^2 + bx + c \geq 0$	دامنه
α و β ، ریشه‌های عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هستند. x^2 ضریب منفی است. ($a < 0$)		$[\alpha, \beta]$
α و β ، ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هستند. x^2 ضریب مثبت است. ($a > 0$)		$(-\infty, \alpha] \cup [\beta, +\infty)$
عبارت $y = ax^2 + bx + c$ عبارتی از درجه اول است که در آن $a = 0$ بوده و این عبارت به فرم $y = bx + c$ است. $x = \alpha$ ، ریشه معادله $bx + c = 0$ است.		$(-\infty, \alpha]$ یا $[\alpha, +\infty)$
عبارت $y = ax^2 + bx + c$ همواره نامنفی است، یعنی در آن $\Delta \leq 0$ و $a > 0$ است.		$\mathbb{R}$

نکته در توابع به فرم $f(x) = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ، اگر دامنه تابع، تمامی اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) باشد، در این صورت، عبارت درجه دوم زیر رادیکال باید همواره مثبت باشد، به عبارت دیگر در عبارت درجه دوم زیر رادیکال باید $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد.

تابع نمایی

هر تابع با ضابطه $y = a^{f(x)}$ را که در آن a (پایه تابع نمایی)، یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد، یک تابع نمایی می‌گوییم.

$$y = a^{f(x)} ; \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

به عنوان مثال، توابع $y = 3^x$ ، $y = (\sqrt{5})^{3x}$ و ... توابع نمایی هستند ولی تابع $y = (-\frac{1}{2})^x$ نمایی نیست، چرا که پایه تابع نمایی نمی‌تواند مقداری منفی باشد.

دامنه تابع نمایی:

دامنه یک تابع نمایی به فرم $y = a^{f(x)}$ ؛ ($a > 0, a \neq 1$) با دامنه تابع $f(x)$ برابر است. به عبارت دیگر:

$$y = a^{f(x)} \Rightarrow D_y = D_f$$

به عنوان مثال، دامنه تابع $y = (\frac{1}{2})^{\sqrt{x}}$ با دامنه تابع $y = \sqrt{x}$ برابر است. پس: $D_y = [0, +\infty)$

توجه گاهی وقتاً قوی سوالاتی تعیین دامنه برای توابع نمایی، لازمه که نامعادله‌های نمایی رو بلد باشیم..

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} a > 1: & f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1: & f(x) < g(x) \end{cases}$$

به عبارتی، اگر دو طرف نامساوی، پایه‌ها بیشتر از یک باشد، با حذف پایه‌ها از دو طرف، جهت نامساوی عوض نمی‌شود ولی اگر پایه‌ها در دو طرف نامساوی بین صفر و یک باشد، با برداشتن پایه‌ها، جهت نامساوی عوض می‌شود. ببینید:

$$(\sqrt{5})^x > (\sqrt{5})^3 \xrightarrow[\text{جهت عوض نمیشه}]{\sqrt{5} > 1} x > 3$$

$$(0/1)^x < (0/1)^2 \xrightarrow[\text{جهت عوض میشه}]{0 < 0/1 < 1} x > 2$$



تابع لگاریتمی

تابع $y = \log_{g(x)}^{f(x)}$ را تابع لگاریتمی می‌نامیم که در آن $f(x) > 0$ ، $g(x) > 0$ و $g(x) \neq 1$ است.

دامنه تابع لگاریتمی:

برای به دست آوردن دامنه تابع لگاریتمی $y = \log_{g(x)}^{f(x)}$ ، باید شروط زیر را بررسی کنیم:

- $f(x) > 0$
- $g(x) > 0$
- $g(x) \neq 1$

پس از حل نامساوی‌های فوق، برای به دست آوردن دامنه تابع، باید بین جواب‌های به دست آمده اشتراک بگیریم. به عبارت دیگر:

$$y = \log_{g(x)}^{f(x)} \Rightarrow D_y = \{x | f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1\}$$

نکته هرگاه دامنه تابع $y = \log_c^{(ax+b)}$ به صورت $(-\infty, k)$ یا به صورت $(k, +\infty)$ باشد، در آن صورت، $x = k$ ریشه عبارت $(ax+b)$ است.

نکته در حل برخی از سوالات دامنه، نیاز داریم که برای از بین بردن لگاریتم، از نامعادله‌های زیر استفاده کنیم. برای این کار با توجه به مبنای لگاریتم، داریم:

$$\log_a^{f(x)} > b \Rightarrow \begin{cases} a > 1 & : f(x) > (a)^b \\ 0 < a < 1 & : f(x) < (a)^b \end{cases} \quad \bullet \log_a^{f(x)} > \log_a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 & : f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1 & : f(x) < g(x) \end{cases}$$

تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای)

تابعی است که به ازای محدوده‌های مختلفی از دامنه، دارای ضابطه‌های متفاوتی است.

$$y = \begin{cases} f(x) & ; x \in \bigcirc \\ g(x) & ; x \in \square \\ \vdots & ; x \in \diamond \end{cases}$$

به عنوان مثال، تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ 1-x & ; x < 0 \end{cases}$ یک تابع دوضابطه‌ای است که به ازای ورودی‌های بیشتر یا مساوی صفر ($x \geq 0$) از ضابطه $y = x^2$ و به ازای ورودی‌های کمتر از صفر ($x < 0$) از ضابطه $y = 1-x$ تبعیت می‌کند.

رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای:

برای رسم نمودار توابع چندضابطه‌ای، نمودار هر یک از ضابطه‌ها را با توجه به دامنه آن ضابطه، در یک دستگاه مختصاتی رسم می‌کنیم.

محاسبه مقدار تابع در توابع چندضابطه‌ای:

در توابع چندضابطه‌ای، برای محاسبه مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x = a$ ، ابتدا باید مشخص کنیم که $x = a$ به کدام یک از محدوده‌های داده شده برای x تعلق دارد و سپس از آن ضابطه استفاده کرده و مقدار تابع را به دست می‌آوریم.

بررسی تابع بودن یک رابطه چندضابطه‌ای:

یک رابطه چندضابطه‌ای زمانی بیانگر یک تابع خواهد بود که دو شرط زیر را داشته باشد:

✓ هر کدام از ضابطه‌های آن در دامنه تعریف خود، تابع باشند.

✓ دامنه ضابطه‌ها با هم اشتراکی نداشته باشند و در صورتی که دامنه‌ها با هم اشتراک داشتند، به ازای مقادیر مشترک از دامنه، باید خروجی ضابطه‌ها با هم برابر باشند، به عبارت دیگر، به ازای x های مشترک از دامنه، y های یکسانی حاصل شود.

به عنوان مثال، رابطه $y = \begin{cases} 2x+1 & x \geq -1 \\ 1-\sqrt{3-x} & x \leq -1 \end{cases}$ ، یک تابع است، چرا که اولاً هر یک از ضابطه‌های آن در دامنه خود یک تابع هستند و ثانیاً به ازای دامنه مشترک $(x = -1)$ ، خروجی یکسانی را تولید می‌کنند. ببینید:

$$\begin{cases} y = 2x+1 \xrightarrow{x=-1} y = -1 \\ y = 1-\sqrt{3-x} \xrightarrow{x=-1} y = -1 \end{cases}$$

دامنه توابع چندضابطه‌ای

برای به دست آوردن دامنه یک تابع چندضابطه‌ای، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

✓ ابتدا دامنه هر یک از ضابطه‌ها را به صورت جداگانه به دست می‌آوریم.



سپس از دامنه به دست آمده برای هر ضابطه و محدوده تعریف همان ضابطه اشتراک میگیریم.

در نهایت از مجموعه جوابهای به دست آمده برای هر ضابطه اجتماع میگیریم.

$$y = \begin{cases} f(x) & ; x \in D_1 \\ g(x) & ; x \in D_2 \\ \vdots & ; \vdots \\ h(x) & ; x \in D_n \end{cases} \quad D_y = (D_f \cap D_1) \cup (D_g \cap D_2) \cup \dots \cup (D_h \cap D_n)$$

■ برد توابع چندضابطه‌ای

برای به دست آوردن برد توابع چندضابطه‌ای، ابتدا برد هر یک از ضابطه‌ها را با توجه به دامنه تعریف هر ضابطه به صورت جداگانه به دست آورده و سپس از آن‌ها اجتماع می‌گیریم. به عبارت دیگر:

$$y = \begin{cases} f(x) & ; x \in D_f \\ g(x) & ; x \in D_g \\ \vdots & ; \vdots \\ h(x) & ; x \in D_h \end{cases} \Rightarrow R_y = R_f \cup R_g \cup R_h$$

توجه کنید که برای پیدا کردن برد توابع چندضابطه‌ای، معمولاً از روش رسم استفاده می‌کنیم، به این صورت که ابتدا نمودار تابع را با توجه به محدوده هر یک از ضابطه‌ها رسم کرده و سپس برد تابع را تعیین می‌کنیم.

نکته در برخی از سوالات با توابعی مواجه می‌شویم که در ضابطه آن‌ها قدرمطلق وجود دارد. در این گونه مواقع می‌توانیم با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، تابع داده شده را به یک تابع چندضابطه‌ای تبدیل کنیم.

دامنه توابع قدرمطلق و برکتی

۱ برای تعیین دامنه توابع قدرمطلق به فرم $y = |f(x)|$ ، قدرمطلق را نادیده گرفته و فقط دامنه عبارت داخل قدرمطلق را به دست می‌آوریم، به عبارت دیگر:

$$y = |f(x)| \Rightarrow D_y = D_f$$

به عنوان مثال، برای به دست آوردن دامنه تابع $y = \left| \frac{1-x}{x+2} \right|$ ، کافی است که دامنه عبارت داخل قدرمطلق را به دست بیاوریم:

$$f(x) = \frac{1-x}{x+2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2\} = \mathbb{R} - \{-2\} \Rightarrow D_y = D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

۲ برای تعیین دامنه توابع برکتی به فرم $y = [f(x)]$ ، برکت را نادیده گرفته و فقط دامنه عبارت درون برکت را به دست می‌آوریم. به عبارت دیگر:

$$y = [f(x)] \Rightarrow D_y = D_f$$

به عنوان مثال، برای به دست آوردن دامنه تابع $y = [\sqrt{x^2-1}]$ ، کافی است که دامنه عبارت درون برکت را به دست بیاوریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \\ x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow (x \geq 1) \cup (x \leq -1) \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

در نتیجه، دامنه تابع y همان دامنه تابع f است، یعنی:

$$D_y = D_f = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

دامنه توابع مثلثاتی

۱ برای تعیین دامنه توابع مثلثاتی به فرم $y = a \sin f(x) + b$ و $y = a \cos f(x) + b$ ، کافی است که دامنه عبارتی را که در کمان این توابع قرار دارد را به دست بیاوریم، به عبارت دیگر:

$$y = a \sin f(x) + b \Rightarrow D_y = D_f \\ y = a \cos f(x) + b \Rightarrow D_y = D_f$$



حالا بعداً می‌فهمید که ضرایب a و b فقط روی برد تابع اثر می‌ذارن و روی دامنه تابع هیچ تاثیری ندارن...

۲ برای تعیین دامنه توابع مثلثاتی به فرم $y = a \tan f(x) + b$ و $y = a \cot f(x) + b$ نیز از روابط زیر کمک می‌گیریم:

$$\begin{aligned} y = a \tan f(x) + b &\Rightarrow D_y = D_f - \left\{ x \mid f(x) = k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \\ y = a \cot f(x) + b &\Rightarrow D_y = D_f - \{ x \mid f(x) = k\pi; k \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

به عنوان مثال، دامنه توابع $y_1 = 1 - 2 \cos 3x$ و $y_2 = \tan 2x + 1$ برابر است با:

• $y_1 = 1 - 2 \cos 3x \Rightarrow D_{y_1} = D_{3x} = \mathbb{R}$

• $y_2 = \tan 2x + 1 \Rightarrow D_{y_2} = D_{2x} - \left\{ x \mid 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right\}$

تابع هموگرافیک

تابع هموگرافیک نوع خاصی از توابع گویا است و فرم کلی آن به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ بوده که در آن $ad - bc \neq 0$ و $c \neq 0$ است. به عبارت دیگر:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}; \begin{cases} ad - bc \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$$

شاید برات سوال باشه که چرا این شرط‌ها رو برای تابع هموگرافیک گذاشتن! یعنی که $ad - bc = 0$ باشه یا $c = 0$ باشه چه اتفاقی میفته؟ بیا تا بحث بکن!

اگر $ad - bc = 0$ باشد، تابع ما یک تابع ثابت خواهد بود. ببینید:

$$f(x) = \frac{2x-2}{x-1} \xrightarrow{ad-bc=0} f(x) = \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \Rightarrow f(x) = 2; x \neq 1$$

اگر $c = 0$ باشد، با یک تابع خطی مواجه خواهیم شد. ببینید:

$$f(x) = \frac{4x+2}{2} \xrightarrow{c=0} f(x) = \frac{2(2x+1)}{2} \Rightarrow f(x) = 2x+1$$

■ دامنه و برد تابع هموگرافیک:

ضابطه	دامنه	برد
$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$\mathbb{R} - \{\text{ریشه مخرج}\} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$	$\mathbb{R} - \left\{ \begin{array}{l} \text{ضریب } x \text{ صورت} \\ \text{ضریب } x \text{ مخرج} \end{array} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\}$

به عنوان مثال، در تابع $f(x) = \frac{-x+3}{2x-1}$ داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{(-1)}{2} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$R_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$$

■ رسم تابع هموگرافیک:

برای رسم تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، مراحل زیر را طی می‌کنیم:

نسبت ضریب x در صورت کسر به ضریب x در مخرج کسر $\left(\frac{a}{c}\right)$ را می‌یابیم و یک خط‌چین افقی به معادله $y = \frac{a}{c}$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

ریشه مخرج کسر $\left(x = -\frac{d}{c}\right)$ را به دست آورده و یک خط‌چین قائم به معادله $x = -\frac{d}{c}$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

یک نقطه کمکی (معمولاً عرض از مبدأ تابع) را نیز پیدا می‌کنیم.

در نهایت با توجه به جدول زیر، جهت کاسه‌ها را تعیین کرده و نمودار را رسم می‌کنیم.



$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$

معرفی

دو تابع f و g را با هم برابر می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱ دامنه توابع f و g با هم برابر باشند.

۲ برای هر x از دامنه یکسان، $f(x) = g(x)$ باشد.

به عبارت دیگر، دو تابع f و g زمانی با هم برابرند که دامنه هر دو تابع (قبل از ساده کردن) و ضابطه آن‌ها (بعد از ساده کردن) با هم برابر باشند.

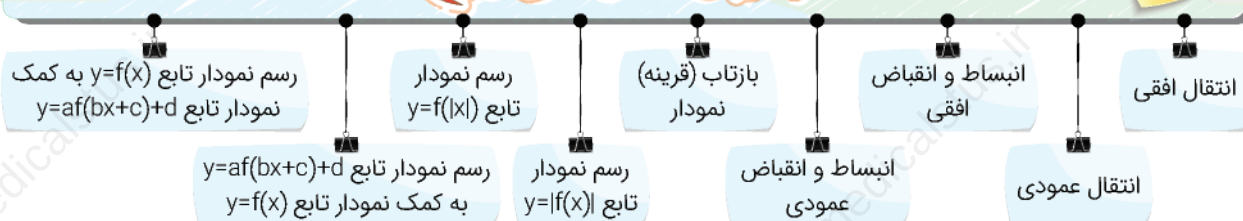
به عنوان مثال، دو تابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ ، با هم برابر نیستند، چرا که $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ است.

دو تا مورد هست که بهتره گوشه ذهنت داشته باشی...

۱ اگر نمودار دو تابع مساوی را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، نمودارهای آن‌ها دقیقاً بر هم منطبق خواهند بود.

۲ اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج مرتبی داده شده باشند، این دو تابع زمانی با هم برابر خواهند بود که آن دو مجموعه زوج مرتبی برابر باشند.

تبدیل نمودار توابع



انتقال افقی

اگر نمودار و یا ضابطه تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ ، داریم:

ضابطه	نمودار	نقطه متناظر	دامنه	برد
در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(x + k)$ قرار می‌دهیم.	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x - k, y)$ روی نمودار تابع $f(x + k)$ قرار دارد.	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(x + k)$ به صورت $[a - k, b - k]$ می‌باشد.	برد تابع $f(x + k)$ با برد تابع f برابر است.
ضابطه	نمودار	نقطه متناظر	دامنه	برد
در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(x - k)$ قرار می‌دهیم.	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x + k, y)$ روی نمودار تابع $f(x - k)$ قرار دارد.	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(x - k)$ به صورت $[a + k, b + k]$ می‌باشد.	برد تابع $f(x - k)$ با برد تابع f برابر است.



انتقال عمودی



اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f : [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ داریم:

ضابطه	به ضابطه تابع f, k واحد اضافه می کنیم.	$f(x) + k$
نمودار	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می کنیم.	
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، $A'(x, y + k)$ روی نمودار تابع $f(x) + k$ قرار دارد.	
دامنه	دامنه تابع $f(x) + k$ با دامنه تابع f برابر است.	
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $f(x) + k$ به صورت $[c + k, d + k]$ می باشد.	$f(x) - k$
ضابطه	از ضابطه تابع f, k واحد کم می کنیم.	
نمودار	نمودار تابع f را به اندازه k واحد و در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می کنیم.	
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, y - k)$ روی نمودار تابع $f(x) - k$ قرار دارد.	
دامنه	دامنه تابع $f(x) - k$ با دامنه تابع f برابر است.	$f(x) - k$
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $f(x) - k$ به صورت $[c - k, d - k]$ می باشد.	

انبساط و انقباض افقی



اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f = [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ داریم:

ضابطه	در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، (kx) قرار می دهیم.	$f(kx); (k > 1)$
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ ، منقبض (فشرده) می کنیم.	
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(\frac{x}{k}, y)$ روی نمودار تابع $f(kx)$ قرار دارد.	
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(kx)$ به صورت $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ است.	
برد	برد تابع $f(kx)$ با برد تابع f برابر است.	$f(kx); (0 < k < 1)$
ضابطه	در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، (kx) قرار می دهیم.	
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور x ها، با ضریب $\frac{1}{k}$ ، منبسط (کشیده) می کنیم.	
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(\frac{x}{k}, y)$ روی نمودار تابع $f(kx)$ قرار دارد.	
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(kx)$ به صورت $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ است.	$f(kx); (0 < k < 1)$
برد	برد تابع $f(kx)$ با برد تابع f برابر است.	



انبساط و انقباض عمودی



اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f : [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، با فرض $k > 0$ داریم:

ضابطه	ضابطه تابع f را در k ضرب می کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k ، منبسط (کشیده) می کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, ky)$ روی نمودار تابع $kf(x)$ قرار دارد.
دامنه	دامنه تابع $kf(x)$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $kf(x)$ به صورت $[kc, kd]$ است.
ضابطه	ضابطه تابع f را در k ضرب می کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k ، فشرده (منقبض) می کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, ky)$ روی نمودار تابع $kf(x)$ قرار دارد.
دامنه	دامنه تابع $kf(x)$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $kf(x)$ به صورت $[kc, kd]$ است.

بازتاب (قرینه) نمودار



اگر نمودار و یا ضابطه تابع $\begin{cases} y = f(x) \\ D_f : [a, b] \rightarrow R_f : [c, d] \end{cases}$ را در اختیار داشته باشیم، داریم:

ضابطه	در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(-x)$ قرار می دهیم.
نمودار	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(-x, y)$ روی نمودار تابع $f(-x)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $f(-x)$ به صورت $[-b, -a]$ است.
برد	برد تابع $f(-x)$ با برد تابع f برابر است.
ضابطه	ضابطه تابع f را در عدد (-1) ضرب می کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, -y)$ روی نمودار تابع $-f(x)$ قرار دارد.
دامنه	دامنه تابع $-f(x)$ با دامنه تابع f برابر است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $-f(x)$ به صورت $[-d, -c]$ است.
ضابطه	ابتدا در ضابطه تابع f به جای تمامی x ها، $(-x)$ قرار داده و سپس ضابطه تابع f را در عدد (-1) ضرب می کنیم.
نمودار	نمودار تابع f را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می کنیم. (یعنی ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می کنیم).
نقطه متناظر	اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، نقطه $A'(-x, -y)$ روی نمودار تابع $-f(-x)$ قرار دارد.
دامنه	اگر دامنه تابع f به صورت $[a, b]$ باشد، دامنه تابع $-f(-x)$ به صورت $[-b, -a]$ است.
برد	اگر برد تابع f به صورت $[c, d]$ باشد، برد تابع $-f(-x)$ به صورت $[-d, -c]$ است.

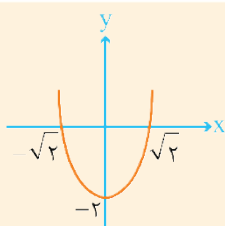


اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $x = k$ قرینه کنیم، ضابطه تابع جدید به صورت $f(2k - x)$ است.
 اگر نمودار تابع f را نسبت به خط $y = k$ قرینه کنیم، ضابطه تابع جدید به صورت $2k - f(x)$ است.

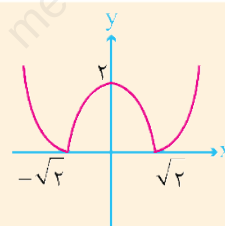
رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = |f(x)|$ ، آن قسمت از نمودار تابع f را که بالای محور x ها قرار دارد دست نخورده می گذاریم ولی آن بخشی از نمودار تابع f را که زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.
 توجه کنید که اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشد، نقطه $A'(x, |y|)$ روی نمودار تابع $y = |f(x)|$ قرار دارد.
 به عنوان مثال، نمودار تابع $y = |x^2 - 2|$ به صورت زیر است:

$$y = x^2 - 2$$



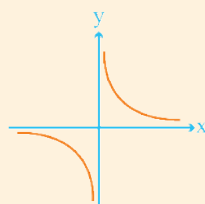
$$y = |x^2 - 2|$$



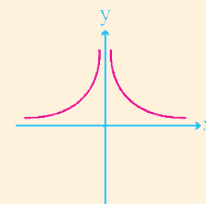
رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = f(|x|)$ به صورت زیر عمل می کنیم:
 در سمت راست محور y ها ($x \geq 0$)، نمودار تابع f را دست نخورده می گذاریم.
 در سمت چپ محور y ها ($x < 0$)، نمودار تابع f را حذف کرده و به جای آن قرینه نمودار سمت راست را نسبت به محور y ها رسم می کنیم.
 به عنوان مثال، نمودار تابع $y = \frac{1}{|x|}$ به صورت زیر است:

$$y = \frac{1}{x}$$



$$y = \frac{1}{|x|}$$



رسم نمودار تابع $y = af(bx + c) + d$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = af(bx + c) + d$ به ترتیب زیر عمل می کنیم:
 الف) تأثیرات روی دامنه:

۱) تأثیر عدد ثابت c : اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه c واحد به سمت چپ و اگر $c < 0$ باشد نمودار تابع را به اندازه c واحد به سمت راست منتقل می کنیم.

۲) تأثیر ضریب x : طول تمامی نقاط را در $\frac{1}{|b|}$ ضرب می کنیم. (اگر b منفی باشد نمودار تابع رو نسبت به محور y هم قرینه می کنیم.)
 ب) تأثیرات روی برد:

۳) تأثیر ضریب f : عرض تمامی نقاط را در $|a|$ ضرب می کنیم. (اگر a منفی باشد نمودار تابع رو نسبت به محور x ها هم قرینه می کنیم.)

۴) تأثیر عدد ثابت d : اگر $d > 0$ باشد نمودار تابع را به اندازه d واحد به سمت بالا و اگر $d < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه d واحد به سمت پایین منتقل می کنیم.



۱ اگر دامنه تابع $y = f(x)$ به صورت $[m, n]$ باشد برای محاسبه دامنه تابع $y = af(bx+c)+d$ کافی است که نامعادله $m \leq bx+c \leq n$ را حل کرده و محدوده x را به دست بیاوریم.

۲ اگر برد تابع $y = f(x)$ به صورت $[m, n]$ باشد، برای محاسبه برد تابع $y = af(bx+c)+d$ کافی است که نامعادله $m \leq f(x) \leq n$ را تشکیل داده و به کمک آن محدوده $af(x)+d$ را به دست بیاوریم.

نکته اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار داشته باشد نقطه $A'(\frac{x-c}{b}, ay+d)$ بر روی نمودار $y = af(bx+c)+d$ قرار دارد.

رسم نمودار تابع $y = f(x)$ به کمک نمودار تابع $y = af(bx+c)+d$

اگر نمودار تابع $y = af(bx+c)+d$ را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) تاثیرات روی برد:

۱ تاثیر عدد ثابت d : اگر $d > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه d واحد به سمت پایین و اگر $d < 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه d واحد به سمت بالا منتقل می‌کنیم.

۲ تاثیر ضریب f : عرض تمامی نقاط را در $\frac{1}{|a|}$ ضرب می‌کنیم. (اگر a منفی باشد نمودار تابع را نسبت به محور x ها هم قرینه می‌کنیم).

ب) تاثیرات روی دامنه:

۳ تاثیر ضریب x : طول تمامی نقاط را در $|b|$ ضرب می‌کنیم. (اگر b منفی باشد نمودار تابع را نسبت به محور x ها هم قرینه می‌کنیم).

۴ تاثیر عدد ثابت c : اگر $c > 0$ باشد، نمودار تابع را به اندازه c واحد به سمت راست و اگر $c < 0$ باشد نمودار تابع را به اندازه c واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



۱ اگر دامنه تابع $y = af(bx+c)+d$ به صورت $[m, n]$ باشد، برای محاسبه دامنه تابع $y = f(x)$ کافی است که نامعادله $m \leq x \leq n$ را تشکیل داده و به کمک آن محدوده $(bx+c)$ را به دست بیاوریم.

۲ اگر برد تابع $y = af(bx+c)+d$ به صورت $[m, n]$ باشد، برای محاسبه برد تابع $y = f(x)$ کافی است که نامعادله $m \leq af(x)+d \leq n$ را حل کرده و محدوده $f(x)$ را به دست بیاوریم.

نکته اگر نقطه $A(x, y)$ روی نمودار تابع $y = af(bx+c)+d$ قرار داشته باشد، نقطه $A'(bx+c, \frac{y-d}{a})$ بر روی نمودار تابع $y = f(x)$ قرار دارد.

اعمال جبری روی توابع

اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی

ویژگی‌های اعمال جبری روی توابع

ویژگی‌های اعمال جبری روی توابع

اگر توابع f و g به ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تفریق و ... این توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

عملیات	ضابطه	دامنه
جمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g$
ضرب	$(f.g)(x) = f(x).g(x)$	$D_{f.g} = D_f \cap D_g$
تقسیم	$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; (g(x) \neq 0)$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x g(x) = 0\}$
توان	$(f)^2(x) = f(x).f(x)$	$D_{f^2} = D_f$
ضرب در عدد	$(kf)(x) = kf(x)$	$D_{kf} = D_f$



اعمال جبری در نمایش زوج مرتبی

اگر توابع f و g را به صورت زوج مرتبی به ما بدهند و از ما درباره اعمال جبری آن‌ها $\left(\begin{matrix} \pm \\ f \times g \\ \div \end{matrix} \right)$ بپرسند، به روش زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا دامنه مشترک هر دو تابع f و g را به دست می‌آوریم.

سپس به ازای x مشترک آن‌ها، عمل جبری خواسته شده را فقط بر روی y های آن‌ها انجام می‌دهیم.

به عبارت دیگر:

اگر $(a, b) \in f$ و $(a, c) \in g$ باشند، داریم:

تابع	f	g	$f - g$	$f + g$	$f \cdot g$	$\frac{f}{g}$	kf	f^2
زوج مرتب	(a, b)	(a, c)	$(a, b - c)$	$(a, b + c)$	(a, bc)	$(a, \frac{b}{c})$	(a, kb)	(a, b^2)

تابع مرکب

مفهوم ترکیب توابع محاسبه مقدار تابع مرکب نمایش زوج مرتبی ترکیب توابع ضابطه تابع مرکب دامنه تابع مرکب برد تابع مرکب

مفهوم ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع باشند، در این صورت، ترکیب این دو تابع را به صورت‌های زیر نشان می‌دهیم:

۱ $(f \circ g)(x)$: در این ترکیب، g را تابع درونی و f را تابع بیرونی می‌گوییم و آن را به صورت $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که این ترکیب به شرطی برقرار است که خروجی‌های تابع g در دامنه تابع f قرار داشته باشند.

$$x \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow f(g(x))$$

۲ $(g \circ f)(x)$: در این ترکیب، f را تابع درونی و g را تابع بیرونی می‌گوییم و آن را به صورت $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ نمایش می‌دهیم. توجه داشته باشید که این ترکیب هم به شرطی برقرار است که خروجی‌های تابع f در دامنه تابع g قرار داشته باشند.

$$x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow g(f(x))$$

محاسبه مقدار تابع مرکب

اگر ضابطه و یا نمودار توابع f و g را در اختیار داشته باشیم به کمک آن‌ها می‌توانیم مقدار یک تابع مرکب را به دست بیاوریم.

۱ $(f \circ g)(a)$: برای محاسبه مقدار تابع $(f \circ g)(x)$ به ازای $x = a$ ، ابتدا از تابع درونی شروع کرده و مقدار تابع $g(x)$ را به ازای $x = a$ به دست می‌آوریم، سپس $g(a)$ را به عنوان ورودی، وارد تابع بیرونی کرده و مقدار تابع $f(x)$ را به ازای $g(a)$ محاسبه می‌کنیم. مقدار به دست آمده همان حاصل $(f \circ g)(a)$ خواهد بود.

۲ $(g \circ f)(a)$: به طریق مشابه، برای محاسبه مقدار تابع $(g \circ f)(x)$ به ازای $x = a$ ، ابتدا $x = a$ را وارد تابع $f(x)$ کرده و $f(a)$ را به دست می‌آوریم. سپس $f(a)$ را به عنوان ورودی، وارد تابع $g(x)$ می‌کنیم و مقدار تابع g را به ازای $x = a$ محاسبه می‌کنیم. مقدار به دست آمده همان حاصل $(g \circ f)(a)$ می‌باشد.

نمایش زوج مرتبی ترکیب توابع

اگر $(a, b) \in f$ و $(b, c) \in g$ باشند، در این صورت $(a, c) \in f \circ g$ خواهد بود. به عبارت دیگر:

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \Rightarrow (a, c) \in f \circ g$$



ضابطه تابع مرکب

حالت اول: تابع مرکب مجهول است.

اگر ضابطه توابع f و g را داشته باشیم و بخواهیم ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست بیاوریم، باید در تابع f ، به جای تمامی x ها، تابع $g(x)$ را جایگذاری کنیم. اگر ضابطه توابع f و g را داشته باشیم و بخواهیم ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست بیاوریم، باید در تابع g ، به جای تمامی x ها، تابع $f(x)$ را جایگذاری کنیم.

حالت دوم: تابع درونی مجهول است.

اگر ضابطه توابع f و $f \circ g$ را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم ضابطه تابع درونی (یعنی g) را به دست بیاوریم، به روش زیر عمل می‌کنیم:

- در تابع f به جای تمامی x ها، $g(x)$ قرار می‌دهیم.
- عبارت به دست آمده در مرحله قبل را با ضابطه تابع $f \circ g$ برابر قرار می‌دهیم و با عملیات جبری، $g(x)$ را تنها می‌کنیم.

حالت سوم: تابع بیرونی مجهول است.

اگر ضابطه توابع g و $f \circ g$ را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم ضابطه تابع بیرونی (یعنی f) را به دست بیاوریم به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا تابع $g(x)$ را برابر t قرار داده و به کمک عملیات جبری، x را بر حسب t تنها می‌کنیم.
- سپس در تابع $f \circ g$ ، به جای تمامی x ها، x حاصل شده از مرحله قبل را جایگذاری می‌کنیم تا تابع f بر حسب t حاصل شود.
- در نهایت در تابع f حاصل شده در مرحله قبل، به جای تمامی x ها، x قرار می‌دهیم و ضابطه تابع f بر حسب x را به دست می‌آوریم.

دامنه تابع مرکب

دامنه تابع $f \circ g$: برای به دست آوردن دامنه تابع $f \circ g$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

- دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم.
- ضابطه تابع $g(x)$ را در محدوده دامنه تابع f قرار داده و با حل نامعادله حاصل شده، محدوده‌ای برای x به دست می‌آوریم.
- در نهایت بین محدوده به دست آمده در مرحله قبل و دامنه تابع g ، اشتراک می‌گیریم تا دامنه تابع $f \circ g$ به دست بیاید.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

دامنه تابع $g \circ f$: برای به دست آوردن دامنه تابع $g \circ f$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

- دامنه توابع f و g را به دست می‌آوریم.
- ضابطه تابع $f(x)$ را در محدوده دامنه تابع g قرار داده و با حل نامعادله حاصل شده، محدوده‌ای برای x به دست می‌آوریم.
- در نهایت بین محدوده به دست آمده در مرحله قبل و دامنه تابع f ، اشتراک می‌گیریم تا دامنه تابع $g \circ f$ به دست بیاید.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

توجه داشته باشید که دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم و نه از روی ضابطه آن! به عنوان مثال توابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ را در نظر بگیرید:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3 \Rightarrow D_{g \circ f} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, +\infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} \Rightarrow D_{g \circ f} = [1, +\infty)$$

همان‌طور که می‌بینید، دامنه $g \circ f$ با توجه به ضابطه آن برابر $\mathbb{R}$ است، در صورتی که دامنه واقعی آن با استفاده از تعریف به دست می‌آید که برابر $[1, +\infty)$ است.

برد ترکیب توابع

اگر توابع f و g را داشته باشیم، برای به دست آوردن برد تابع $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، به روش زیر عمل می‌کنیم:

- ابتدا برد تابع درونی (در اینجا $g(x)$) را به دست می‌آوریم.
- سپس مجموعه برد تابع درونی را به عنوان دامنه تابع f در نظر می‌گیریم.
- در نهایت برد تابع f را (با توجه به دامنه جدید آن) تعیین می‌کنیم (این مرحله را معمولاً با روش رسم انجام می‌دهیم).



یکتوایی توابع

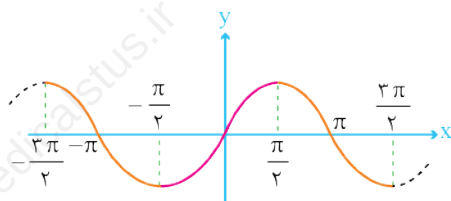


مثال نموداری	تعریف ریاضی	توضیح	تابع
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ افزایش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	صعودی
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ کاهش می‌یابد و یا اینکه ثابت می‌ماند.	نزولی
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ همواره افزایش می‌یابد.	اکیداً صعودی
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ همواره کاهش می‌یابد.	اکیداً نزولی
	$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$	با افزایش x ، مقدار تابع $f(x)$ همواره ثابت است.	تابع ثابت (هم صعودی و هم نزولی)

توجه به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکتوا می‌گوییم.

توجه به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکتوا می‌گوییم.

توجه به تابعی که نه صعودی و نه نزولی باشد، تابع غیر یکتوا می‌گوییم. به عبارت دیگر تابع غیر یکتوا تابعی است که در دامنه تعریف خود در بازه‌هایی صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد، به عنوان مثال توابع $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ ، $y = \frac{1}{x}$ و در دامنه تعریف خود غیر یکتوا هستند. ببینید



نمودار فوق، نمودار تابع $y = \sin x$ است که در دامنه خود $(\mathbb{R})$ ، غیر یکتوا است اما در زیر مجموعه‌هایی از دامنه خود می‌تواند یکتوا باشد به عنوان مثال این تابع در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ صعودی و در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ تابعی نزولی است.

یه چیزو می‌دونستی؟ چیه؟!

اینکه به تابعی که اکیداً صعودی باشه می‌تونیم بگیم صعودی هم هست یا اینکه به تابعی که اکیداً نزولی باشه می‌تونیم بگیم که نزولی هم هست ولی برعکسش رو اجازه نداریم که بگیم.

مثلاً اگر تابعی صعودی باشه اجازه نداریم که بگیم اکیداً صعودیه (می‌دونم که می‌دونستی!)

حالا بیاین که می‌خواهیم یکتوایی تابع‌های معروف کتاب درسی رو با هم بررسی کنیم



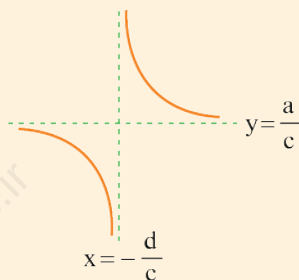
تابع	فرم	وضعیت یکنوایی	نمودار
خطی	$f(x) = ax + b$	اکیداً صعودی $a > 0$	
		اکیداً نزولی $a < 0$	
درجه دوم	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	اکیداً صعودی $x \geq -\frac{b}{2a}$	
		اکیداً نزولی $x \leq -\frac{b}{2a}$	
	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$	اکیداً نزولی $x \geq -\frac{b}{2a}$	
		اکیداً صعودی $x \leq -\frac{b}{2a}$	
رادیکالی	$f(x) = \sqrt{ax + b}$	اکیداً صعودی $a > 0$	
		اکیداً نزولی $a < 0$	
نمایی	$f(x) = a^x ; \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$	اکیداً صعودی $a > 1$	
		اکیداً نزولی $0 < a < 1$	
لگاریتمی	$f(x) = \log_a x ; \begin{cases} x > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$	اکیداً صعودی $a > 1$	
		اکیداً نزولی $0 < a < 1$	
براکتی	$f(x) = [ax + b]$	صعودی $a > 0$	
		نزولی $a < 0$	
قدرمطلق	$f(x) = ax + b $	اکیداً صعودی $x \geq -\frac{b}{a}$	
		اکیداً نزولی $x \leq -\frac{b}{a}$	



و اما به تابع خیلی مهم که این قدر اهمیتش زیاده که گفتیم حساسش رو از بقیه جدا کنیم، رفقا این شما و این هم هموگرافیک.

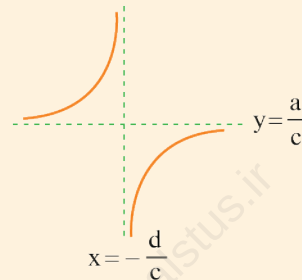
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} ; ad-bc \neq 0, c \neq 0$$

$$ad-bc < 0$$



- ✓ در دامنه تعریف خود غیر یکنواست.
- ✓ در بازه $(-\infty, -\frac{d}{c})$ اکیداً نزولی است.
- ✓ در بازه $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

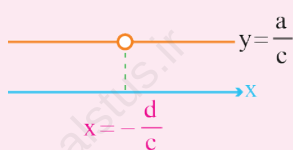
$$ad-bc > 0$$



- ✓ در دامنه تعریف خود غیر یکنواست.
- ✓ در بازه $(-\infty, -\frac{d}{c})$ اکیداً صعودی است.
- ✓ در بازه $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

شاید براون سوال باشه که $ad-bc=0$ بشه چه اتفاقی میفته، (عمراً! به ذهنت خطور کرده باشه)....

توجه اگر در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ مقدار $ad-bc$ برابر صفر باشد تابع f دیگر هموگرافیک نیست و تبدیل به تابعی ثابت با ضابطه $f(x) = \frac{a}{c}$ و دامنه $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ خواهد شد که این تابع در تمام دامنه خود، هم صعودی و هم نزولی بوده و نمودار آن به صورت مقابل است:



درگوشی: اگر از روی ضابطه تابع، بتونیم نمودار تابع رو رسم کنیم، می‌تونیم یکنوایی اون تابع رو توی هر بازه‌ای که می‌خوایم مشخص کنیم. بریم چندتا تست با هم ببینیم که توی اونا از روش رسم برای تشخیص یکنوایی تابع استفاده کردیم....

نکته جدول پایین رو دریاب که بهت قول می‌دم خیلی از جاها به دردت می‌خوره....

$(g \circ f)(x)$	$(f \circ g)(x)$	$f(x) + g(x)$	$-f(x)$	$g(x)$	$f(x)$
صعودی	صعودی	صعودی	نزولی	صعودی	صعودی
صعودی	صعودی	نزولی	صعودی	نزولی	نزولی

توجه کنید که اگر از بین توابع f و g ، یکی نزولی و دیگری صعودی باشد توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ ، هر دو نزولی‌اند.

تابع یک به یک

محدود کردن دامنه یک تابع و ساخت تابع یک به یک

تابع یک به یک و بررسی نمایش‌های مختلف آن

تابع یک به یک و بررسی نمایش‌های مختلف آن

تعریف: اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود، آن تابع را یک به یک می‌نامیم. به عبارت دیگر، تابع f یک به یک است، هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه تابع به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

■ بررسی یک به یک بودن یک تابع در نمایش زوج مرتبی:

به تابعی که در زوج مرتب‌های متفاوت خود، مولفه دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می‌گوییم. توجه داشته باشید که تابع یک به یک به خودی خود، یک تابع است، بنابراین در زوج مرتب‌های آن مولفه‌های اول نیز نباید با هم برابر باشند.

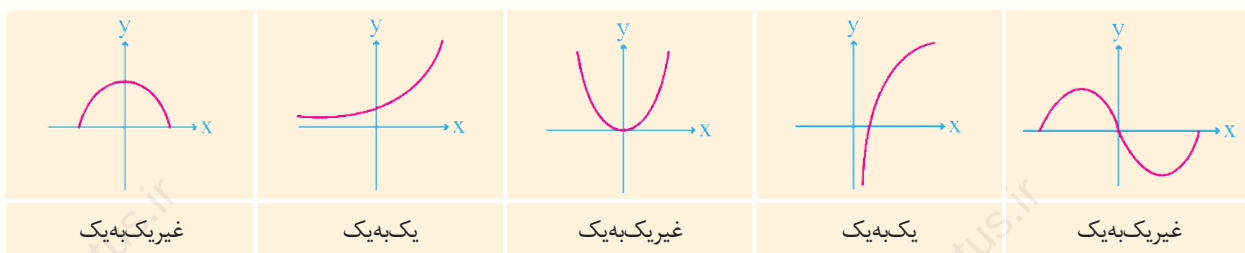


$f = \{(1, 2), (3, 4), (-1, 5), (-2, 0)\} \rightarrow$ تابع یک به یک

$g = \{(-3, -1), (0, 2), (1, -1), (2, 3)\} \rightarrow$ تابع غیر یک به یک

■ بررسی یک به یک بودن یک تابع در نمایش نموداری:

اگر هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آنگاه آن تابع، تابعی یک به یک است.



■ بررسی یک به یک بودن یک تابع در نمایش ضابطه‌ای:

اگر ضابطه یک تابع را داشته باشیم، برای بررسی یک به یک بودن آن می‌توان به روش‌های زیر عمل کرد:

۱ رسم نمودار تابع

۲ مفهوم یکنوایی: می‌دانیم که هر تابع اکیداً یکنوایی، یک به یک است (ولی عکس این مطلب، لزوماً برقرار نیست). به عنوان مثال، تابع $y = 2x + \sqrt{x-1}$ از جمع دو تابع اکیداً صعودی تشکیل شده است. بنابراین این تابع اکیداً صعودی بوده و یک به یک است.

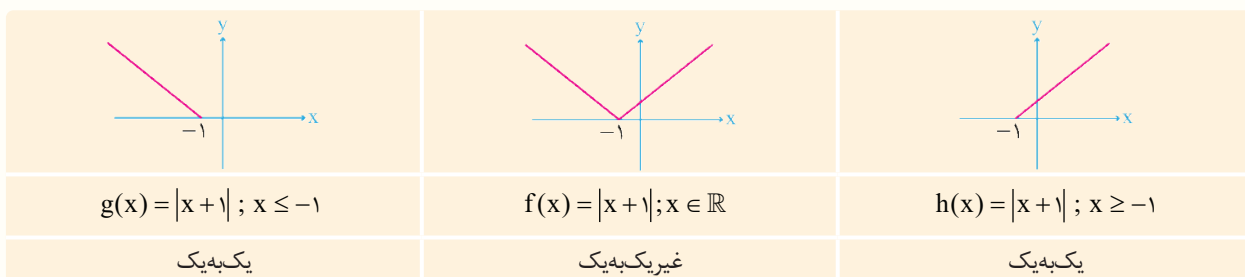
۳ مفهوم تابع یک به یک: اگر در تابع $y = f(x)$ ، از فرض $f(x_1) = f(x_2)$ بتوان نتیجه گرفت که $x_1 = x_2$ است، این تابع، یک به یک است. به عنوان مثال، در تابع $y = x^3 + 1$ ، با فرض $f(x_1) = f(x_2)$ داریم:

$$\begin{cases} f(x_1) = x_1^3 + 1 \\ f(x_2) = x_2^3 + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فرض } f(x_1)=f(x_2)} x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

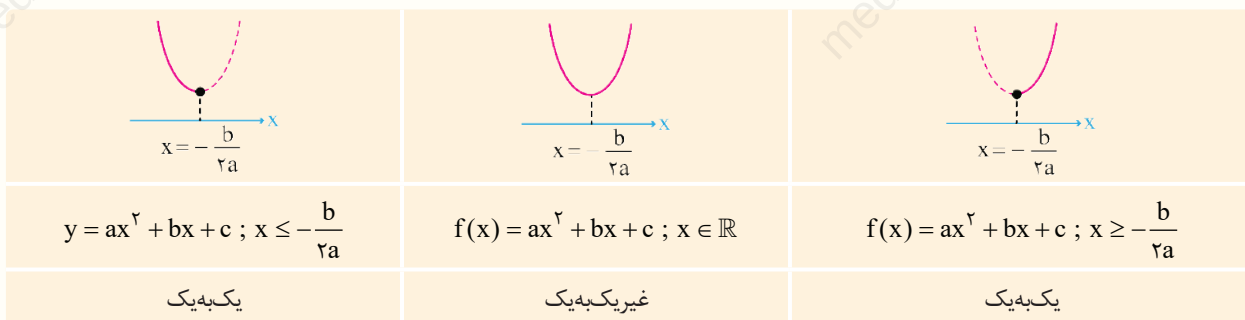
دیدید که از فرض $f(x_1) = f(x_2)$ به این نتیجه رسیدید که $x_1 = x_2$ است، بنابراین تابع $y = x^3 + 1$ ، تابعی یک به یک است.

محدود کردن دامنه یک تابع و ساخت تابع یک به یک

برخی از توابع در دامنه خود یک به یک نیستند اما با محدود کردن دامنه آن‌ها می‌توان تابعی یک به یک از آنها ساخت. به عنوان مثال، تابع $f(x) = |x+1|$ در دامنه خود $(\mathbb{R})$ یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه این تابع به بازه $[-1, +\infty)$ یا $(-\infty, -1]$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو بازه، تابعی یک به یک به دست می‌آید.



تابع درجه دوم (سه‌می) با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ در حالت کلی یک به یک نیست ولی اگر دامنه این تابع را به بعد از رأس سه‌می و یا قبل از آن محدود کنیم، تابعی یک به یک خواهیم داشت، به عبارت دیگر با محدود کردن دامنه این تابع به صورت $x \geq -\frac{b}{2a}$ و یا $x \leq -\frac{b}{2a}$ و یا هر زیرمجموعه‌ای از این دو محدوده، تابعی یک به یک به دست می‌آید.





تابع قدرمطلقی به فرم $f(x) = |ax + b|$ در حالت کلی یک به یک نیست ولی اگر دامنه این تابع را به بعد از ریشه عبارت داخل قدرمطلق و یا قبل از آن محدود کنیم، تابعی یک به یک خواهیم داشت.

$f(x) = ax + b ; x \leq -\frac{b}{a}$	$f(x) = ax + b ; x \in \mathbb{R}$	$f(x) = ax + b ; x \geq -\frac{b}{a}$
یک به یک	غیر یک به یک	یک به یک

تابع $f(x) = |x - a| + |x - b|$, $b > a$ در محدوده های $x \leq a$ و یا $x \geq b$ (و یا هر زیرمجموعه ای از این دو محدوده) یک به یک است.

$f(x) = x - a + x - b ; x \leq a$	$f(x) = x - a + x - b ; x \in \mathbb{R}$	$f(x) = x - a + x - b ; x \geq b$
یک به یک	غیر یک به یک	یک به یک

تابع $f(x) = |x - a| - |x - b|$, $b > a$ در محدوده $a \leq x \leq b$ (و هر زیرمجموعه ای از این دو محدوده) یک به یک است.

$f(x) = x - a - x - b ; x \in \mathbb{R}$	$f(x) = x - a - x - b ; a \leq x \leq b$
غیر یک به یک	یک به یک

تابع $f(x) = \sin x$ در هر یک از بازه های $\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right]$; $k \in \mathbb{Z}$ یک به یک است.

تابع $f(x) = \cos x$ در هر یک از بازه های $[k\pi, (k+1)\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$ یک به یک است.

تابع $f(x) = \tan x$ در هر یک از بازه های $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$; $k \in \mathbb{Z}$ یک به یک است.

تابع وارون

وارون
ترکیب توابع

ترکیب یک تابع
با وارون آن

تقاطع توابع
 f^{-1} و f

به دست آوردن
ضابطه تابع وارون

ویژگی های
تابع وارون

وارون تابع و
تابع وارون

وارون یک تابع و تابع وارون

اگر در نمایش زوج مرتبی یک تابع، جای مولفه اول و دوم را در همه زوج مرتب ها با هم عوض کنیم، مجموعه جدیدی به دست می آید که آن را وارون تابع f می گوئیم و با f^{-1} نمایش می دهیم. توجه کنید که وارون یک تابع، ممکن است تابع نباشد.

$$f = \{(-1, 3), (2, 1), (-2, 3), (0, 4)\}$$

$$f^{-1} = \{(3, -1), (1, 2), (3, -2), (4, 0)\}$$

همانطور که می بینید، وارون تابع f ، تابع نمی باشد. حال، اگر وارون یک تابع، خود یک تابع باشد، آن گاه تابع f را وارون پذیر می گوئیم و f^{-1} را تابع وارون f می نامیم.



توجه: اگر f تابعی یک به یک باشد، در این صورت، وارون پذیر است و بالعکس، یعنی اگر تابعی وارون پذیر باشد می توان نتیجه گرفت که آن تابع یک به یک است.

ویژگی های تابع وارون

$$\begin{aligned} D_f &= R_{f^{-1}} \\ R_f &= D_{f^{-1}} \end{aligned}$$

- دامنه تابع f با برد تابع f^{-1} برابر است و همچنین برد تابع f نیز با دامنه تابع f^{-1} برابر است.
- نمودار تابع f و تابع f^{-1} ، نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم $(y = x)$ ، متقارن هستند.
- اگر نقطه (a, b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد، در این صورت نقطه (b, a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد، به عبارت دیگر: $(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$

به دست آوردن ضابطه تابع وارون

- برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون تابع یک به یک $f(x)$ به روش زیر عمل می کنیم:
- ابتدا برد تابع $f(x)$ را به دست می آوریم و به عنوان دامنه تابع f^{-1} در نظر می گیریم.
 - سپس از معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y تعیین کرده و با تبدیل y به x ، ضابطه $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

تقاطع توابع f و f^{-1}

- برای پیدا کردن طول نقطه (نقاط) برخورد نمودار f و f^{-1} می توانیم به روش های زیر عمل کنیم:
- اگر تابع f صعودی باشد، در این صورت نقاط برخورد دو تابع f و f^{-1} روی نیمساز ناحیه اول و سوم $(y = x)$ قرار دارد، بنابراین برای پیدا کردن طول نقطه (نقاط) برخورد، معادله $x = f(x)$ را حل می کنیم.
 - اگر تابع f ، تابعی صعودی نباشد، در این صورت، ابتدا ضابطه تابع f^{-1} را به دست می آوریم و سپس با حل معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ ، طول نقطه (نقاط) برخورد را پیدا می کنیم. (توجه کنید که در این حالت، برای حل معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ ، از روش رسم هندسی هم می توانیم استفاده کنیم.)

ترکیب تابع با وارون آن

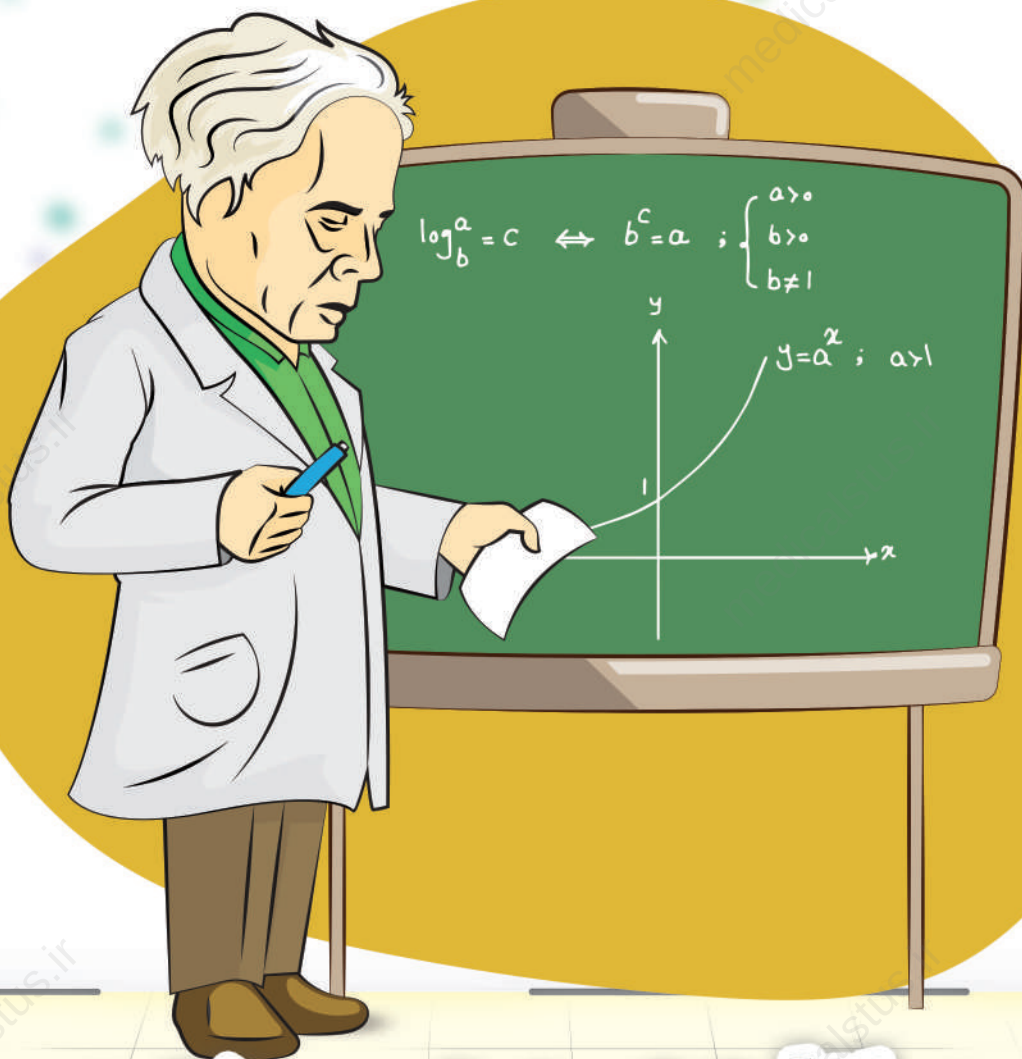
- اگر f تابعی وارون پذیر بوده و تابع وارون آن به صورت f^{-1} باشد، در این صورت، ترکیب تابع f با تابع f^{-1} ، تابعی همانی خواهد بود.
- $$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}} = R_f$$
- $$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f = R_{f^{-1}}$$

وارون ترکیب توابع

اگر f و g توابعی وارون پذیر باشند، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{-1} &= g^{-1} \circ f^{-1} \\ (g \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1} \\ (g \circ f^{-1})^{-1} &= f \circ g \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که وارون وارون هر تابع با خود آن تابع برابر است، به عبارت دیگر: $(f^{-1})^{-1} = f$



فصل ۳: توابع نمایی و لگاریتمی

های لایز 🥕

معرفی میکنم این شما و این هم فصل توابع نمایی و لگاریتمی، یکی از جذاب‌ترین و شیرین‌ترین فصل‌های ریاضیه، من که خودم به شخصه خیلی دوشش دارم چون خیلی جمع و جور و خوش‌تسته و به قول اساتید هنر و سینما، فرم و محتوای خوبی داره خلاصه کمتر کسی در این کره خاکی پیدا میشه که بگه من با لوگ حال نمیکنم!

تا یادم نرفته اینم بگم که از این فصل در کنکور معمولاً ۲ تا سؤال داریم که واقعاً هر چقدر هم بخوان سختش کنج باز میشه حلشون کرد پس حواست باشه حدود دو تا سؤال کنکورت اینجا خوابیده 🥕

راستی بخش‌های ویژگی‌های لگاریتم، معادلات نمایی و لگاریتمی و نمودار توابع نمایی و لگاریتمی جزو مهم‌ترین قسمت‌های این فصل هستن پس بزن بریم که دو تا سؤالمون رو شکار کنیم (شاید بیشتر البت !!)

کنکور سراسری	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ - نوبت اول	۱۴۰۲ - نوبت دوم
تعداد سؤال	۳	۳	۲	۳	۲
مباحث مطرح شده در سؤال	۱. ویژگی‌های لگاریتم ۲. نمودار توابع نمایی ۳. تابع نمایی	۱. دامنه تابع لگاریتمی ۲. معادله لگاریتمی ۳. معادله نمایی	۱. ویژگی‌های لگاریتم ۲. تابع نمایی	۱. دامنه تابع لگاریتمی ۲. ویژگی‌های لگاریتم ۳. نامعادله نمایی	۱. ویژگی‌های لگاریتم ۲. معادلات لگاریتمی



تابع نمایی

نامعادلات نمایی

معادلات نمایی

توان‌های حقیقی

نمودار تابع نمایی

معرفی تابع نمایی

تیپ ۱ تیپ ۲ تیپ ۳

مقایسه نمودارهای توابع نمایی

معرفی تابع نمایی

خوب اول ببینیم به چه تابعی، تابع نمایی میگویند؟ هر گزیری کردو نیست، هر تابعی هم تابع نمایی نیست!

هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ که در آن a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد را یک تابع نمایی گوئیم.

$$f(x) = a^x, \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

به عنوان مثال توابع $y = 4^x$ ، $y = (\sqrt{5})^{3x}$ و ... توابعی نمایی هستند اما تابع $y = (-1)^x$ تابعی نمایی نیست چرا که پایه تابع نمایی نمی‌تواند مقداری منفی باشد.

نمودار تابع نمایی $y = a^x$

حالا بیاید توابع نمایی رو از همه جهات در دو حالت مختلف بررسی کنیم: وقتی که a بزرگ‌تر از یک هست. **VS** وقتی که a بین عدد یک و صفر هست!

$0 < a < 1$	$a > 1$	وضعیت
		نمودار
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	دامنه
$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	برد
اکیداً نزولی و یکنوا $x_2 > x_1 \leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	اکیداً صعودی و یکنوا $x_2 > x_1 \leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	وضعیت یکنوایی
یک‌به‌یک و وارون‌پذیر	یک‌به‌یک و وارون‌پذیر	وضعیت یک‌به‌یک بودن
برخوردی ندارد	برخوردی ندارد	وضعیت نسبت به محور x ها
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$	وضعیت حدی
در نقطه $(0, 1)$ محور y ها را قطع می‌کند	در نقطه $(0, 1)$ محور y ها را قطع می‌کند	وضعیت نسبت به محور y ها

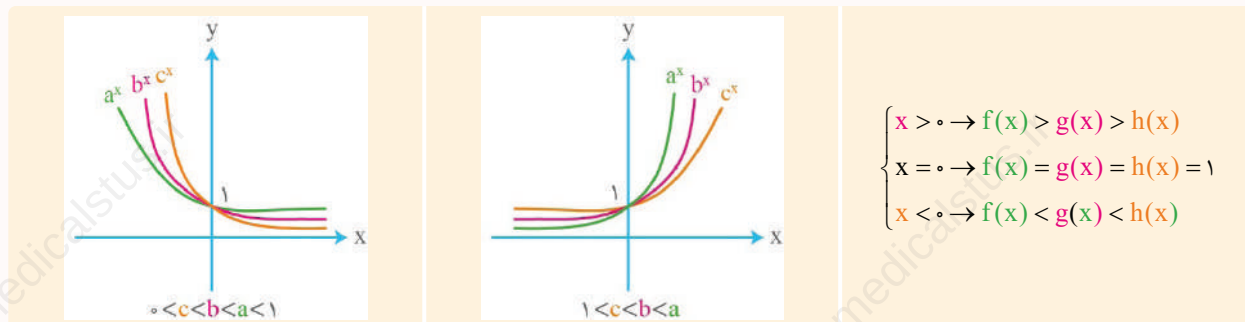


نکته با توجه به نمودار تابع a^x می توان نتیجه گرفت که توابع نمایی همواره مثبت هستند به عبارت دیگر: $a^x > 0$

نکته خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع $y=a^x$ است به عبارتی در حالت کلی تر خط $y=d$ مجانب افقی نمودار تابع $y=Ka^{f(x)}+d$ است. ①

نکته نمودار توابع با ضابطه های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ ، نسبت به محور y ها قرینه اند.

نکته مقایسه نمودارهای $f(x)=a^x$ و $g(x)=b^x$ و $h(x)=c^x$:



به عبارت دیگر در x های مثبت هر چه پایه بزرگتر باشد، نمودار تابع بالاتر قرار میگیرد و در x های منفی، هر چه پایه بزرگتر باشد نمودار تابع پایین تر قرار میگیرد. به تست در این مورد با هم ببینیم!

x	x_1	x_2	x_3	...
y	y_1	y_2	y_3	...

$\xrightarrow{+d} \xrightarrow{+d}$
 $\xrightarrow{\times a^d} \xrightarrow{\times a^d}$

نکته در تابع با ضابطه $y=a^x$ ($a \neq 1, a > 0$)، اگر طول نقاط تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت d بدن عرض

نقاط یک دنباله هندسی با قدر نسبت $q=a^d$ تشکیل میدن. به عبارتی: $\Rightarrow$

به عنوان مثال برای تابع $y=3^x$ داریم:

x	0	2	4	6
3^x	1	9	81	729

$\xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2} \xrightarrow{+2}$
 $\xrightarrow{\times 9} \xrightarrow{\times 9} \xrightarrow{\times 9}$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=2 \\ q=a^d=3^2=9 \end{cases}$$

توان های حقیقی و فرمول های دوست داشتنی شون!

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

۱ $a^0 = 1$	۲ $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	۳ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	۴ $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$
۵ $(ab)^x = a^x \cdot b^x$	۶ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	۷ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	۸ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-x} = \frac{b^x}{a^x} = \left(\frac{b}{a}\right)^x$

$a > 1$: $\dots < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a < a^2 < a^3 < \dots$

$0 < a < 1$: $\dots < a^3 < a^2 < a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots$

نکته دو تا رابطه مقابل رو رفتیم از سال دهم براتون آوردیم:

معادلات نمایی

به معادله ای که در اون متغیر (مجهول) توی توان باشد، معادله نمایی میگویم.

تیب ۱ معادله نمایی: معادلاتی که بعد از ساده سازی توسط قوانین توان ها، به فرم $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ تبدیل می شوند و یا به عبارتی سعی کرده ایم که در دو طرف تساوی، پایه ها را یکسان کنیم.

برای حل این نوع از معادله ها، بعد از اینکه پایه های دو طرف تساوی رو یکی کردیم، پایه ها رو از دو طرف حذف می کنیم و توان ها رو باهم برابر

① (مفهوم مجانب ها خارج از حیطه کتاب درسی است ولی دانستن آن برای حل سؤالات نموداری این بخش خالی از لطف نیست!!!)



قرار میدیم، یعنی:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

تیپ ۲ معادله نمایی: در برخی از معادلات نمایی لازم است برای حل معادله از تغییر متغیر $t = a^x$ استفاده کنیم و پس از محاسبه مقدار t ، با حل معادله $t = a^x$ ، مقدار x را به دست آوریم.

تیپ ۳ معادله نمایی: توی حل بعضی از معادلات میتونیم با استفاده از روش هندسی و رسم نمودار، مسئله رو به جواب برسونیم به خصوص وقتی که از ما تعداد جوابها رو بخوان. حالا رخ کار رو ببین...

نامعادلات نمایی

اگر a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد آنگاه نامعادلاتی که در آنها متغیر (مجهول) در توان قرار گرفته باشد را نامعادلات نمایی می‌نامیم. به تعریفش خوب دقت کن! به بار دیگه از اول بخون!

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} a > 1: & f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1: & f(x) < g(x) \end{cases}$$

برای حل نامعادلات نمایی به فرم $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ داریم:

به عبارتی اگر در دو طرف نامساوی، پایه‌ها بیشتر از یک بود، پایه‌ها رو حذف می‌کنیم و به علامت نامساوی هم دست نمی‌زنیم ولی اگر پایه‌ها در دو طرف نامساوی بین صفر و یک باشه، پایه‌ها رو حذف می‌کنیم و علامت نامساوی رو هم عوض می‌کنیم. مثال رو ببین:

$$(\sqrt{5})^x > (\sqrt{5})^3 \Rightarrow x > 3$$

$$(0.1)^x > (0.1)^3 \Rightarrow x < 3$$

تابع لگاریتمی

نامعادلات لگاریتمی

معادلات لگاریتمی

ویژگی‌های لگاریتم

نمودار تابع لگاریتمی

دامنه تابع لگاریتمی

معرفی

تیپ ۴

تیپ ۳

تیپ ۲

تیپ ۱

مقایسه نمودارهای توابع لگاریتمی

معرفی تابع لگاریتمی

اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد ($a > 0, a \neq 1$)، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک‌به‌یک است و از این رو دارای تابع وارون (f^{-1}) است.

وارون تابع نمایی با ضابطه $f(x) = a^x$ را به صورت $f^{-1}(x) = \log_a^x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم، (یعنی هر تابع لگاریتمی، وارون یک تابع نمایی است و بالعکس) به عبارت دیگر:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a^x$$

نکته: برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع، در معادله $y = f(x)$ را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با جابه‌جا کردن y و x ضابطه تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم. به مثال زیر توجه کنید:

$$f(x) = 3 - \log_5^{(3x-2)} \Rightarrow y = 3 - \log_5^{(3x-2)}$$

$$\Rightarrow \log_5^{(3x-2)} = 3 - y \Rightarrow 5^{3-y} = (3x-2) \Rightarrow 3x = 5^{(3-y)} + 2 \Rightarrow x = \frac{5^{(3-y)} + 2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5^{(3-x)} + 2}{3}$$



دامنه تابع لگاریتمی

برای به دست آوردن دامنه تابع $y = \log_{g(x)} f(x)$ باید شروط زیر را بررسی کنیم:

۱. $f(x) > 0$ (عبارت جوی لگاریتم مثبت باشد) ۲. $g(x) > 0$ (مبنای لگاریتم مثبت باشد) ۳. $g(x) \neq 1$ (مبنای لگاریتم یک نباشد)

پس از حل نامساوی‌های بالا، برای به دست آوردن دامنه، بین جواب‌های به دست آمده اشتراک می‌گیریم، به عبارتی دیگر:

$$y = \log_{g(x)} f(x) \quad D_y : \{x | f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1\}$$

هرگاه دامنه تابع $\log_c^{(ax+b)}$ به صورت $(-\infty, k)$ یا به صورت $(k, +\infty)$ باشد، $x=k$ ریشه عبارت $(ax+b)$ است.

نمودار تابع لگاریتمی $(\log_a^x)$

توابع لگاریتمی، وقتی که a بزرگ‌تر از یک هست. **VS** وقتی که a بین عدد یک و صفر هست!

$0 < a < 1$	$a > 1$	وضعیت
		نمودار
$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	دامنه
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	برد
اکیداً نزولی و یکنوا $x_2 > x_1 \leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$	اکیداً صعودی و یکنوا $x_2 > x_1 \leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	وضعیت یکنوایی
یک‌به‌یک و وارون‌پذیر	یک‌به‌یک و وارون‌پذیر	وضعیت یک‌به‌یک بودن
در نقطه $(1, 0)$ محور x ها را قطع می‌کند	در نقطه $(1, 0)$ محور x ها را قطع می‌کند	وضعیت نسبت به محور x ها
برخورد ندارد	برخورد ندارد	وضعیت نسبت به محور y ها
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	وضعیت حدی

سه تا نکته مهم درباره توابع لگاریتمی:

۱. با توجه به نمودار توابع لگاریتمی می‌توان نتیجه گرفت که لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

۲. خط $x=0$ مجانب قائم نمودار تابع $\log_a^x$ است به عبارتی در حالت کلی‌تر خط $x = -\frac{c}{b}$ ، مجانب قائم نمودار تابع $y = \log_a^{(bx+c)}$ است. ۱

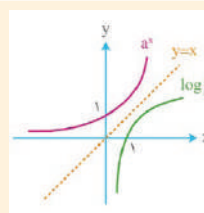
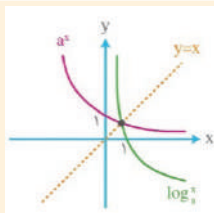
۳. با توجه به اینکه تابع نمایی $y=a^x$ و تابع لگاریتمی $y=\log_a^x$ وارون یکدیگر هستند پس می‌توان گفت:

۱. همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم، مفهوم مجانب‌ها خارج از حیطه کتاب درسی رشته تجربی است اما دانستن آن برای حل سؤالات نموداری این بخش می‌تواند کمک‌کننده باشد.

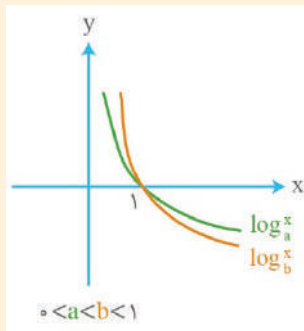
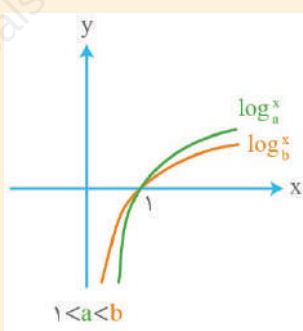


اگر $a > 1$ باشد، تحت شرایط خاصی که خارج از مفاهیم کتاب درسی است می‌توانند متقاطع باشند. ولی برای درک بهتر نمودارهای این دو تابع، دو نمودار را غیر متقاطع رسم کرده‌ایم.

اگر $0 < a < 1$ باشد، تابع و وارون آن در یک نقطه متقاطع‌اند.



نکته مقایسه نمودارهای توابع $f(x) = \log_a^x$ و $g(x) = \log_b^x$:



$$\begin{cases} x > 1 \rightarrow f(x) > g(x) \\ x = 1 \rightarrow f(x) = g(x) \\ 0 < x < 1 \rightarrow f(x) < g(x) \end{cases}$$

به عبارت دیگر در $x > 1$ هر چه مبنا **بزرگ‌تر** باشد، نمودار اون **پایین‌تر** قرار می‌گیرد و در $0 < x < 1$ ، هر چه مبنا **بزرگ‌تر** باشد نمودار اون بالاتر قرار می‌گیرد.

$$\begin{array}{c|ccc} x & x_1 & x_2 & x_3 \dots \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 \dots \\ \hline & +\log_a^q & +\log_a^q & \end{array}$$

نکته در تابع $y = \log_a^x$ ، اگر طول نقاط تشکیل یک **دنباله هندسی** با قدر نسبت q بدن، عرض نقاط یک **دنباله حسابی** با قدر نسبت $d = \log_a^q$ تشکیل میدن به عبارتی:

به عنوان مثال برای تابع $y = \log_2^x$ داریم:

$$\begin{array}{c|cccc} X & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \hline \log_2^x & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline & +1 & +1 & +1 & \end{array} \Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ d = \log_2^q = \log_2^2 = 1 \end{cases}$$

ویژگی‌های لگاریتم

اصلی‌ترین و مهم‌ترین ویژگی لگاریتم را می‌توان از تعریف لگاریتم استخراج کرد که به **قانون چرخش مبنا** هم معروف است. به عبارتی:

$$\log_a^b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

در جدول زیر تعدادی از ویژگی‌های لگاریتم را معرفی کرده‌ایم (با فرض اینکه لگاریتم‌ها معنی هستند):

ویژگی	مثال
$\log_a^1 = 0$	$\log_3^1 = 0$
$\log_a^a = 1$	$\log_2^2 = 1$
$\log_a^{b^n} = n \log_a^b$	$\log_5^{125} = \log_5^{5^3} = 3 \log_5^5 = 3$
$\log_a^{b^m} = \frac{m}{n} \log_a^b$	$\log_{\sqrt{10}}^{(10^2)^{-1}} = \log_{10^{\frac{1}{2}}}^{10^{-2}} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} \log_{10}^{10} = -4$



$\log_a^{bc} = \log_a^b + \log_a^c$	$\log_{\sqrt{2}}^4 + \log_{\sqrt{2}}^{16} = \log_{\sqrt{2}}^{64} = \log_{\frac{1}{2}}^{32} = 12$
$\log_a^{\left(\frac{b}{c}\right)} = \log_a^b - \log_a^c$	$\log_7^{52} - \log_7^{13} = \log_7^{39} = \log_7^3 = 2$
$\log_a^b = \frac{\log_c^b}{\log_c^a}$ (تغییر مبنا)	$\log_2^3 = \frac{\log^3}{\log^2}$ (تغییر مبنا به ۱۰)
$c^{\log_a^b} = b^{\log_a^c}$	$(\frac{1}{8})^{\log_2^{\sqrt{2}}} = (\sqrt{2})^{\log_2^{\frac{1}{8}}} = (\sqrt{2})^4 = 4$
$\log_a^b \times \log_b^c \times \dots \times \log_n^m = \log_a^m$	$\log_2^3 \times \log_{\sqrt{2}}^4 \times \log_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \log_2^3 \times 2 \log_2^4 \times (-\log_2^{\frac{1}{2}}) = -2$
$\log_a^b = \frac{1}{\log_b^a}$	$\log_2^3 = \frac{1}{\log_3^2}$

نکته لگاریتم در مبنا ۱۰ را **لگاریتم اعشاری** می‌نامیم، در این حالت معمولاً مبنا لگاریتم را نمی‌نویسیم، یعنی: $\log_{10}^a = \log a$

نکته چندتا لوگ باهم حفظ کنیم...

• $\log 2 = 1 - \log 5$ • $\log 5 = 1 - \log 2$ • $\log 2 \approx 0.3$ • $\log 3 \approx 0.5$ • $\log 5 \approx 0.7$

معادلات لگاریتمی

منظور از حل معادله لگاریتمی، پیدا کردن مقدار (مقادیری) برای مجهول معادله است که در معادله اصلی صدق کند. برای این کار:

- ۱ اول با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم، معادله داده شده رو تا حد امکان ساده می‌کنیم.
- ۲ بعدش با یکی از روش‌هایی که در ادامه می‌گم بهتون معادله به دست آمده رو حل می‌کنیم و جواب (جواب‌های) معادله رو پیدا می‌کنیم.
- ۳ آخرش جواب (جواب‌های) به دست آمده رو در معادله اصلی قرار میدیم و اونا رو **آزمایش می‌کنیم**، اگر جواب‌ها توی دامنه لگاریتم قرار نداشته باشن، میندازمشون دور



$$\log_a^{\frac{f(x)}{g(x)}} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

تیپ ۱: معادلاتی که بعد از ساده‌سازی به فرم $\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)}$ تبدیل می‌شوند و یا به عبارتی در دو طرف تساوی، **لگاریتم‌های هم‌مبنا** داریم. برای حل این معادله، لگاریتم‌های هم‌مبنا رو از دو طرف تساوی حذف کرده و معادله $f(x) = g(x)$ رو حل می‌کنیم، یعنی:

$$\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad a, f(x), g(x) > 0, \quad a \neq 1$$

تیپ ۲: معادلاتی که بعد از ساده‌سازی به فرم $\log_a^{f(x)} = b$ تبدیل می‌شوند. برای حل این معادله، به کمک **قانون چرخش مبنا**، معادله رو به یک معادله نمایی تبدیل کرده و اون رو حل می‌کنیم، یعنی:

$$\log_a^{f(x)} = b \Leftrightarrow a^b = f(x) \quad a, f(x) > 0, \quad a \neq 1$$

تیپ ۳: معادلاتی که با تغییر متغیر $\log_a^{f(x)} = t$ ، به یک معادله جبری (معمولاً درجه ۲) تبدیل می‌شوند. برای حل این نوع از معادله‌ها، اول با استفاده از **تغییر متغیر** مناسب، معادله را به یک معادله جبری تبدیل می‌کنیم و بعدش با حل معادله جبری، مقدار t رو به دست میاریم که با مشخص شدن t ، مقدار x هم به دست میاد.



تیپ ۴: در حل برخی از معادلات، باید از دو طرف معادله در یک مبنای مشخص **لگاریتم بگیریم** به عبارتی:

$$a^{f(x)} = b \xrightarrow[\text{مبنای } a \text{ لگایتیم می‌گیریم}]{\text{از دو طرف تساوی در}} \log_a a^{f(x)} = \log_a b \Rightarrow f(x) = \log_a b$$

نامعادلات لگاریتمی

برای حل یک نامعادله لگاریتمی:

- ابتدا **دامنه لگاریتم** (لگاریتم‌ها) را مشخص می‌کنیم.
- نامعادله لگاریتمی را تا حد امکان با استفاده از روابط و ویژگی‌های لگاریتم ساده کرده و با توجه به روابط زیر، **مجموعه جواب** نامعادله را پیدا می‌کنیم.
- از جواب‌های به دست آمده در مرحله ۱ و ۲ **اشتراک** می‌گیریم.

$$\begin{aligned} \bullet \log_a f(x) > b & \begin{cases} a > 1 & f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 & f(x) < a^b \end{cases} \quad (f(x), a > 0, a \neq 1) \\ \bullet \log_a f(x) > \log_a g(x) & \begin{cases} a > 1 & f(x) > g(x) \\ 0 < a < 1 & f(x) < g(x) \end{cases} \quad (f(x), g(x), a > 0, a \neq 1) \end{aligned}$$

نکته: برای تعیین محدوده $\log_a^2$ ، باید a یا همون عبارت جلوی لگاریتم رو بین **دو توان صحیح و متوالی** از b قرار بدیم به طوری که:

$$\begin{aligned} \text{اگر } b > 1 \text{ باشد} & \quad b^k < a < b^{k+1} \rightarrow k < \log_b a < k+1 \\ \text{اگر } 0 < b < 1 \text{ باشد} & \quad b^k < a < b^{k-1} \rightarrow k-1 < \log_b a < k \end{aligned}$$

تحلیل نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

برای رسم نمودار توابع نمایی و لگاریتمی می‌توانیم با استفاده از ویژگی‌های تبدیل و انتقال نمودارها، نمودار توابع نمایی را به کمک نمودار تابع $y = a^x$ و نمودار توابع لگاریتمی را به کمک نمودار تابع $y = \log_a x$ رسم کنیم.

در جدول زیر خلاصه‌ای از خواص و ویژگی‌های تبدیل و انتقال نمودارها آورده شده است.

نمودار جدید ($a, k > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$f(x+a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.
$f(x-a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.
$f(x)+a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.
$f(x)-a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم (قرینه نسبت به مبدأ مختصات)
$f(kx)$	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.
	نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.



نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می کنیم.	$k > 1$	$kf(x)$
نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می کنیم.	$0 < k < 1$	
ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آنچه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.		$ f(x) $
ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آنچه در سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و در نهایت قسمتی از نمودار که در سمت راست محور y ها قرار دارد را در سمت چپ کپی می کنیم.		$f(x)$

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی



توابع نمایی و لگاریتمی کاربردهای فراوانی دارند که از آن ها می توان به محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو، محاسبه شدت زلزله، برآورد مقدار یک ماده بعد از گذشت مدت معین و ... اشاره کرد.

الف) مقدار یک ماده بعد از گذشت مدت زمان مشخص



اگر مقدار اولیه A_0 بعد از گذشت m واحد زمانی k برابر شود، مقدار آن بعد از t واحد زمانی از رابطه زیر به دست می آید:

$$f(t) = A_0 \cdot k^{\frac{t}{m}}$$

A_0 = مقدار در لحظه شروع

$f(t)$ = مقدار پس از گذشت t واحد زمانی

ب) مسائل مربوط به زمین لرزه



ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه است که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می دهد. اگر بزرگی زلزله ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده آن زلزله برابر E در واحد اِرج (Erg) است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\log E = 11.8 + 1.5M$$

به عنوان مثال مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله 6.6 ریشتری برابر است با:

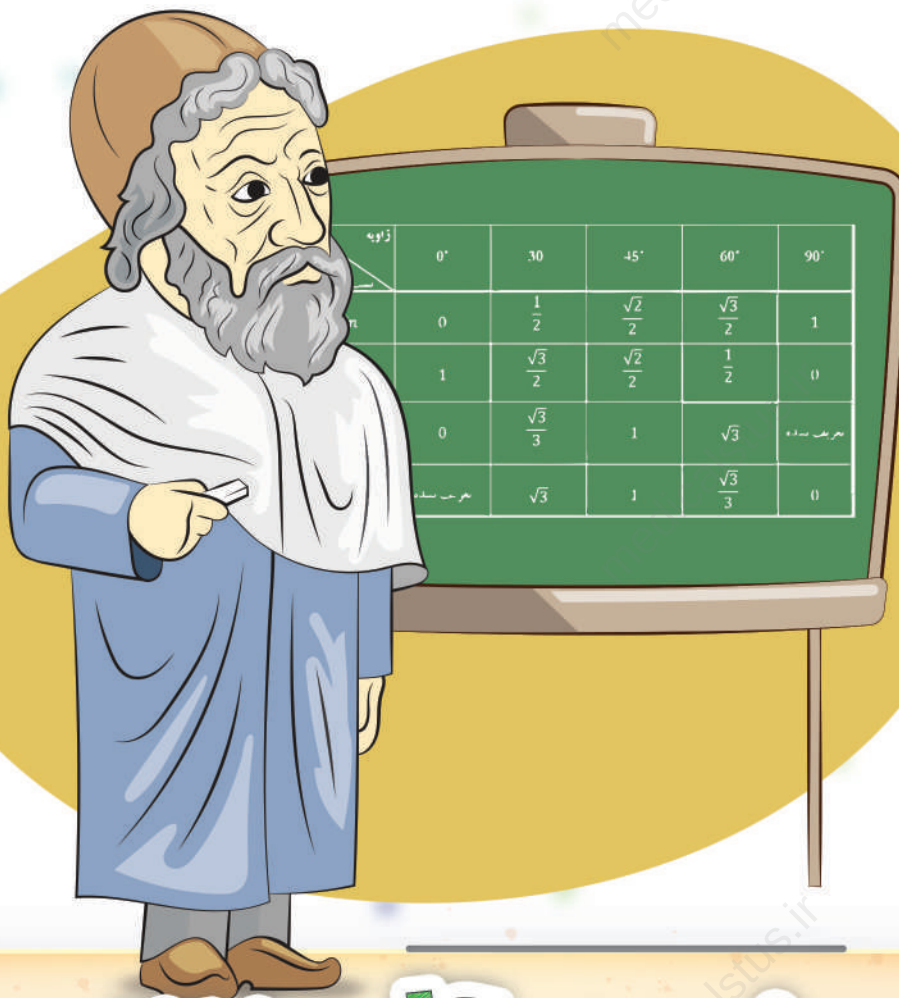
$$\log E = 11.8 + 1.5(6.6) = 21.7 \Rightarrow E = 10^{21.7} \text{ Erg}$$

نسبت انرژی دو زمین لرزه با شدت M_1 و M_2 ریشتر برابر است با:

$$\frac{E_2}{E_1} = 10^{1.5(M_2 - M_1)}, \quad M_2 - M_1 = \frac{2}{3} \log \frac{E_2}{E_1}$$



Lined area for writing notes, consisting of multiple horizontal blue lines.



فصل ۴: مثلثات

خب رسیدیم به چغرو بد بدن ترین فصل ریاضی 🥰

ترس اصلاً نمیخواد کنار باشی با فن هایی که قراره در این فصل یاد بگیری میتونی مثلثات رو شیش هیج بیری 🥰. فقط تا آخر فصل باهام همراه باش تا بهت یاد بدم چطوری میتونی مثلثات رو به برگ برنده خودت در کنکور تبدیل کنی...

میدونستی از این فصل در کنکور ۳ تا ۴ تست میاد؟! 🥰 تازه فرمول هاش در فصل حد و پیوستگی هم خیلی به کار میاد، یهو دیدی در کنکور یک سؤال از حد دارن که باید یک سری رابطه های مثلثاتی رو بلد باشی تا بتونی حلش کنی پس خیلی خوب یادش بگیر (یک بچه مازی هیچوقت باخت نمیده 🥰)

راستی اتحادها و روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا، نمودارها و معادله های مثلثاتی مهم ترین ها هستن، من جای تو بودم با یک چشم دیگه ناکشون میگردم 🥰

۱۴۰۲- نوبت دوم	۱۴۰۲- نوبت اول	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	کنکور سراسری
۶	۳	۳	۳	۶	تعداد سؤال
۱. روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ۲. کاربرد مثلثات (مساحت مثلث) ۳. نمودار توابع مثلثاتی ۴. معادلات مثلثاتی	۱. روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ۲. نمودار توابع مثلثاتی ۳. معادلات مثلثاتی	۱. روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ۲. نمودار توابع مثلثاتی ۳. معادلات مثلثاتی	۱. روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا ۲. اتحادهای مثلثاتی ۳. معادلات مثلثاتی	۱. نسبت های مثلثاتی ۲. روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا (۲ سؤال) ۳. معادلات مثلثاتی	مباحث مطرح شده در سؤال



زویه، کمان و قطاع

طول کمان

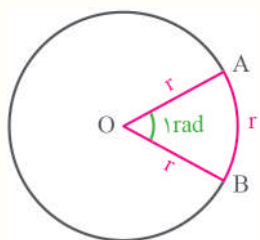
رابطه بین رادیان و درجه

واحدهای اندازه گیری زاویه

واحدهای اندازه گیری زاویه

برای گزارش اندازه زاویه، واحدهای مختلفی وجود دارد که پرکاربردترین آنها واحدهای **درجه** و **رادیان** است.

تعریف رادیان: در هر دایره دلخواه به شعاع r ، اگر طول کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی با شعاع دایره برابر باشد، اندازه زاویه مرکزی برابر یک **رادیان** خواهد بود.



تعریف درجه: اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به هر کدام از این قسمت‌ها، برابر ۱ درجه است.



توجه: برای نمایش یک زاویه برحسب رادیان، معمولاً از نماد **rad** استفاده می‌کنیم.

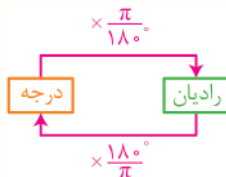
$$\widehat{AB} = r \Rightarrow \angle AOB = 1 \text{ rad}$$

رابطه بین رادیان و درجه

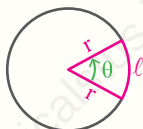
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$$

اگر D اندازه زاویه برحسب درجه و R اندازه همان زاویه برحسب رادیان باشد آنگاه:

یعنی برای تبدیل یک زاویه برحسب **درجه** به **رادیان** اون رو در $\frac{\pi}{180^\circ}$ ضرب می‌کنیم و برای تبدیل یک زاویه برحسب **رادیان** به **درجه**، اون رو در $\frac{180^\circ}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. هرچیزی گفتیم توی چرخه زیر خلاصه شده:



طول کمان



همواره در یک دایره به شعاع r ، بین اندازه یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان (l) روبه‌رو به آن زاویه، رابطه زیر برقرار است. (حواست باشه که θ برحسب رادیانه)

$$l = r\theta$$



نسبت های مثلثاتی

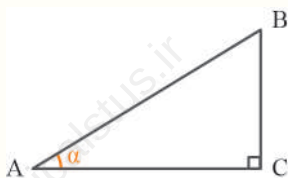


نسبت های مثلثاتی زاویه های معروف

معرفی نسبت های مثلثاتی

معرفی نسبت های مثلثاتی

برای زاویه حاده α در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:



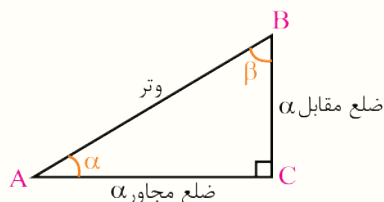
$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} = \frac{AC}{BC}$$

با توجه به نسبت های مثلثاتی تعریف شده و نیز با توجه به مثلث قائم الزاویه مقابل، اگر دو زاویه متمم هم باشند ($\alpha + \beta = 90^\circ$) داریم:



$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

به عنوان مثال:

$$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ \quad (10^\circ + 80^\circ = 90^\circ)$$

$$\tan 75^\circ = \cot 15^\circ \quad (75^\circ + 15^\circ = 90^\circ)$$

نسبت های مثلثاتی زوایای معروف

رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
درجه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تن	۰	تن	۰
cot	تن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تن	۰	تن

کاربردهای مثلثات

رابطه شیب خط
با تانژانت زاویه

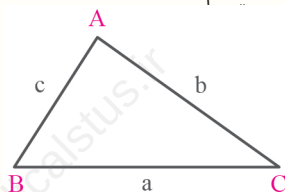
مثلث متساوی الاضلاع
و شش ضلعی منتظم

قضیه سینوس ها

به دست آوردن
مساحت مثلث

به دست آوردن مساحت مثلث

در هر مثلث اگر طول دو ضلع مثلث و اندازه زاویه بین اونا رو داشته باشیم به راحتی میتونیم مساحت مثلث رو به



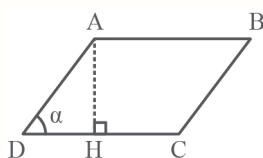
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$$

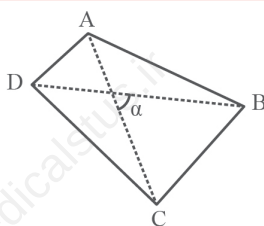
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$

مساحت متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع اگر اندازه دو ضلع و زاویه بین آنها را داشته باشیم، مساحت متوازی الاضلاع برابر است با:



$$S_{ABCD} = AH \times DC = AD \times DC \times \sin \alpha$$

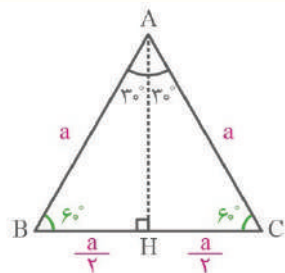


در هر چهارضلعی، اگر اندازه قطرها و زاویه بین دو قطر را داشته باشیم مساحت آن برابر است با:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin \alpha$$

مثلث متساوی الاضلاع و شش ضلعی منتظم:

الف در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a ، ارتفاع وارد بر هر ضلع، میانه و نیمساز نیز می باشد و اندازه آن برابر ا:

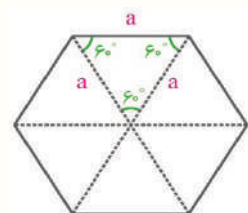


$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

ب مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

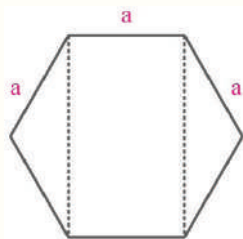
پ با رسم قطرهای بزرگ شش ضلعی منتظم به ضلع a ، شش مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a پدید می آید بنابراین مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر است با:



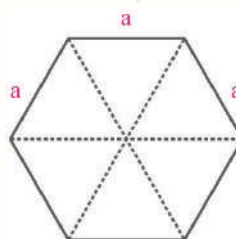
$$\Rightarrow S = 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$



ت در شش ضلعی منتظم به ضلع a :



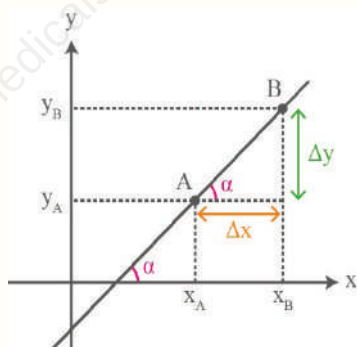
طول قطر کوچک $= \sqrt{3}a$



طول قطر بزرگ $= 2a$

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

شیب هر خطی که محور افقی را قطع می کند با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی برابر است، به عبارت دیگر اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می سازد آنگاه:



$$\begin{cases} m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط} = m = \tan \alpha$$

با داشتن شیب خط (m) و مختصات یک نقطه از آن (x_A, y_A) ، می توان معادله آن خط را به صورت زیر تشکیل داد:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

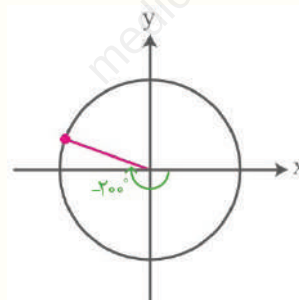
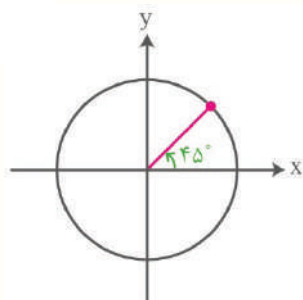
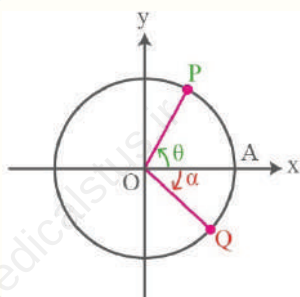
دایره مثلثاتی

معرفی دایره مثلثاتی	علامت نسبت های مثلثاتی در دایره مثلثاتی	مقایسه بین نسبت های مثلثاتی	محدوده تغییرات نسبت های مثلثاتی	نسبت های مثلثاتی زاویه های مختلف
$(-\alpha)$	$(\pi \pm \alpha)$	$(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$ و $(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha)$		

معرفی دایره مثلثاتی

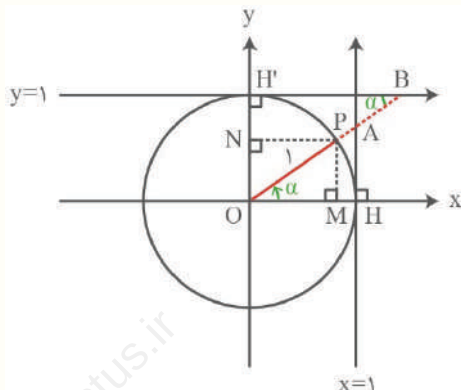
دایره مثلثاتی، دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۱ است. با توجه به شکل زیر، اگر از نقطه A شروع کنیم و روی محیط دایره و در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کنیم زاویه های مثبت ایجاد می شود و اگر در جهت عقربه های ساعت حرکت کنیم زوایای منفی تولید می شوند. در شکل مقابل زاویه θ زاویه ای با علامت مثبت و زاویه α ، زاویه ای با علامت منفی است.

مثال: در شکل های زیر، زوایای 45° و -20° را روی دایره مثلثاتی نشان داده ایم:





فرض کنید $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایره مثلثاتی باشد و α زاویه‌ای است که نیم خط $\overline{OP}$ با محور x می‌سازد. با استفاده از مفهوم نسبت‌های مثلثاتی داریم:



$$\Delta OPM: \begin{cases} \sin \alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{PM}{1} = PM & (I) \\ \cos \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM & (II) \end{cases}$$

$$\Delta OAH: \tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{AH}{1} = AH$$

$$\Delta OBH': \cot \alpha = \frac{BH'}{OH'} = \frac{BH'}{1} = BH'$$

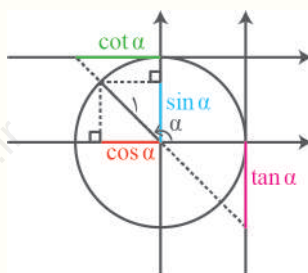
با استفاده از روابط I و II می‌توان به این نتیجه رسید که هر نقطه مانند P روی دایره مثلثاتی دارای مختصات به صورت $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ می‌باشد که با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه OPM به این نتیجه می‌رسیم که:

$$(OP)^2 = (PM)^2 + (OM)^2 \Rightarrow (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در دایره مثلثاتی

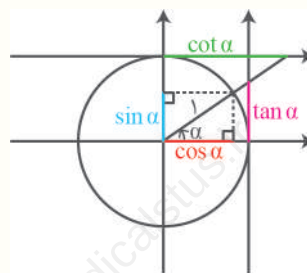


در دایره مثلثاتی، دو محور عمود بر هم، صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند و هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه مثلثاتی یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به دایره مثلثاتی علامت نسبت‌های مثلثاتی را در هر یک از نواحی به صورت زیر مشخص می‌کنیم:



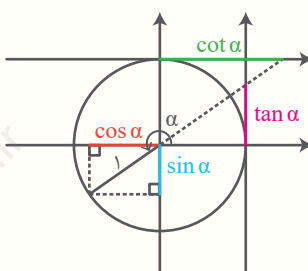
انتهای کمان α در ناحیه دوم

درجه	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
رادیان	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$



انتهای کمان α در ناحیه اول

درجه	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$
رادیان	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$



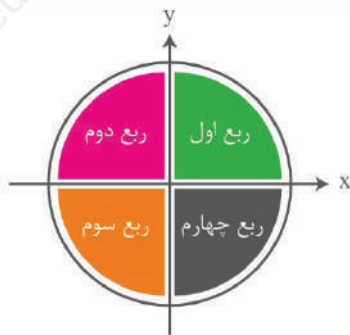
انتهای کمان α در ناحیه سوم

درجه	$180^\circ < \alpha < 270^\circ$
رادیان	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$



انتهای کمان α در ناحیه چهارم

درجه	$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
رادیان	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$



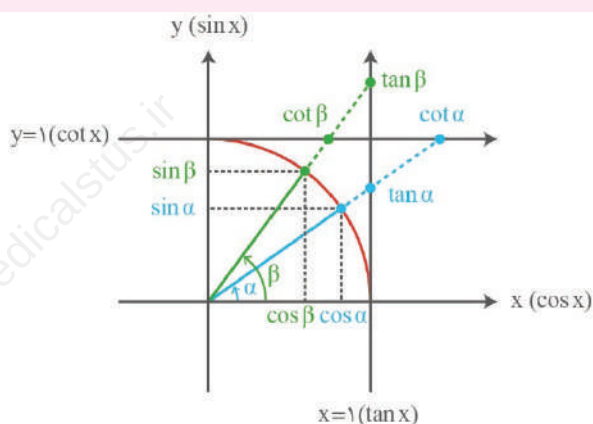
	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

مقایسه نسبت های مثلثاتی

برای مقایسه نسبت های مثلثاتی در یک محدوده، ابتدا باید مقادیر آن نسبت ها را در محدوده مورد نظر به دست آورده و سپس آن مقادیر را با هم مقایسه کنیم.

برای به دست آوردن مقادیر sin و cos یک زاویه مانند α از روی دایره مثلثاتی، از انتهای کمان هر زاویه بر محورهای sin و cos عمود می کنیم، پای عمود وارد شده به ترتیب مقادیر $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را نمایش می دهند. و نیز برای به دست آوردن مقادیر tan و cot زاویه ای مانند β از روی دایره مثلثاتی، انتهای کمان هر زاویه را آنقدر امتداد می دهیم تا محورهای tan و cot را قطع کند، محل برخورد این امتداد با محورهای tan و cot، به ترتیب $\tan \beta$ و $\cot \beta$ را نمایش می دهد.

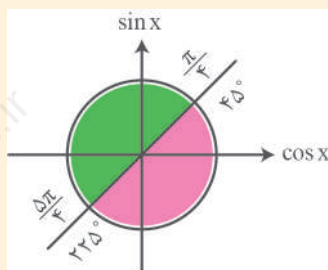
در شکل زیر این مقایسه را برای ناحیه اول مثلثاتی انجام داده ایم. برای مقایسه نسبت های مثلثاتی در هر محدوده از دایره مثلثاتی می توانیم از این روش استفاده کرده و مقادیر را با هم مقایسه کنیم.



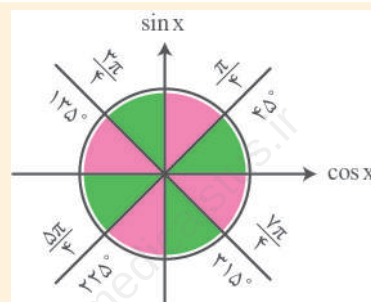
برای مقایسه نسبت های مثلثاتی، سعی می کنیم که حتی الامکان با استفاده از اتحاد های مثلثاتی و یا روابط متمم و مکمل، نسبت ها را هم جنس کرده و سپس نسبت های هم جنس با کمان های متفاوت را با هم مقایسه نمائیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha < \sin \beta \\ \cos \alpha > \cos \beta \\ \tan \alpha < \tan \beta \\ \cot \alpha > \cot \beta \end{array} \right. \quad \alpha < \beta \text{ در ناحیه اول مثلثاتی}$$

حالت های خاص



ناحیه صورتی رنگ: $\cos x > \sin x$
ناحیه سبز رنگ: $\sin x > \cos x$



ناحیه صورتی رنگ: $\tan x > \cot x$
ناحیه سبز رنگ: $\cot x > \tan x$

برای حل این تپ تس ها سعی کن تا جایی که میتونی زاویه رو دقیق روی دایره مشخص کنی، بعضی وقتا یک اشتباه کوچیک باعث میشه گزینه نادرستی رو انتخاب کنی و ...



محدوده تغییرات نسبت های مثلثاتی



می دانیم دایره مثلثاتی به شعاع ۱ واحد است بنابراین $-1 \leq x \leq 1$ و $-1 \leq y \leq 1$ است. از طرفی هر نقطه ای که روی دایره مثلثاتی اختیار کنیم مختصات آن به عبارت $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ خواهد بود بنابراین $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ و $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ است برای درک بهتر این موضوع در شکل های زیر تغییرات نسبت های مثلثاتی را در نواحی مختلف بررسی کرده ایم:

الف تغییرات $\sin \alpha$

	α	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$		α	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$		α	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$		α	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\sin \alpha$		$0 \rightarrow 1$	$\sin \alpha$		$1 \rightarrow 0$	$\sin \alpha$		$0 \rightarrow -1$	$\sin \alpha$		$-1 \rightarrow 0$

پس می توانیم نتیجه بگیریم که سینوس هر چیزی بین -۱ و ۱ قرار دارد به عبارتی همواره $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$.

ب تغییرات $\cos \alpha$

	α	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$		α	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$		α	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$		α	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\cos \alpha$		$1 \rightarrow 0$	$\cos \alpha$		$0 \rightarrow -1$	$\cos \alpha$		$-1 \rightarrow 0$	$\cos \alpha$		$0 \rightarrow 1$

پس می توانیم نتیجه بگیریم که کسینوس هر چیزی بین -۱ و ۱ قرار دارد به عبارتی همواره $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

پ تغییرات $\tan \alpha$

	α	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$		α	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$		α	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$		α	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$
$\tan \alpha$		$0 \rightarrow +\infty$	$\tan \alpha$		$-\infty \rightarrow 0$	$\tan \alpha$		$0 \rightarrow +\infty$	$\tan \alpha$		$-\infty \rightarrow 0$

بنابراین می توان گفت که تانژانت همواره بین $-\infty$ تا $+\infty$ متغیر است به عبارتی همواره $-\infty < \tan \alpha < +\infty$.



ت تغییرات $\cot \alpha$:

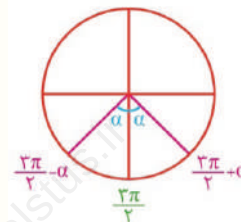
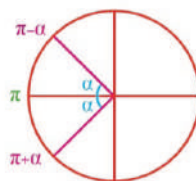
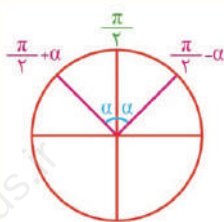
	α	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\cot \alpha$	$+\infty \rightarrow 0$
	α	$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$\cot \alpha$	$0 \rightarrow -\infty$
	α	$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$\cot \alpha$	$+\infty \rightarrow 0$
	α	$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$	$\cot \alpha$	$0 \rightarrow -\infty$

پس نتیجه می شود که کتانژانت همواره بین $-\infty$ تا $+\infty$ متغیر است به عبارتی همواره $-\infty < \cot \alpha < +\infty$.

نسبت های مثلثاتی زوایای مختلف

برای به دست آوردن نسبت های مثلثاتی زوایای مختلف، به روش زیر عمل می کنیم:

۱ با فرض **حاده** بودن زاویه α ؛ ابتدا باید مشخص کنیم که انتهای کمان نسبت مثلثاتی داده شده در کدام ناحیه قرار دارد. برای این کار به سراغ کمان نسبت مثلثاتی رفته و با توجه به شکل های زیر ناحیه مثلثاتی آن کمان را پیدا می کنیم:



به عنوان مثال کمان $(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ در ناحیه سوم و کمان $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ در ناحیه اول قرار دارد.

۲ سپس **علامت نسبت مثلثاتی** داده شده رو در اون ناحیه مثلثاتی مشخص می کنیم.

مرحله ۱: $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ در ناحیه چهارم قرار دارد $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$
 مرحله ۲: علامت $\sin$ در ناحیه چهارم منفی است
 مرحله ۱: $\pi - \alpha$ در ناحیه دوم قرار دارد $\tan(\pi - \alpha)$
 مرحله ۲: علامت $\tan$ در ناحیه دوم منفی است

۳ در نهایت باید **ماهیت نسبت مثلثاتی** رو تعیین کنیم به این صورت که اگر کمان نسبت مثلثاتی شامل مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ (مانند $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$)

باشد، ماهیت نسبت مثلثاتی از $\sin$ به $\cos$ و از $\tan$ به $\cot$ و بالعکس تغییر می کنه $[\sin \leftrightarrow \cos, \tan \leftrightarrow \cot]$ در غیر این صورت نسبت مثلثاتی رو بدون تغییر می گذاریم:

مرحله ۱: $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$ در ناحیه اول قرار دارد $\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$
 مرحله ۲: علامت $\cos$ در ناحیه اول مثبت است.
 مرحله ۳: کمان مثلثاتی داده شده شامل $\frac{\pi}{2}$ است پس نسبت مثلثاتی از $\cos$ به $\sin$ تغییر می کند.
 $\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \sin 2\alpha$

حال هر آنچه در مورد ارتباط نسبت های مثلثاتی دیگر با نسبت های مثلثاتی زاویه α نیاز دارید در جدول هایی براتون آماده کرده ایم:

$(-\alpha)$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

■ **نسبت های مثلثاتی زاویه $(-\alpha)$**

زاویه $(-\alpha)$ در **ناحیه چهارم** مثلثاتی قرار دارد و نیز با توجه به عدم حضور مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ در داخل کمان، ماهیت

نسبت های مثلثاتی **تغییر نمی کند** پس:

به عبارت دیگر به غیر از کسینوس، سایر نسبت های مثلثاتی علامت **منفی** کمان خود را به **ضرب** انتقال می دهند

(کسینوس منفی را می خورد)



نکته اگر در کمان نسبت های مثلثاتی مضارب زوج π (مانند $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$) وجود داشته باشد میتونیم اونارو حذف کنیم. (دلیلش هم اینه که وجود مضارب زوج π داخل کمان، باعث تولید زوایای هم‌انتهای^۱ با زاویه اصلی میشه)

- $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

■ نسبت های مثلثاتی زوایای $(\pi \pm \alpha)$

برای مشخص کردن علامت نسبت های مثلثاتی باید بدانیم که زاویه $(\pi - \alpha)$ در ناحیه دوم مثلثاتی و زاویه $(\pi + \alpha)$ در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد و چون در داخل کمان مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ حضور ندارند پس ماهیت نسبت های مثلثاتی نیز تغییر نمی کند بنابراین:

$(\pi - \alpha)$	$(\pi + \alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = +\sin \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = +\tan \alpha$
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = +\cot \alpha$

نکته با توجه به روابط مربوط به زاویه $(\pi - \alpha)$ ، می توان گفت؛ اگر α و β دو زاویه مکمل باشند (جمعشون بشه 180°) داریم:

$$\alpha + \beta = \pi \xrightarrow{\alpha = \pi - \beta} \begin{cases} \sin \alpha = \sin(\pi - \beta) = \sin \beta \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta \\ \cos \alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta \Rightarrow \cos \alpha = -\cos \beta \\ \tan \alpha = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta \Rightarrow \tan \alpha = -\tan \beta \\ \cot \alpha = \cot(\pi - \beta) = -\cot \beta \Rightarrow \cot \alpha = -\cot \beta \end{cases}$$

نکته در کمان های بزرگ تر، به جای مضارب فرد π ، (مانند $3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$) خود π را جایگزین می کنیم:

- $\sin(7\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\tan(7\pi + \frac{\alpha}{2}) = \tan(\pi + \frac{\alpha}{2}) = \tan \frac{\alpha}{2}$

■ نسبت های مثلثاتی زوایای $(\frac{\pi}{2} \pm \alpha)$, $(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha)$

۱ برای مشخص کردن علامت نسبت های مثلثاتی باید بدانیم که زاویه $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ در ناحیه اول، زاویه $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ در ناحیه دوم، زاویه $(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ در ناحیه سوم و زاویه $(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد.

۲ با توجه به حضور مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ داخل کمان، ماهیت نسبت های مثلثاتی تغییر می کند:

$(\frac{\pi}{2} - \alpha)$	$(\frac{\pi}{2} + \alpha)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\cos \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = +\cos \alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\sin \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\cot \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\tan \alpha$	$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$

۱ آله انتهای کمان چند زاویه روی هم پیفته اون زاویه ها رو هم انتها میگوین. یادت باشه زاویه های هم انتها نسبت های مثلثاتی برابر دارند. مثلاً زاویه های $(-\alpha)$ و $(7\pi - \alpha)$ هم انتها هستن.



$$\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\tan \alpha$$

$$\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

نکته با توجه به روابط مربوط به زاویه $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ، می‌توان گفت اگر α و β دو زاویه متمم باشند، (جمعشون بشه 90°) داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta} \begin{cases} \sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = +\cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta \\ \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = +\sin \beta \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta \\ \tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = +\cot \beta \Rightarrow \tan \alpha = \cot \beta \\ \cot \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = +\tan \beta \Rightarrow \cot \alpha = \tan \beta \end{cases}$$

اتحادهای مثلثاتی

ارتباط نسبت‌های مثلثاتی
دو برابر کمان با $\tan \alpha$

فک و فامیل‌های نسبت‌های
مثلثاتی دو برابر کمان

نسبت‌های مثلثاتی
زاویه‌های دو برابر کمان

اتحادهای اولیه

اتحادهای اولیه

اگر یکی از نسبت‌های مثلثاتی را داشته باشیم، با استفاده از اتحادهای مثلثاتی زیر می‌توانیم سایر نسبت‌های مثلثاتی مربوط به آن زاویه را به دست آوریم:

$$\bullet \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \sin^2 x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightarrow \cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x) \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, (\cos x \neq 0) \\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, (\sin x \neq 0) \end{cases} \xrightarrow{\text{نتیجه}} \tan x \cdot \cot x = 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\cot x} \\ \cot x = \frac{1}{\tan x} \end{cases}$$

$$\bullet 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, (\cos x \neq 0)$$

$$\bullet 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, (\sin x \neq 0)$$

مثال: اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ و انتهای کمان α در ناحیه چهارم باشد داریم:

$$\bullet \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیه چهارم}} \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$



$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\bullet \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

روش دوم: با رسم یک مثلث قائم الزاویه نیز می توانیم سایر نسبت های مثلثاتی را به دست آوریم. اما باید توجه داشته باشیم زمانیکه مسئله را به فضای مثلث قائم الزاویه می بریم عملاً زاویه را حاده در نظر گرفته ایم بنابراین باید پس از این که نسبت های مثلثاتی را به دست آوردیم، با توجه به این که انتهای کمان x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد، علامت نسبت مثلثاتی مورد نظر را نیز تعیین کنیم.

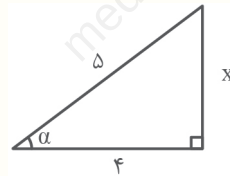
می دانیم که نسبت کسینوس به صورت $\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}}$ تعریف می شود بنابراین در مثلث قائم الزاویه زیر داریم:

$$x^2 + (4)^2 = (5)^2 \Rightarrow x = 3$$

$$|\sin \alpha| = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم } \alpha} \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$|\tan \alpha| = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم } \alpha} \tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$|\cot \alpha| = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم } \alpha} \cot \alpha = -\frac{4}{3}$$



نسبت های مثلثاتی زاویه های دو برابر کمان

$$\bullet \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\text{در حالت کلی تر} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

مثال

$$\left| \begin{aligned} \sin(\alpha) &= 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin(6^\circ) &= 2 \sin(3^\circ) \cos(3^\circ) \end{aligned} \right.$$

$$\bullet \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\text{در حالت کلی تر} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال: $\tan(110^\circ) = \frac{2 \tan(55^\circ)}{1 - \tan^2(55^\circ)}$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned} \right.$$

$$\text{در حالت کلی تر} \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

مثال

$$\left| \begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \cos(20^\circ) &= \cos^2(10^\circ) - \sin^2(10^\circ) = 2 \cos^2(10^\circ) - 1 = 1 - 2 \sin^2(10^\circ) \end{aligned} \right.$$

فک و فامیل های نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان

$$\bullet (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{=1} \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \pm \sin 2\alpha$$

$$\bullet \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$\bullet \tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{-2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2 \cot 2\alpha$$

$$\bullet \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$



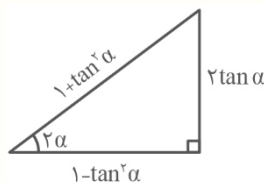
$$\bullet \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha$$

$$\bullet \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

توجه رابطه های بالا رو حفظ نکن! فقط کافیه روش بدست آوردن اونارو یاد بگیری تا وقتی بهشون نیاز داشتی خودت بتونی به دستشون بیاری.

ارتباط نسبت های مثلثاتی دو برابر کمان با $\tan \alpha$

$$\begin{aligned} \bullet \sin 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \bullet \cos 2\alpha &= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \bullet \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$



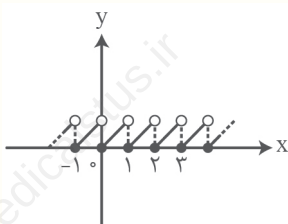
مثلت رو فقط برای این کشیدیم تا رابطه های مقابل رو بهتر بتونی یاد بگیری.

دوره تناوب



تعریف

اگر قسمتی از نمودار یک تابع به صورت متوالی و در بازه های معین تکرار شود تابع مورد نظر **متناوب** بوده و به **کوچک ترین** بازه ای که این قسمت از نمودار در آن قرار دارد دوره تناوب می گوییم. در شکل مقابل که مربوط به تابع $y = x - [x]$ می باشد قسمتی از نمودار تابع که به صورت متناوب می باشد به صورت متوالی و در بازه هایی به طول ۱ تکرار می شود بنابراین این تابع، تابعی متناوب با دوره تناوب $T = 1$ می باشد.



به عبارت دیگر تابع f را متناوب می نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوریکه برای هر x از دامنه $(x \in D_f)$ داشته باشیم $(x \pm nT \in D_f, n \in \mathbb{Z})$ و $f(x \pm nT) = f(x)$.

کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دوره تناوب** تابع f می نامیم.

نکته اگر دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر T باشد دوره تناوب تابع $g(x) = af(bx+c)$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است.

نکته دوره تناوب توابع مثلثاتی: اگر a, b, c و d اعدادی حقیقی و $b \neq 0$ باشند داریم:

$$\begin{cases} f(x) = a \sin(bx + c) + d \\ f(x) = a \cos(bx + c) + d \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\begin{cases} f(x) = a \tan(bx + c) + d \\ f(x) = a \cot(bx + c) + d \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

کاملاً مشخصه که در توابع مثلثاتی بالا، دوره تناوب فقط به ضریب x وابسته و بقیه ضرایب در دوره تناوب تأثیری ندارند چرا که ضرایب a و d فقط برد تابع را تغییر میدن و مقدار c هم نمودار رو در راستای محور x جابه جا میکنه. پس فقط مقدار b در ضریب x میتونه نمودار تابع رو در راستای محور x منقبض یا منبسط کرده و روی دوره تناوب تأثیر بذاره.

نکته در بعضی از سؤالا برای محاسبه دوره تناوب، اول باید رابطه داده شده رو به کمک روابط مثلثاتی تا حد امکان ساده کنیم و بعدش دوره تناوب اون رو به دست بیاریم.

توابع مثلثاتی

$$y = \cot x$$

$$y = \tan x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \sin x$$

به توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ ، تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ و تابع تانژانت با ضابطه $y = \tan x$ توابع مثلثاتی می‌گوییم.

تابع $y = \sin x$ و ویژگی‌های آن

دامنه: مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$

برد: $[-1, 1]$

این تابع در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود پس تابع $y = \sin x$

تابعی متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ است.

تابعی غیر یک به یک است.

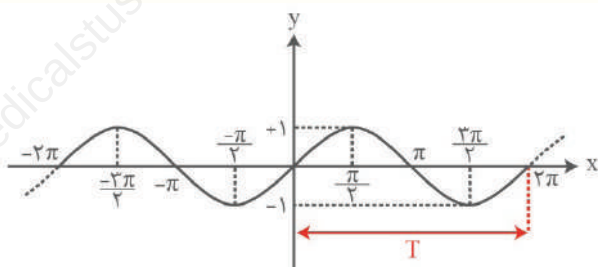
تابع $y = \sin x$ در کل دامنه خود نه صعودی و نه نزولی است پس

غیریکنواسه اما می‌تواند در بخشی از دامنه خود صعودی و یا نزولی باشد.

این تابع در نقاطی به طول $(k \in \mathbb{Z})$ ، $x = k\pi$ ، محور x ها را قطع می‌کند به عبارت دیگر مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است.

بیشترین مقدار تابع برابر $+1$ است که در نقاطی به طول های $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{5\pi}{2}$ و در حالت کلی در نقاطی به طول های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ رخ می‌دهد.

کمترین مقدار تابع برابر -1 است که در نقاطی به طول های $x = \frac{3\pi}{2}$ ، $x = \frac{7\pi}{2}$ و در حالت کلی در نقاطی به طول های $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ اتفاق می‌افتد.



تابع $y = \cos x$ و ویژگی‌های آن

دامنه: مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$

برد: $[-1, 1]$

در بازه‌هایی به طول 2π تکرار می‌شود پس تابع $y = \cos x$ تابعی

متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi$ است.

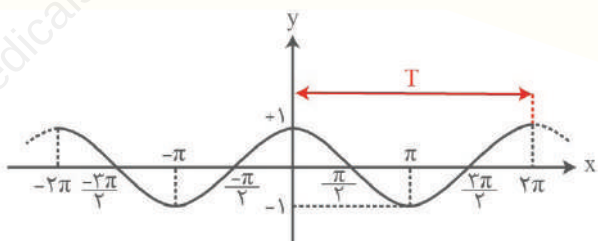
تابعی غیر یک به یک است.

این تابع در دامنه خود نه صعودی و نه نزولی است پس غیریکنواسه اما می‌تواند در بخشی از دامنه خود صعودی و یا نزولی باشد.

این تابع در نقاطی به طول $(k \in \mathbb{Z})$ ، $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ، محور x ها را قطع می‌کند و این نقاط صفرهای تابع به حساب می‌آیند.

بیشترین مقدار تابع برابر $+1$ است که در نقاطی به طول های $x = 0$ ، $x = 2\pi$ و به طور کلی در نقاطی به طول های $x = 2k\pi$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ اتفاق می‌افتد.

کمترین مقدار تابع برابر -1 است که در نقاطی به طول های $x = \pi$ ، $x = 3\pi$ و به طور کلی در نقاطی به طول های $x = (2k+1)\pi$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ رخ می‌دهد.



تابع $y = \tan x$ و ویژگی‌های آن

دامنه: $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ یا به صورت دیگر می‌شود: $D = \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

برد: مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$

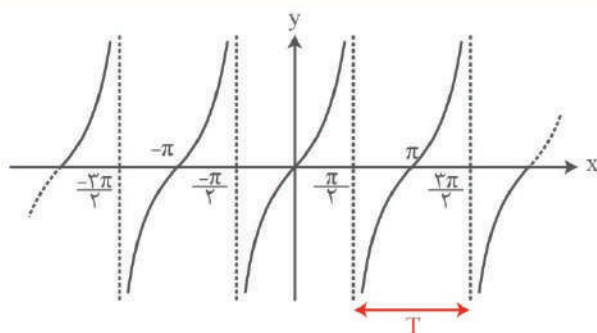
نمودار این تابع در بازه‌هایی به طول π تکرار می‌شود بنابراین تابع $y = \tan x$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ است.

این تابع در نقاطی به طول های $x = 0$ ، $x = \pi$ و به طور کلی در نقاطی به طول های $x = k\pi$ ، $(k \in \mathbb{Z})$ ، محور x ها را قطع می‌کند.

همان‌طور که از نمودار تابع مشخص است، این تابع در بازه‌های $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ و اکیداً صعودی است ولی در کل دامنه‌اش تابعی نه



صعودی و نه نزولی است. (غیریکنواست) و به طور کلی می توان گفت که تابع $y = \tan x$ در بازه هایی به فرم $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ، اکیداً صعودی است. ($k \in \mathbb{Z}$)



تابع $y = \cot x$ و ویژگی های آن

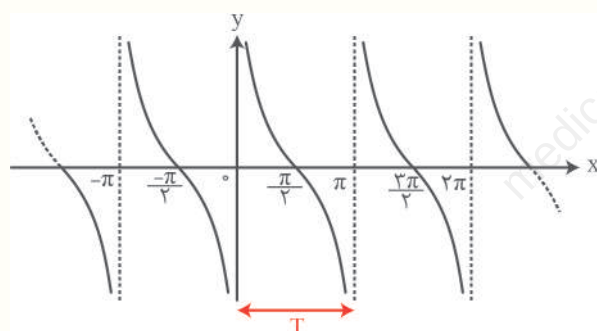
دامنه: $D = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ یا به صورت دیگر می شود $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

برد: مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)

نمودار این تابع همانند تابع تانژانت در بازه هایی به طول π تکرار می شود بنابراین می توان گفت تابع $y = \cot x$ نیز تابعی متناوب با دوره تناوب $T = \pi$ است.

نمودار این تابع در نقاطی به طول های $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}, \dots$ و به طور کلی در نقاطی به طول های $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ محور x ها را قطع می کند.

با توجه به نمودار تابع $y = \cot x$ ، این تابع در بازه های $(-\pi, 0)$ ، $(0, \pi)$ ، ... اکیداً نزولی است ولی در کل دامنه اش نه نزولی و نه صعودی است (غیریکنواست). به طور کلی تابع $y = \cot x$ در بازه هایی به فرم $(k\pi, (k+1)\pi)$ اکیداً نزولی است. ($k \in \mathbb{Z}$)

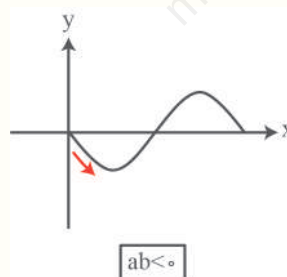
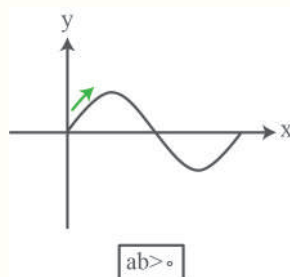


تحلیل نمودار توابع مثلثاتی

در برخی از سؤالات مرتبط با این بحث، نمودار تابع مثلثاتی را به ما می دهند و از ما می خواهند که پارامترهای مجهولی که در ضابطه تابع وجود دارد را به دست آوریم. برای این کار باید با استفاده از نمودار تابع و تحلیل آن اطلاعاتی که درون نمودار نهفته است را به دست آورده و با استفاده از آنها مجهولات مورد نظر سؤال را پیدا کنیم. برای تحلیل نمودار توابع، نیازمند یک سری ابزار هستیم که در ادامه آنها را به شما معرفی می کنیم.

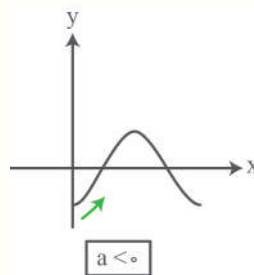
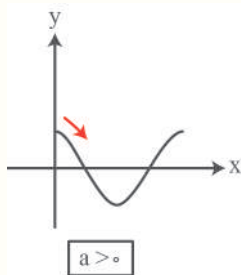
■ تحلیل نمودار توابع به فرم $y = a \sin(bx) + c$ و $y = a \cos(bx) + c$

• شروع (start) نمودار: در تابع $y = a \sin(bx) + c$ ، اگر a و b هم علامت نباشند ($ab < 0$)، نمودار از $x = 0$ به صورت نزولی حرکت می کند و اگر a و b هم علامت باشند ($ab > 0$)، نمودار در شروع از صفر صعودی است.





در تابع $y = a \cos(bx) + c$ ، اگر $a > 0$ باشد نمودار از $x = 0$ به صورت نزولی حرکت می کند و اگر $a < 0$ باشد نمودار در شروع از صفر صعودی است.



توجه: با توجه به این که $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، و اصطلاحاً منفی خوار بودن کسینوس، علامت ضریب x (b) در تحلیل نمودار کسینوسی تأثیری ندارد.

• بیشترین مقدار (max) و کمترین مقدار (min) نمودار:

$$\max : |a| + c \Rightarrow \text{مقدار ثابت} + \text{ضریب sin یا cos}$$

$$\min : -|a| + c \Rightarrow \text{مقدار ثابت} + \text{ضریب sin یا cos}$$

حال اگر دو طرف روابط بالا را یکبار از هم کم و یکبار با هم جمع کنیم به نتایج جالبی می رسیم:

$$\max = |a| + c$$

$$\max = |a| + c$$

$$(-) \min = -|a| + c$$

$$+ \min = -|a| + c$$

$$\max - \min = 2|a|$$

$$\max + \min = 2c$$

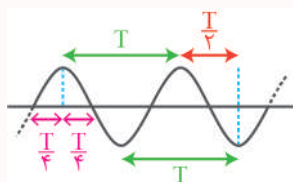
$$\Rightarrow |a| = \frac{\max - \min}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\max + \min}{2}$$

بنابراین با داشتن مقادیر max و min در نمودار، می توانیم با استفاده از روابط فوق، مقدار ثابت در ضابطه تابع (c) و نیز مقدار دامنه موج $|a|$ را به دست آوریم.

• دوره تناوب:

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



فاصله دو دره متوالی = فاصله دو قله متوالی = T

$\frac{T}{2}$ = فاصله یک قله و یک دره متوالی

$\frac{T}{4}$ = نصف قله = نصف دره

نکته: از فصل موج در فیزیک به خاطر داریم که

■ تحلیل نمودار تابع به فرم $y = a \tan(bx) + c$

در توابع به فرم $y = a \tan(bx) + c$ اگر a و b هم علامت نباشند

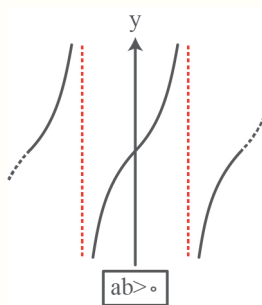
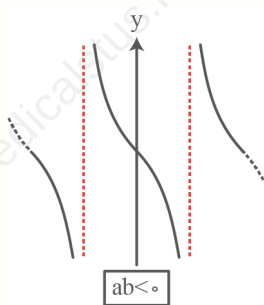
($ab < 0$) نمودار تابع در بازه های تعریف شده اکیداً نزولی و اگر a

و b هم علامت باشند ($ab > 0$)، نمودار تابع در بازه های تعریف شده

اکیداً صعودی است.

دوره تناوب این توابع برابر است با:

$$\text{دوره تناوب} = \frac{\pi}{|\text{ضریب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$





معادلات مثلثاتی



معادلات به فرم $\tan x = a$ و $\cot x = a$

معادلات به فرم $\cos x = a$

معادلات به فرم $\sin x = a$

به معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی می‌گوییم به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$\bullet \cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

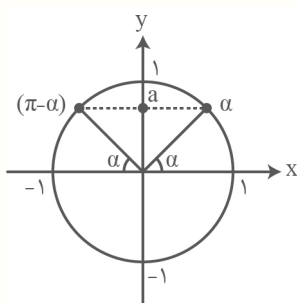
$$\bullet \sin 3x = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet \tan 6x = \tan \pi x$$

معادلات به فرم $\sin x = a$



برای حل معادلات به فرم $\sin x = a$ که در آن a عددی حقیقی و $-1 \leq a \leq 1$ است، ابتدا زاویه‌ای مانند α که مقدار سینوس آن برابر a باشد را پیدا کرده $(\sin \alpha = a)$ و سپس معادله $\sin x = a$ را به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌کنیم. در نهایت برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی داریم: $\sin x = \sin \alpha$



$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

و در حالت کلی‌تر داریم:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

به عنوان مثال برای حل معادله $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، ابتدا باید زاویه‌ای که سینوس آن برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است را پیدا کرده $(\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2})$ سپس در معادله $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، به جای $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\sin \frac{\pi}{4}$ را قرار می‌دهیم و سپس جواب‌های آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x_2 = 2k\pi + \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

حالت‌های خاص معادلات سینوسی:

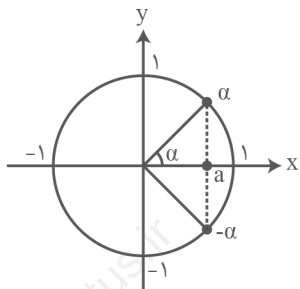
معادله	جواب کلی	جواب‌ها روی دایره مثلثاتی
$\sin x = 0$	$x = k\pi$	
$\sin x = 1$	$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\sin x = -1$	$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	



معادلات به فرم $\cos x = a$:



برای حل معادلات به فرم $\cos x = a$ که در آن a عددی حقیقی و $-1 \leq a \leq 1$ است. نیز همانند حل معادلات سینوسی، ابتدا باید زاویه‌ای مانند α که مقدار کسینوس آن برابر a باشد را پیدا کنیم ($\cos \alpha = a$) و سپس معادله $\cos x = a$ را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ بنویسیم در نهایت برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos x = \cos \alpha$ داریم:



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

و در حالت کلی تر داریم:

$$\cos f(x) = \cos g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}$$

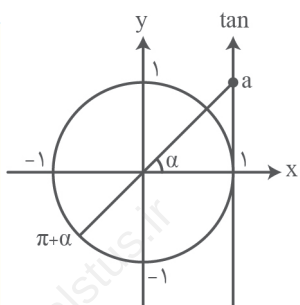
حالت‌های خاص معادلات کسینوسی:

معادله	جواب کلی	جواب‌ها روی دایره مثلثاتی
$\cos x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\cos x = 1$	$x = 2k\pi$	
$\cos x = -1$	$x = (2k+1)\pi$	

معادلات به فرم $\tan x = a$ و $\cot x = a$:



همواره برای هر عدد حقیقی a ، که $\tan x = a$ است، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم: $\tan \alpha = a$ بنابراین معادله $\tan x = a$ به صورت $\tan x = \tan \alpha$ بازنویسی می‌شود. حال برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x = \tan \alpha$ داریم:



$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

و در حالت کلی تر داریم:

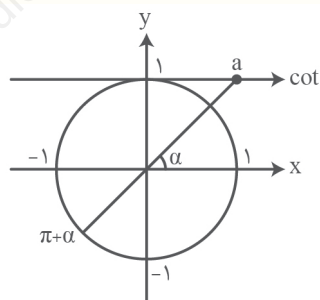
$$\tan f(x) = \tan g(x) \Rightarrow f(x) = k\pi + g(x)$$

به طریق مشابه برای حل معادلات به فرم $\cot x = a$ داریم:

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

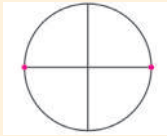
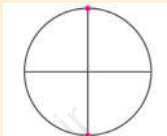
و در حالت کلی تر داریم:

$$\cot f(x) = \cot g(x) \Rightarrow f(x) = k\pi + g(x)$$





حالت های خاص:

معادله	جواب کلی	جواب ها روی دایره مثلثاتی
$\tan x = 0$	$x = k\pi$	
$\cot x = 0$	$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	

نکته در حل بعضی از معادلات مثلثاتی اول نسبت مثلثاتی مورد نظر رو با استفاده از تغییر متغیر به یک معادله جبری (معمولاً درجه ۲) تبدیل میکنیم و با حل معادله مورد نظر جواب های اون رو به دست میاریم. بعدش جواب های به دست اومده رو با نسبت مثلثاتی برابر قرار میدیم و معادله مثلثاتی رو به روش های گفته شده حل می کنیم.

نکته در حل برخی از معادلات مثلثاتی لازمه که با استفاده از روابط مثلثاتی زوایای متمم، مکمل و قرینه، معادله مثلثاتی را به فرم استاندارد تبدیل کنیم به عبارتی باید نسبت های مثلثاتی موجود در معادله رو هم جنس و هم علامت کنیم. چندتا نمونه ببین:

$$\sin u = \cos v \xrightarrow{\text{هم جنس}} \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$\sin u = -\cos v \xrightarrow{\text{هم جنس}} \sin u = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \xrightarrow{\text{هم علامت}} \sin u = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos u = -\cos v \xrightarrow{\text{هم علامت}} \cos u = \cos(\pi - v)$$

$$\sin u = -\sin v \xrightarrow{\text{هم علامت}} \sin u = \sin(-v)$$

نکته در حل بعضی از معادلات مثلثاتی (معمولاً زمانی که تعداد جواب ها مدنظر سؤاله) از روش رسم هندسی استفاده می کنیم به عبارتی در معادلات به فرم $f(x) = g(x)$ ، اگر f و g توابعی باشن که یکی جبری و دیگری مثلثاتی باشه در این صورت نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم، نقاط تلاقی دو نمودار، جواب های معادله هستن.

نکته در حل برخی از معادلات مثلثاتی ممکن است به حالت های زیر برخورد کنیم که بد نیست جواب کلی این نوع از معادلات را هم بلد باشید.

$$\begin{cases} \sin^2 x = \sin^2 \alpha \\ \cos^2 x = \cos^2 \alpha \\ \tan^2 x = \tan^2 \alpha \\ \cot^2 x = \cot^2 \alpha \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$



Lined area for writing notes, consisting of multiple horizontal blue lines.



فصل ۵: حد و پیوستگی

های فرندز! 🍷 ما اومدیم با یه فصل تپال و پُر و پیمون دیگه؛ فصلی که اگه خوب بهش توجه کنیم میبینیم که پُر از درس هاییه که میتونیم حتی توی زندگیمون هم ازش استفاده کنیم. ما توی این فصل یاد میگیریم که اگه خدای نکرده به مشکلی برخورد کردیم بتونیم با تکیه به آموخته هامون اون رو رفع کنیم و بدونیم که برای رفع یه مشکل یا ابهام، سخت ترین راه حل، لزوماً بهترین راه نیست و همچنین میتونیم یاد بگیریم که حتی اگه هدفمون توی بی نهایت هم باشه برای رسیدن بهش باید بی نهایت بار تلاش کنیم و توی کارمون تداوم و پیوستگی داشته باشیم چرا که جازدن و ناپیوستگی توی مسیرمون میتونه باعث شکست بشه. فصلی که قراره استارتش رو بزنی حد و پیوستگیه، یه فصل مهم و اساسی که شاخ و برگش حتی تا فصل مشتق و کاربرد مشتق هم نفوذ میکنه. احتمالاً سؤالی که ذهنتون رو مشغول کرده اینه که این فصل توی کنکور چقدر اهمیت داره! در جوابتون باید بگیم که حدوداً ۲ الی ۶ تا از سؤالات کنکور رو برای این فصل رزرو کنید و برای اینکه بتونید از پس همه اونا بر بیاید، علاوه بر تسلط کامل روی این فصل، باید نکته های مربوط به قدمطوق، جزو صحیح، اتحاد های جبری و روابط مثلثاتی رو هم خوب بلد باشید. راستی، به بخش های حد در بی نهایت، مجانب ها و پیوستگی هم نگاه ویژه تری داشته باشید. 🍷

کنکور سراسری	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ - نوبت اول	۱۴۰۲ - نوبت دوم
تعداد سؤال	۵	۶	۶	۲	۲
مباحث مطرح شده در سؤال	قضیه تقسیم حد در بی نهایت رفع ابهام صفر صفر پیوستگی - مجانب ها	رفع ابهام صفر صفر حد نامتناهی مجانب ها + پیوستگی حد در بی نهایت	رفع ابهام صفر صفر قضیه تقسیم مجانب ها پیوستگی	حد در بی نهایت پیوستگی	حد در بی نهایت پیوستگی

قضیه تقسیم و بخش پذیری

بخش پذیری

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(ax+b)$

قضیه تقسیم

قضیه تقسیم

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای $p(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت به دست آمده را به صورت $q(x)$ و باقی مانده را نیز به صورت $r(x)$ فرض کنیم، رابطه زیر بین آن‌ها برقرار است:

$$\begin{array}{r} f(x) \\ \hline p(x) \\ \hline q(x) \\ \hline r(x) \end{array}$$

$f(x) = p(x)q(x) + r(x)$
 خارج قسمت مقسوم
 باقی مانده مقسوم علیه

دقت کنید که درجه باقی مانده یا برابر صفره و یا از درجه مقسوم علیه کمتره.

نکته اگر مقسوم علیه از درجه اول باشد، باقی مانده از درجه صفر (عدد ثابت) است و اگر مقسوم علیه از درجه دوم باشد، باقی مانده حداکثر از درجه اول $(ax+b)$ است.

$$f(x) = (ax+b)q(x) + R \quad \text{عدد ثابت} \quad \text{چندجمله‌ای درجه اول}$$

$$f(x) = (ax^2+bx+c)q(x) + (ax+b) \quad \text{چندجمله‌ای درجه دوم} \quad \text{حداکثر از درجه اول}$$

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(ax+b)$

زمانی که چندجمله‌ای $f(x)$ را بر عبارت درجه اول $(ax+b)$ تقسیم می کنیم، باقی مانده‌ای که حاصل می شود، عددی ثابت است و در این حالت رابطه تقسیم برابر است با:

$$f(x) = (ax+b)q(x) + R \Rightarrow \text{باقیمانده (عدد ثابت)}$$

حالا برای این که باقی مانده رو به دست بیاریم، اول میایم و $ax+b$ رو برابر صفر قرار میدیم و ریشه اون رو به دست میاریم (که میشه $x = -\frac{b}{a}$). بعدش ریشه‌ای که به دست آوردیم رو داخل چندجمله‌ای $f(x)$ قرار میدیم و عددی که به دست میاد رو به عنوان باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $ax+b$ معرفی می کنیم. به عبارت دیگه:

$$\begin{cases} ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a} \\ R=f(-\frac{b}{a}) \end{cases}$$

بخش پذیری

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ بخش پذیر باشد، در آن صورت باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ برابر صفر است.

مثال: چندجمله‌ای $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ بر $(x-3)$ بخش پذیر است، چرا که $f(3) = 0$ است:

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$f(3) = (3)^3 - (3)^2 - 5(3) - 3 = 27 - 9 - 15 - 3 = 0$$

نکته اگر چند جمله‌ای $f(x)$ بر چندجمله‌ای $p(x)$ بخش پذیر باشد، در آن صورت بر همه عامل‌های $p(x)$ نیز بخش پذیر است. به عنوان مثال اگر $f(x)$ بر $P(x)=(x-a)(x-b)$ بخش پذیر باشد، حتماً بر $(x-a)$ و $(x-b)$ نیز بخش پذیر بوده و $f(a) = f(b) = 0$ است.

نکته در بعضی از سؤال‌ها از ما درباره خارج قسمت می پرسن، در این موارد اول میایم و باقی مانده تقسیم رو به دست میاریم و بعدش از قضیه تقسیم استفاده می کنیم و مقدار خارج قسمت رو محاسبه می کنیم.

یادتون میاد که قضیه تقسیم چی بود؟ نه؟ ناسلامتی چند صفحه قبل بود!!!

$$f(x) = p(x)q(x) + r(x) \quad \text{قضیه تقسیم}$$



همسایگی



همسایگی چپ و راست

همسایگی محذوف

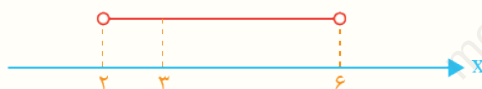
تعریف همسایگی

تعریف همسایگی

هر بازه باز شامل عدد حقیقی x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر $x_0 \in (a, b)$ باشد، آن گاه بازه (a, b) یک همسایگی x_0 می‌باشد.



به عنوان مثال بازه $(2, 6)$ یک همسایگی عدد ۳ است یعنی عدد ۳ عضوی از بازه $(2, 6)$ است که آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

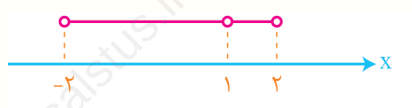


همسایگی محذوف

اگر بازه (a, b) یک همسایگی عدد حقیقی x_0 باشد، آنگاه مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر x_0 را از بازه (a, b) حذف کنیم، مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 است.



به عنوان مثال مجموعه $\{1\} - (-2, 2)$ یک همسایگی محذوف عدد ۱ است.



$$\begin{aligned} & (a, x_0) \cup (x_0, b) \\ & (a, b) - \{x_0\} \\ & 0 < |x - x_0| < K \end{aligned}$$

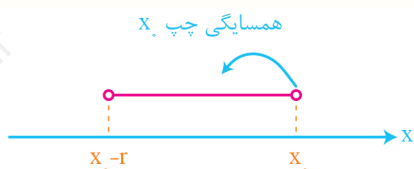
نحوه نمایش یک همسایگی محذوف

$$\begin{cases} a < x_0 < d \\ b = c = x_0 \end{cases}$$

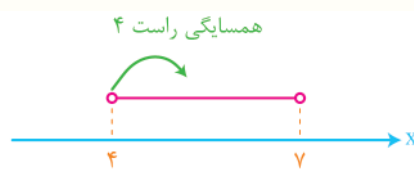
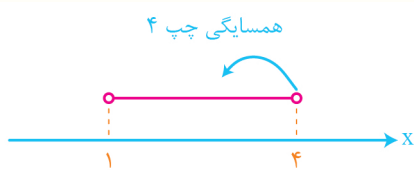
توجه با شرط $a < c$ اگر بازه $(a, b) \cup (c, d)$ یک همسایگی محذوف x_0 باشد آنگاه داریم:

همسایگی چپ و راست

اگر r عددی مثبت باشد، آنگاه بازه $(x_0 - r, x_0 + r)$ یک همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0 - r, x_0)$ یک همسایگی چپ x_0 نامیده می‌شود.



به عنوان مثال بازه $(4, 7)$ یک همسایگی راست عدد ۴ و بازه $(1, 4)$ یک همسایگی چپ عدد ۴ است.





مفهوم حد و صدهای یک طرفه



شرط وجود حد

مفهوم حد

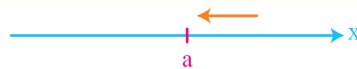
معرفی چند نماد

معرفی چند نماد

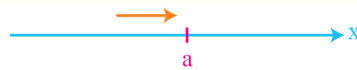


قبل از آشنایی با مفهوم حد می‌خواهیم چند نماد را به شما معرفی کنیم.

$x \rightarrow a^+$: یعنی x از سمت راست عدد a به آن نزدیک می‌شود، اما هیچ‌وقت خود a نمی‌شود.



$x \rightarrow a^-$: یعنی x از سمت چپ عدد a به آن نزدیک می‌شود، اما هیچ‌وقت خود a نمی‌شود.



$x \rightarrow a$: یعنی x هم از سمت راست و هم از سمت چپ عدد a به آن نزدیک می‌شود، اما هیچ‌وقت خود a نمی‌شود.



مثلاً وقتی به ما می‌گویند که $x \rightarrow (-3)^-$ ، به این معنی است که x دوست دارد که از سمت چپ عدد -3 به طرف -3 بره اما هیچ‌وقت بهش نرسه (مثل لیلی و مجنون) و وقتی که می‌گویند $x \rightarrow 2^+$ ، به این معنی است که x از سمت راست عدد 2 دارد به طرف 2 میره و باز هم بهش ...

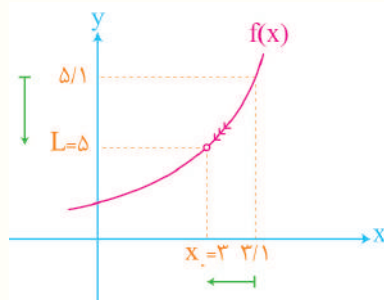


مفهوم حد



حد راست تابع $f(x)$ در نقطه x_0

اگر روی محور x و از سمت راست $x_0 = 3$ به اون نزدیک بشیم (مثلاً روی محور x از $3/1$ به سمت 3 حرکت کنیم) مقدار تابع $f(x)$ هم روی محور y از بالا به عدد $L = 5$ نزدیک میشه (مثلاً از $5/1$ به سمت 5 حرکت می‌کنه) که اون رو به این صورت نمایش میدیم:



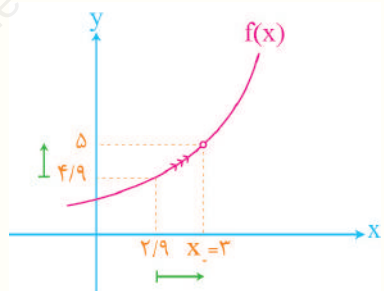
$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$$

به عبارت دیگر اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی راست نقطه $x = x_0$ تعریف شده باشد، و x از سمت راست و با مقادیر بیشتر از x_0 به آن نزدیک شود، آنگاه مقادیر تابع $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه x_0

با توجه به شکل روبه‌رو، اگر روی محور x و از سمت چپ عدد $x_0 = 3$ به اون نزدیک بشیم (مثلاً روی محور x از $2/9$ به سمت 3 حرکت کنیم) مقدار تابع $f(x)$ هم روی محور y از پایین به عدد $L = 5$ نزدیک میشه (مثلاً از $4/9$ به سمت 5 حرکت می‌کنه) که اون رو به این صورت نمایش میدیم:



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$$

به عبارت دیگر اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی چپ نقطه $x = x_0$ تعریف شده باشد و x از سمت چپ و با مقادیر کمتر از x_0 به آن نزدیک شود، آنگاه مقادیر تابع $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند و داریم:

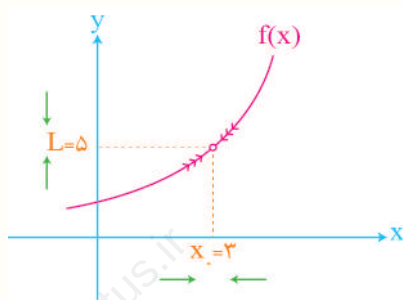
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$



شرط وجود حد



با توجه به شکل مقابل، اگر روی محور x و از هر دو طرف به عدد $x_0 = 3$ نزدیک شویم متوجه می شویم که مقدار تابع $f(x)$ روی محور y از بالا و پایین به عدد $L = 5$ نزدیک می شود که می توان نوشت:



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$

به عبارت دیگر اگر تابع $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه $x = x_0$ تعریف شده باشد و حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در $x = x_0$ موجود و با هم برابر باشند، آن گاه می توان گفت که تابع $f(x)$ در $x = x_0$ دارای حد است.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

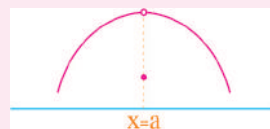
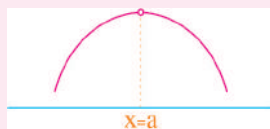
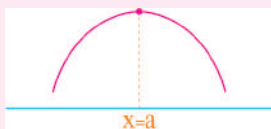
خلاصه سرتون رو درد نیاریم، اگر بخواهیم حد تابع f رو توی یه نقطه مثل $x = a$ بررسی کنیم، میایم و حد چپ و حد راست تابع f رو توی نقطه $x = a$ پیدا می کنیم، حالا اگه حد چپ و راست تابع توی اون نقطه وجود داشته باشن و با هم برابر باشن، میگی که «تابع f در نقطه $x = a$ حد دارد». اما! اگر یکی از مواردی که توی جدول پایینی هست اتفاق بیفته، اونوقت میگی که «تابع f در نقطه $x = a$ حد ندارد».

	تابع f در همسایگی نقطه $x = a$ تعریف نشده باشد.
	تابع f در $x = a$ حد راست نداشته باشد و یا اینکه حد راست تابع در $x = a$ نامتناهی باشد. ❶
	تابع f در $x = a$ حد چپ نداشته باشد و یا اینکه حد چپ تابع در $x = a$ نامتناهی باشد. ❶
	تابع f در $x = a$ هم حد چپ و هم حد راست داشته باشد اما این دو مقدار با هم برابر نباشند.
	حاصل حد تابع f از هر دو طرف در $x = a$ نامتناهی باشد

❶ در این موارد اصطلاحاً می گوییم که تابع f در $x = a$ همسایگی یک طرفه دارد.

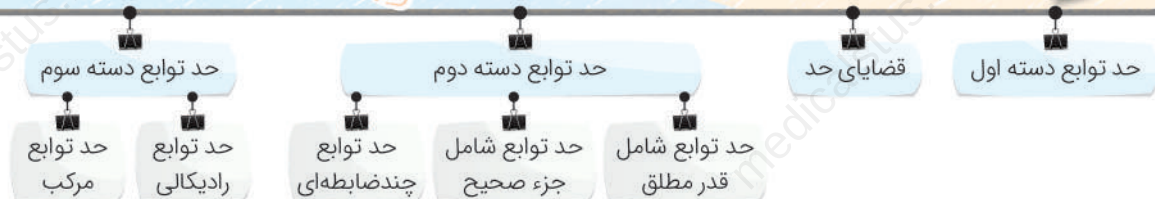


توجه: با کمی دقت در مثال فوق می‌توان فهمید که در بررسی حد تابع در نقطه $x=a$ ، مقدار تابع در آن نقطه، یعنی $f(a)$ هیچ ارتباطی با حد تابع در آن نقطه ندارد. به عبارت دیگر بودن یا نبودن مقدار تابع در نقطه مورد نظر، در بررسی حد تابع هیچ تأثیری ندارد. برای درک بهتر این موضوع به شکل‌های زیر توجه کنید:



هر سه شکل بالا در $x=a$ حد دارند، اما مقدار تابع در آن‌ها متفاوت است. پس در بررسی حد تابع در یک نقطه به مقدار آن تابع در آن نقطه توجهی نمی‌کنیم.

محاسبه حد توابع



حد توابع دسته اول

همونطور که گفتیم برای محاسبه حد این توابع، فقط کافیست که با توجه به دامنه تابع، مقدار تابع رو توی نقطه مورد نظر به دست بیاریم. خوب بریم که قراره توی این بخش، بیشتر وقتا به جای x عدد بذاریم و کلی حال کنیم ...

■ **حد تابع ثابت:** حد تابع ثابت $f(x) = c$ در $x = a$ برابر مقدار ثابت c است، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C \Rightarrow \text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 2} (-1) + \lim_{x \rightarrow 2} (3) = -1 + 3 = 2$$

■ **حد تابع همانی:** حد تابع همانی $g(x) = x$ در $x = a$ برابر a است، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a \Rightarrow \text{مثال: } \lim_{x \rightarrow -2} x = -2$$

■ **حد توابع مثلثاتی:** برای بررسی حد این توابع هم، نقطه مورد نظر رو توی تابع جایگذاری می‌کنیم. فقط باید دقت کنیم که نقطه مورد نظر، توی دامنه تابع قرار داشته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos f(x) = \cos f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan f(x) = \tan f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cot f(x) = \cot f(a)$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \sin x + \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \cos x = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + 1 = 0$

■ **حد توابع چندجمله‌ای:** هر چند جمله‌ای به فرم $f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ در $x = a$ حد دارد و مقدار حد با مقدار چندجمله‌ای در $x = a$ برابر است، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0 \Rightarrow \text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + x - 4) = 2(3)^2 + 3 - 4 = 18 + 3 - 4 = 17$$

■ **حد توابع نمایی:** حد توابع نمایی به فرم $b^{f(x)}$ در $x = a$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad (b > 0, b \neq 1) \Rightarrow \text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 1} 3^{x^2 - 2x + 3} = 3^{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3)} = 3^{(1-2+3)} = 3^2 = 9$$

■ **حد توابع لگاریتمی:** حد توابع لگاریتمی به فرم $\log_b f(x)$ در $x = a$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\log_b f(x)) = \log_b \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} b > 0 \\ b \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{array} \right.$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 3} (\log_2 2x - 2) = \log_2 (\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 2) = \log_2 (6 - 2) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2$



قضایای حد

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ حد داشته باشند به طوری که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ باشد، آن گاه:

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 1 = (2)^3 - 2(2)^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L_1 \cdot L_2$$

مثال: اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 3x + 1$ باشد، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x) \right)}_{=-1} \times \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 1} (3x + 1) \right)}_{=4} = (-1) \times (4) = -4$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, L_2 \neq 0$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{\tan x + \frac{1}{3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \tan x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{3}} = \frac{3}{2}$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = (L_1)^n$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 11)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 11) \right)^2 = (5)^2 = 25$

حد توابع دسته دوم: گفتیم که در این گروه از حدها برای محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق، جزء صحیح و نیز حد توابع چند ضابطه‌ای در یک نقطه، باید حد چپ و راست تابع مورد نظر را به صورت جداگانه به دست بیاوریم. حال در این قسمت می‌خواهیم این گروه از حدها را به صورت دقیق‌تر و روشنگرانانه‌تر تحلیل کنیم، اما به دلیل اهمیت این دسته، هر کدام را در درسنامه مجزایی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

حد توابع شامل قدرمطلق

در بررسی حد توابع شامل قدرمطلق در نقطه $x = a$ ، ابتدا باید تکلیف قدرمطلق را مشخص کرده و قدرمطلق را حذف کنیم. به عبارت دیگر در حدهای شامل قدرمطلق باید ابتدا عبارت درون قدرمطلق را **تعیین علامت** کرده و سپس به بررسی و محاسبه حد بپردازیم. به این صورت که:

اگر $x = a$ ریشه عبارت داخل قدرمطلق نباشد (یعنی $x = a$ عبارت داخل قدرمطلق را صفر نکند)، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

- علامت عبارت داخل قدرمطلق را به ازای $x = a$ تعیین می‌کنیم. به این صورت که اگر به ازای $x = a$ مقدار عبارت داخل قدرمطلق **مثبت** باشد، خودش از قدرمطلق بیرون می‌آید و اگر به ازای $x = a$ مقدار عبارت داخل قدرمطلق **منفی** باشد، قرینه‌اش از قدرمطلق خارج می‌شود.
- پس از تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، قدرمطلق را حذف کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

اگر $x = a$ ریشه عبارت داخل قدرمطلق باشد (یعنی $x = a$ عبارت داخل قدرمطلق را صفر کند)، باید حد چپ و حد راست تابع را به ازای $x = a$ جداگانه بررسی کرده و سپس درباره حد تابع در آن نقطه اظهار نظر کنیم.

حد توابع شامل جزء صحیح

برای بررسی حد توابع شامل جزء صحیح، باید ابتدا تکلیف جزء صحیح را مشخص کرده و به نوعی آن را از بازی حذف کنیم و سپس حاصل حد را



محاسبه کنیم، به عبارت دیگر در حدهای شامل جزء صحیح باید ابتدا آن را تعیین مقدار کرده و سپس به محاسبه حد بپردازیم.

برای این که این مبحث رو بهتر متوجه بشیم بذارید با یه مثال شروع کنیم؛ تابع

$y = [x]$ رو در نظر بگیرید:

ابتدا حد تابع $y = [x]$ را در یک نقطه صحیح (مثلاً $x = 3$) بررسی می کنیم:

$$x = 3 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = [3^+] \xrightarrow{\text{مثلاً } 3/1} [3/1] = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = [3^-] \xrightarrow{\text{مثلاً } 2/9} [2/9] = 2 \end{cases}$$

همانطور که مشاهده می کنید حد چپ و حد راست تابع در $x = 3$ با هم برابر نشد،

بنابراین این تابع در $x = 3$ حد ندارد. پس در حالت کلی می توان گفت که تابع

$y = [x]$ در نقاط صحیح حد ندارد.

حال، حد این تابع را در یک نقطه غیر صحیح (مثلاً $-1/5$) بررسی می کنیم:

$$x = -1/5 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1/5)^+} f(x) = [(-1/5)^+] \xrightarrow{\text{مثلاً } -1/4} [-1/4] = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1/5)^-} f(x) = [(-1/5)^-] \xrightarrow{\text{مثلاً } -1/6} [-1/6] = -2 \end{cases}$$

نتیجه ای که به دست آمد جالب است، این تابع در $x = -1/5$ ، حد چپ و حد راست برابری دارد. بنابراین می توان گفت که تابع $y = [x]$ در نقاط غیر صحیح دارای حد است.

بنابراین برای بررسی حد توابع شامل جزء صحیح در نقطه ای مانند $x = a$:

اگر عبارت داخل جزء صحیح به ازای $x = a$ برابر یک عدد غیر صحیح بشود، داریم:

۱ ابتدا مقدار جزء صحیح را به ازای $x = a$ به دست آورده و جزء صحیح را حذف می کنیم.

۲ سپس مقدار به دست آمده را به جای جزء صحیح جایگذاری کرده و حاصل حد را محاسبه می کنیم.

اگر عبارت داخل جزء صحیح به ازای $x = a$ برابر یک عدد صحیح بشود، باید حد چپ و حد راست تابع را به ازای $x = a$ جداگانه بررسی کنیم و سپس درباره حد تابع در نقطه مورد نظر تصمیم گیری کنیم.

حد توابع چند ضابطه ای

حد توابع چند ضابطه ای معمولاً در نقاط مرزی مورد بررسی قرار می گیرند. بنابراین برای محاسبه حد توابع چند ضابطه ای در نقطه مرزی $x = a$ ، باید حد چپ و حد راست تابع را به صورت جداگانه و با توجه به ضابطه آن به دست بیاوریم.

حالا اگر قرار باشه که حد تابعی رو توی نقطه مرزی $x=a$ محاسبه کنیم، نمونه های پایینی به ما کمک می کنه که بتونیم ضابطه مورد نظرمون رو بهتر تشخیص بدیم و ارزش حد بگیریم.

$y = \begin{cases} f(x) & x > a \\ h(x) & x = a \\ g(x) & x < a \end{cases}$	$y = \begin{cases} f(x) & x \geq a \\ g(x) & x < a \end{cases}$	$y = \begin{cases} f(x) & x = a \\ g(x) & x \neq a \end{cases}$	$y = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Z} \\ g(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
ضابطه $f(x)$	ضابطه $f(x)$	ضابطه $g(x)$	ضابطه $g(x)$
حد راست	حد راست	حد راست	حد راست
ضابطه $g(x)$	ضابطه $g(x)$	ضابطه $g(x)$	ضابطه $g(x)$
حد چپ	حد چپ	حد چپ	حد چپ

توجه: برای محاسبه حد توابع چند ضابطه ای در نقاط غیر مرزی، با توجه به طول نقطه مورد نظر، ضابطه ای که این نقطه به دامنه آن تعلق دارد را پیدا کرده و فقط حد آن ضابطه را محاسبه می کنیم.

مثال: اگر در تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ 1 - 2x & x < 1 \end{cases}$ بخواهیم حد تابع را در نقطه غیر مرزی $x = -2$ بررسی کنیم فقط از ضابطه پایینی استفاده می کنیم چرا که نقطه $x = -2$ در دامنه ضابطه پایینی حضور دارد لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (1 - 2x) = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5$$



حد توابع دسته سوم: همان طور که قبلاً نیز اشاره کردیم، این دسته از حدها که حد توابع رادیکالی و حد توابع مرکب را شامل می شوند، جزء هیچ کدام از دسته های قبلی قرار نداریم به این دلیل که این گروه از حدها نیاز به بررسی ویژه تری دارند.

بریم ببینیم که این ور داستان چه خبره ...

حد توابع رادیکالی

حد توابع رادیکالی را به دو قسمت تقسیم می کنیم:

- حد توابع رادیکالی با فرجه زوج
- حد توابع رادیکالی با فرجه فرد

■ حد توابع رادیکالی با فرجه زوج:

برای محاسبه حد توابع رادیکالی با فرجه زوج به فرم $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ در $x = a$ ، ابتدا حاصل عبارت زیر رادیکال را به ازای $x = a$ محاسبه می کنیم (یعنی همون $g(a)$)، که در این صورت با سه حالت مواجه خواهیم شد:

✓ اگر $g(a) > 0$ باشد در این صورت حد تابع $f(x)$ در $x = a$ برابر مقدار تابع در این نقطه است به عبارت دیگر برای محاسبه حد تابع f فقط کافی است که نقطه $x = a$ را در تابع f جای گذاری کنیم.

✓ اگر $g(a) = 0$ باشد در این صورت باید ابتدا حد چپ و حد راست تابع f را در $x = a$ به صورت جداگانه محاسبه کرده و سپس در مورد حد تابع f در $x = a$ اظهار نظر کنیم.

✓ اگر $g(a) < 0$ باشد در این صورت می گوئیم تابع f در $x = a$ ، **حد ندارد**.

■ حد توابع رادیکالی با فرجه فرد:

برای محاسبه حد توابع رادیکالی با فرجه فرد به فرم $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ در $x = a$ ، فقط کافی است که مقدار تابع f را به ازای $x = a$ به دست آوریم. برای محاسبه حد توابع رادیکالی با فرجه زوج در $x = a$ ، به راه دیگه هم وجود داره و اونم اینه که اول میایم و دامنه تابع f رو به دست میاریم و بعدش با توجه به دامنه تابع، داریم:

✓ اگر $x = a$ ، کلاً در دامنه تابع قرار نداشته باشه اونوقت میگیم که تابع در $x = a$ ، **حد ندارد**.

✓ اگر $x = a$ ، مرز دامنه تابع باشه بازم میگیم که تابع در $x = a$ ، **حد ندارد**.

✓ اگر $x = a$ ، درون دامنه تابع قرار داشته باشه (نب مرز نباشه)، حد تابع با مقدار تابع در $x = a$ برابره یعنی برای محاسبه حد تابع در $x = a$ ، فقط کافیست که این نقطه رو درون تابع جای گذاری کرده و مقدار تابع رو به ازای اون به دست بیاریم.

نکته: اگر تابع f فقط در یک طرف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد آن گاه تابع f در $x=a$ ، **حد ندارد** به عبارت دیگر اگر تابع f در سمت چپ نقطه $x=a$ تعریف نشده باشد، در این صورت تابع f در $x=a$ حد ندارد و به طور مشابه می توان گفت که اگر تابع f در سمت راست نقطه $x=a$ تعریف نشده باشد می گوئیم که تابع f در $x=a$ حد ندارد.

حد توابع مرکب

برای محاسبه حد تابع مرکب $f(g(x))$ در $x = a$ (یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$)، مراحل زیر را به ترتیب طی می کنیم:

۱ ابتدا حد تابع درونی را در $x = a$ به دست می آوریم و فرض می کنیم که مقدار این حد برابر b باشد به این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

۲ سپس حد تابع بیرونی را در $x = b$ محاسبه کرده و مقدار به دست آمده را به عنوان حاصل حد تابع $f(g(x))$ در $x = a$ معرفی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \xrightarrow{\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b} \lim_{x \rightarrow b} f(x)$$

توجه کنید که بعضی از مواقع قبل از ورود به مرحله دوم، باید مشخص کنیم که تابع g با مقادیر بیشتر از b به b نزدیک می شود و یا با مقادیر کمتر از آن، که با معلوم شدن آن می توان نحوه میل کردن x به سمت b در مرحله دوم را تشخیص داد. به عبارت دیگر بعضی از مواقع در همان مرحله اول باید مشخص کنیم که در مرحله دوم $x \rightarrow b^+$ یا $x \rightarrow b^-$ را قرار بدهیم.

نکته: در برخی از سؤالات اگر رسم نمودار تابع مورد نظر را بلد باشیم می توانیم از روش رسم نمودار برای محاسبه حد خواسته شده استفاده کنیم.



محاسبه حد توابع کسری (حالت مبهم)

خُب! تا به اینجای کار با حدهایی سروکار داشتیم که نقطه مورد نظر روی تابع جایگذاری می کردیم و به جواب می رسیدیم ولی توی این بخش به حد توابع کسری برخورد می کنیم که توی اونا، حد صورت و مخرج کسر به سمت صفر میل می کنن (صفر حدی) و اصطلاحاً به حالت مبهم صفر صفر می رسیم که باید با لطیف الحیل اون ابهام رو رفع کنیم. آماده ای بریم تو دل داستان؟ بزن بریم...

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ به سمت صفر میل کنند (یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$)، به حالت مبهم می رسیم و برای اینکه بتوانیم حاصل این حد را به دست بیاوریم باید ابهام آن را رفع کنیم. حالا این ابهام رو چطوری میشه از بین برد؟ بیا تا بحث بکنیم...

- حذف عامل ابهام به کمک اتحادها، فاکتورگیری، تجزیه و قاعده تقسیم
- حذف عامل ابهام به کمک گویا کردن کسرهایی شامل عبارت رادیکالی
- دستور هوپیتال
- استراتژی هم ارزی در صفر

■ استراتژی های رفع ابهام

حذف عامل ابهام به کمک اتحادها، فاکتورگیری، تجزیه و قاعده تقسیم

در یک تابع کسری به فرم $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله ای بوده و $f(a) = g(a) = 0$ باشد می توان نتیجه گرفت که چندجمله ای های $f(x)$ و $g(x)$ ، هر دو بر عامل $(x - a)$ بخش پذیرند بنابراین می توانیم به کمک عواملی نظیر اتحادها (جبری و مثلثاتی)، فاکتورگیری، تجزیه و استفاده از قاعده تقسیم چندجمله ای ها، عامل ابهام را در صورت و مخرج کسر ظاهر کرده و آن ها را با هم ساده کنیم و در نهایت حد تابع به دست آمده را به ازای $x = a$ محاسبه کنیم. فعلیج بیاین چند تا از اتحادهای مهم و پرکاربرد رو با هم مرور کنیم...

اتحادهای جبری

- | | |
|---|---|
| • $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ | • $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ |
| • $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ | • $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |
| • $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | • $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |

اتحادهای مثلثاتی

- | | |
|---|---|
| • $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ | • $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ |
| • $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ | • $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ |
| • $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ | • $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$ |
| • $1 - \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2$ | • $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ |
| • $1 + \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$ | • $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ |
| • $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | • $\tan x - \cot x = -2 \cot 2x$ |
| • $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ | • $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ |



حذف عامل ابهام به کمک گویا کردن کسرهایی شامل عبارات رادیکالی

برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ از حد توابع کسری به فرم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر تابع $f(x)$ و یا $g(x)$ (و یا گاهی وقتا هر دو)، شامل عبارت رادیکالی باشند، در این صورت با توجه به فرجه رادیکال و با استفاده از اتحادهای مزدوج و یا چاق و لاغر، صورت و مخرج کسر را در عبارتی مناسب ضرب می‌کنیم، سپس به کمک همین اتحادها، عامل صفرکننده را در صورت و مخرج کسر ظاهر کرده و آن‌ها را با هم ساده می‌کنیم و در نهایت حاصل حد را در $x = a$ به دست می‌آوریم.

$$\bullet (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \quad \bullet (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a \pm b$$

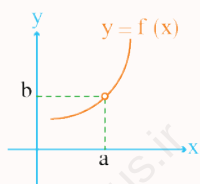


در حد توابع کسری به فرم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد صورت کسر به ازای $x = a$ برابر صفر بوده ولی حاصل حد برابر عدد حقیقی $b \neq 0$ باشد، آن‌گاه حد مخرج کسر نیز باید به ازای $x = a$ برابر صفر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

در حد توابع کسری به فرم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حد مخرج کسر به ازای $x = a$ برابر صفر بوده ولی حاصل حد برابر عدد حقیقی b باشد، آن‌گاه حد صورت کسر نیز باید به ازای $x = a$ برابر صفر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$



مطابق شکل مقابل، اگر نمودار تابع کسری $f(x)$ در نقطه $x = a$ دارای حفره باشد، می‌توان نتیجه گرفت که: $x = a$ ریشه مشترک صورت و مخرج کسر است.

حد تابع f در نقطه $x = a$ برابر b است به عبارت دیگر: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

در حد توابع کسری، اگر تابع موردنظر شامل جزء صحیح و یا قدرمطلق باشد، قبل از هر چیز باید تکلیف آن‌ها را مشخص کنیم به این صورت که جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و سپس به محاسبه حد موردنظر می‌پردازیم.

رفع ابهام به کمک دستور هوییتال (HOP)

اگر بعد از جایگذاری نقطه $x = a$ در $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برسیم می‌توانیم از دستور هوییتال برای رفع ابهام استفاده کنیم به این صورت که اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند به جای محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم مقدار حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ را به دست بیاوریم یعنی از صورت و مخرج کسر داده شده به صورت جداگانه مشتق گرفته و عبارت جدیدی بسازیم و سپس از عبارت جدید در $x = a$ حد می‌گیریم به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\overbrace{f'(x)}^{\text{مشتق } f}}{\underbrace{g'(x)}_{\text{مشتق } g}}$$

حالا که می‌خواهیم خیلی از سؤال‌های ابهام $\frac{0}{0}$ رو سه سوته حل کنی به نگاه به جدول پایین بنداز و فرمول‌های مشتق‌گیری رو یاد بگیر و بعدش بیا پیشم!

■ قواعد مشتق‌گیری ۱:

مثال	مشتق	تابع
$y = -2 \rightarrow y' = 0$	$y' = 0$	عدد ثابت y
$y = 2x \rightarrow y' = 2$	$y' = a$	$y = ax$
$y = 2x^3 \rightarrow y' = 6x^2$	$y' = nx^{n-1}$	$y = x^n$
$y = (3x^2 - 2x)^3 \rightarrow y' = 3(6x - 2)(3x^2 - 2x)^2$	$y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$	$y = (f(x))^n$



$y = \sqrt{ax+b}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$y = \sqrt{-4x+1} \rightarrow y' = \frac{-4}{2\sqrt{-4x+1}}$
$y = \sqrt[n]{x^m}$	$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y = \sqrt[4]{x^3} \rightarrow y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
$y = \sqrt[n]{(f(x))^m}$	$y' = \frac{mf'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$	$y = \sqrt[3]{(3x+2)^2} \rightarrow y' = \frac{2(3)}{3\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$

■ قواعد مشتق گیری ۲:

عملیات	تابع	مشتق	مثال
ضرب در عدد	$y = kf(x)$	$y' = kf'(x)$	$y = 3(2x^2) \rightarrow y' = 3(4x) = 12x$
جمع و تفریق	$y = f(x) \pm g(x)$	$y' = f'(x) \pm g'(x)$	$y = \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}(2x)$
ضرب	$y = f(x) \times g(x)$	$y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$	$y = \sqrt{x}(x^2-1) \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1) + (2x)\sqrt{x}$
تقسیم	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$	$y = \frac{2x^2-1}{3x^2-x} \rightarrow y' = \frac{(4x)(3x^2-x) - (6x-1)(2x^2-1)}{(3x^2-x)^2}$
ترکیب	$y = f(g(x))$	$y' = g'(x)f'(g(x))$	$y = f(x^2) \rightarrow y' = (2x)f'(x^2)$

■ چند مشتق مهم:

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \sqrt[3]{x^2}$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y = \sqrt{x}$	تابع
$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	مشتق

نکته: در محاسبه حد عبارت‌های کسری شامل رادیکال در $x=a$ ، اگر عبارت زیر رادیکال به ازای $x=a$ برابر صفر شود، برای محاسبه آن حد نمی‌توانیم از دستور هوییتال استفاده کنیم. برای به دست آوردن حاصل این نوع از حدها باید ابتدا به کمک روش‌هایی مثل گویا کردن و ... آن رادیکال را از بین ببریم و سپس حاصل حد را به دست بیاوریم.

توجه: اگر بعد از استفاده از دستور هوییتال مجدداً به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رسیدیم، می‌توانیم مجدداً از دستور هوییتال استفاده کنیم.

رفع ابهام به کمک استراتژی هم‌ارزی در صفر

مفهوم هم‌ارزی: دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در نقطه $x=a$ هم‌ارز گوییم هرگاه این دو تابع در هم‌سایگی محذوف $x=a$ رفتار مشابهی داشته باشند به عبارت دیگر:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \rightarrow f(x) \sim g(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{array} \right.$$

~: علامت هم‌ارز بودن

الف) هم‌ارزی کم‌توان

■ **هم‌ارزی‌های مهم در صفر:** ب) هم‌ارزی مثلثاتی

ج) هم‌ارزی برنولی

در ادامه هر کدام از این هم‌ارزی‌ها را معرفی می‌کنیم اما نکته مهم این است که زمانی می‌توانیم از این روش استفاده کنیم که **اولاً** به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برسیم و **ثانیاً** متغیر موجود در سؤال به سمت صفر میل کند.



الف) هم‌ارزی کم‌توان: به کمک این روش در چند جمله‌ای‌ها و عبارت‌های رادیکالی فاقد عدد ثابت، می‌توانیم از جملات پر توان صرف نظر کنیم به عبارت دیگر می‌توانیم جملات با کم‌ترین توان را نگه داریم و مابقی جملات را حذف کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} ax + bx^2 + cx^3 + \dots \sim \lim_{x \rightarrow 0} ax$$

ب) هم‌ارزی مثلثاتی: در توابع مثلثاتی اگر کمان آن‌ها به سمت صفر میل کند می‌توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

نوع تابع	هم‌ارزی	مثال
سینوسی	$u \rightarrow 0$ $\sin u \sim u$ $\sin^n u \sim u^n$	$\sin 3x \sim 3x$ $\sin^2(2x) \sim (2x)^2 = 4x^2$
کسینوسی	$u \rightarrow 0$ $\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}$ $\cos^n u \sim 1 - \frac{nu^2}{2}$	$\cos 2x \sim 1 - \frac{(2x)^2}{2} = 1 - \frac{4x^2}{2} = 1 - 2x^2$ $\cos^3 2x \sim 1 - \frac{3(2x)^2}{2} = 1 - \frac{12x^2}{2} = 1 - 6x^2$
تانژانت	$u \rightarrow 0$ $\tan u \sim u$ $\tan^n u \sim u^n$	$\tan 3x \sim 3x$ $\sqrt{\tan x} = (\tan x)^{\frac{1}{2}} \sim x^{\frac{1}{2}}$

ج) هم‌ارزی برنولی: در محاسبه حد توابع شامل عبارت $(1 \pm u)^n$ ، اگر u به سمت صفر میل کند، می‌توانیم به جای عبارت $(1 \pm u)^n$ از عبارت هم‌ارز آن یعنی $(1 \pm nu)$ استفاده کنیم.

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 \pm u)^n \sim \lim_{u \rightarrow 0} (1 \pm nu)$$

توجه: اگر پس از استفاده از هم‌ارزی، کل عبارت موجود در صورت و مخرج با هم ساده شوند حاصل آن حد قابل اطمینان نیست و توصیه می‌شود که در این حالت از سایر روش‌ها برای محاسبه آن حد استفاده کرد.

نکته: در حد توابع کسری به فرم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، پس از جایگذاری $x = a$:

- ✓ اگر صورت کسر برابر صفر مطلق باشد، حاصل آن حد برابر صفر است.
- ✓ اگر مخرج کسر برابر صفر مطلق باشد، حاصل آن حد تعریف نمی‌شود و اصطلاحاً می‌گوییم که حاصل حد وجود ندارد.
- ✓ اگر هم صورت و هم مخرج کسر برابر صفر مطلق باشد حاصل آن حد وجود ندارد.

حد بی‌نهایت

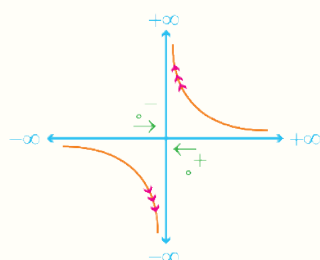
4

محاسبه حدهای نامتناهی

مفهوم حدهای نامتناهی
(حد بی‌نهایت)

مفهوم حدهای نامتناهی (حد بی‌نهایت)

در این گونه از حدها، اگر x به سمت یک عددی مانند a میل کند، حاصل حد برابر بی‌نهایت (∞) می‌شود. به عنوان مثال، تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید: با توجه به نمودار این تابع، مشخص است وقتی که x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر (یعنی 0^+) به صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع همواره افزایش می‌یابد. به عبارتی دیگر، اگر x را به اندازه کافی و با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کنیم مقادیر تابع از هر



عدد دلخواه مثبتی بزرگ‌تر خواهد شد که در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

به همین ترتیب، با توجه به نمودار بالا، وقتی x را با مقادیر کمتر از صفر (یعنی 0^-) به صفر نزدیک کنیم،

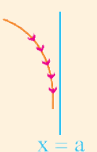
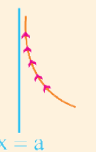
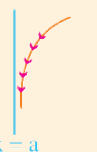
مقادیر تابع بدون هیچ محدودیتی کاهش می‌یابد که در این حالت می‌نویسیم: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



حالا بیاین حالت های حد بی نهایت رو با هم بررسی کنیم...

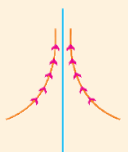
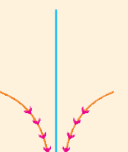
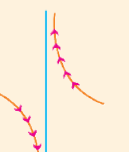
حالت اول) حدهای یک طرفه نامتناهی:

اگر تابع f در یک همسایگی یک طرفه (یا فقط از راست و یا فقط از چپ) $x = a$ تعریف شده باشد، داریم:

			
$x \rightarrow a^-$	$x \rightarrow a^-$	$x \rightarrow a^+$	$x \rightarrow a^+$
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

حالت دوم) حدهای دو طرفه نامتناهی:

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف $x = a$ تعریف شده باشد، داریم:

			
$x \rightarrow a$	$x \rightarrow a$	$x \rightarrow a$	$x \rightarrow a$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ باشد، اونوقت می تونیم بگیم که: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (برعکسش هم درسته)

اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ باشد، اونوقت می تونیم بگیم که: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ (برعکسش هم درسته)

اگر حاصل حد تابعی در یه نقطه بی نهایت بشه، به این معنیه که اون تابع توی اون نقطه **حد نداره!** چرا که اگه یادتون باشه توی تعریف حد گفتیم که اگه حاصل حد تابعی توی یه نقطه **موجود و متناهی** باشه، می تونیم بگیم که اون تابع تو اون نقطه **حد داره**.

محاسبه حدهای نامتناهی

هدف ما در این درسنامه، محاسبه حد نامتناهی در توابع کسری است. حال برای محاسبه حد $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، دو حالت را بررسی می کنیم:

حالت اول: اگر حاصل حد صورت کسر در $x = a$ برابر عددی غیر صفر و حاصل حد مخرج کسر در $x = a$ برابر صفر باشد، در این صورت حاصل حد برابر $+\infty$ و یا $-\infty$ خواهد شد که برای مشخص کردن علامت ∞ ، باید علامت عدد صورت کسر و علامت صفر مخرج را تعیین کنیم که حالت های مختلف آن را در جدول زیر بررسی کرده ایم:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	مثال
عدد +	$\circ^+$	$\frac{\text{عدد}^+}{\circ^+} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{1}{\circ^+} = +\infty$
عدد +	$\circ^-$	$\frac{\text{عدد}^+}{\circ^-} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{5}{\circ^-} = -\infty$
عدد -	$\circ^+$	$\frac{\text{عدد}^-}{\circ^+} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-1} = \frac{-1}{\circ^+} = -\infty$
عدد -	$\circ^-$	$\frac{\text{عدد}^-}{\circ^-} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{-1}{\circ^-} = +\infty$



فصل پنجم: حد و پیوستگی

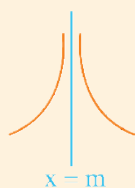
جمع بندی ریاضیات کنکور

توجه کنید در تمامی موارد بالا، مقدار حد مخرج کسر برابر **صفر حدی** است به عبارت دیگر، حاصل حد مخرج کسر، عددی بسیار نزدیک به صفر است و دقیقاً خود صفر نیست و از طرفی از درسنامه‌های قبل به یاد داریم که اگر در یک حدی حاصل حد مخرج کسر برابر صفر مطلق (یعنی خودِ خودِ صفر) باشد، در این صورت، می‌گوییم که آن حد جواب ندارد و اصطلاحاً تعریف نشده است.

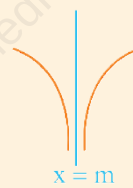
حالت دوم: اگر حال حد صورت کسر در $x = a$ برابر یک عدد و حاصل حد مخرج کسر در $x = a$ برابر بی‌نهایت (حالا یا $+\infty$ و یا $-\infty$) باشد، در این صورت، حاصل حد برابر صفر است، به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{\pm\infty} = 0$$

نکته: اگر حاصل حد یک تابع کسری در $x = m$ از هر دو طرف برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، در این صورت، $x = m$ ریشه مرتبه زوج مخرج کسر است.



$$\lim_{x \rightarrow m} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow m} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

حالت خاص: در این حالت، اگر عبارت موجود در مخرج کسر، یک عبارت درجه دوم به فرم $ax^2 + bx + c$ باشد، در این صورت:

فرم کلی عبارت درجه دوم موجود در مخرج کسر به صورت $ax^2 + bx + c = a(x - m)^2$ است.

دلتای عبارت مخرج کسر برابر صفر است.

$x = m$ ، ریشه مضاعف مخرج کسر است، پس:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها: } -\frac{b}{a} = 2m \\ \text{حاصلضرب ریشه‌ها: } \frac{c}{a} = m^2 \end{cases}$$



حد در بی نهایت

حد توابع نمایی و لگاریتمی در بی نهایت

محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح در بی نهایت

حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

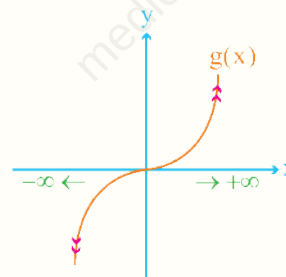
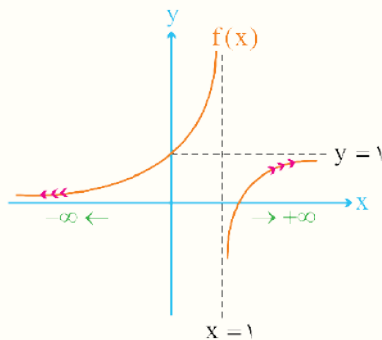
هم ارزی پر توان

قضیه های حد در بی نهایت

مفهوم حد در بی نهایت

مفهوم حد در بی نهایت

تا به اینجای کار با حدهایی سروکار داشتیم که در آن ها متغیر x به سمت عدد حقیقی a میل می کرد که در این حالت، حاصل حد برابر عدد حقیقی L و یا $\pm\infty$ می شد. اما در این بخش، می خواهیم حدهایی را به شما معرفی کنیم که در آن ها متغیر x به سمت بی نهایت (حالا یا $+\infty$ و یا $-\infty$) میل می کند که در این حالت نیز حاصل حد می تواند برابر عدد حقیقی L و یا $\pm\infty$ باشد. به عنوان مثال، نمودار توابع f و g را در نظر بگیرید:



با توجه به نمودارهای فوق می توان گفت که:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

هر چقدر به سمت x های بزرگتر حرکت کنیم ($x \rightarrow +\infty$)، مقادیر تابع f به خط $y=1$ نزدیک تر می شوند، پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

هر چقدر به سمت x های کوچکتر حرکت کنیم ($x \rightarrow -\infty$)، مقادیر تابع f به خط $y=0$ نزدیک تر می شوند، پس:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

هر چقدر به سمت x های بزرگتر حرکت کنیم ($x \rightarrow +\infty$)، مقادیر تابع g نیز به سمت $+\infty$ میل می کنند، پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

هر چقدر به سمت x های کوچکتر حرکت کنیم ($x \rightarrow -\infty$)، مقادیر تابع g نیز به سمت $-\infty$ میل می کنند، پس:

خلاصه کلام...

حالت اول: اگر تابعی مانند f در بازه ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد:

تعریف	نماد	مثال	نمودار
با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، مقادیر تابع f به سمت عدد حقیقی L میل می کنند.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$	$f(x) = \frac{1}{x}$	
با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، مقادیر تابع f نیز به سمت $+\infty$ میل می کنند.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$f(x) = x^2$	



	$f(x) = - x $	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، مقادیر تابع f به سمت $-\infty$ میل می کنند.
--	---------------	---	--

حالت دوم: اگر تابعی مانند f در بازه‌ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد:

نمودار	مثال	نماد	تعریف
	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$	با میل کردن x به سمت $-\infty$ ، مقادیر تابع f به سمت عدد حقیقی L میل می کنند.
	$f(x) = -x^3$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	با میل کردن x به سمت $-\infty$ ، مقادیر تابع f به سمت $+\infty$ میل می کنند.
	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	با میل کردن x به سمت $-\infty$ ، مقادیر تابع f نیز به سمت $-\infty$ میل می کنند.

بنابراین، اگر $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ میل کند، حاصل حد می تواند برابر عدد حقیقی L و یا برابر بی نهایت ($+\infty$ یا $-\infty$) باشد.

قضیه‌های حد در بی نهایت



۱ اگر n عددی طبیعی باشد ($n \in \mathbb{N}$)، در این صورت:

n زوج باشد	n فرد باشد
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

۲ اگر a عددی حقیقی ($a \in \mathbb{R}$) و n عددی طبیعی ($n \in \mathbb{N}$) باشد، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0$$



۳ اگر $(L_1, L_2, L) \in \mathbb{R}$ باشد، داریم:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x))$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
$\frac{L_1}{L_2}; L_2 \neq 0$	$L_1 L_2$	$L_1 - L_2$	$L_1 + L_2$	L_2	L_1
$\begin{cases} \frac{L}{+\infty} = 0^+; L > 0 \\ \frac{L}{+\infty} = 0^-; L < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} +\infty; L > 0 \\ -\infty; L < 0 \end{cases}$	$L - \infty = -\infty$	$L + \infty = +\infty$	$+\infty$	L
$\begin{cases} \frac{L}{-\infty} = 0^-; L > 0 \\ \frac{L}{-\infty} = 0^+; L < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty; L > 0 \\ +\infty; L < 0 \end{cases}$	$L - (-\infty) = +\infty$	$L + (-\infty) = -\infty$	$-\infty$	L

توجه کنید که این قضایا برای حالتی که $x \rightarrow -\infty$ نیز برقرار است.

هم‌ارزی پرتوان

برای محاسبه حد یک عبارت به فرم $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots; (n \in \mathbb{R}, n \geq 0)$ در $+\infty$ یا $-\infty$ می‌توانیم به جای آن، جمله با بزرگ‌ترین توان از آن را نگه داشته و بقیه جملات را حذف کنیم، به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots) \sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

برای محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق در بی‌نهایت، ابتدا عبارت داخل قدرمطلق را زمانی که $x \rightarrow \pm\infty$ میل می‌کند تعیین علامت می‌کنیم و سپس با حذف قدرمطلق، حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

در حدهای به فرم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، اگر حاصل حد صورت و مخرج کسر برابر بی‌نهایت باشد، به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ برخورد می‌کنیم که باید از آن رفع ابهام کنیم. یکی از روش‌هایی که برای رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ کاربرد دارد، استفاده از هم‌ارزی پرتوان در صورت و مخرج کسر است که در این حالت با توجه به درجه عبارت صورت و مخرج کسر، با سه حالت مواجه می‌شویم. به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots} \sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{a'x^m}$$

نمونه	جواب حد	شرط
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = +\infty$	$(+\infty)$ یا $(-\infty)$	$n > m$ اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر، بیشتر باشد.
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3x^2}{2x^2 - 1} \sim \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$	$\frac{a}{a'}$	$n = m$ اگر درجه صورت کسر با درجه مخرج کسر، برابر باشد.
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 3x} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^3} = 0$	صفر	$n < m$ اگر درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر، کمتر باشد.



محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح در بی نهایت:

برای محاسبه حدهای به فرم $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)]$ ، ابتدا حد عبارت درون براکت را به دست می آوریم و سپس با توجه به مقدار به دست آمده با حالت های زیر مواجه می شویم:

حالت اول: اگر حاصل حد عبارت داخل براکت در بی نهایت، برابر عدد غیر صحیح a باشد در این صورت حاصل حد برابر $[a]$ است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \notin \mathbb{Z} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] = [a]$$

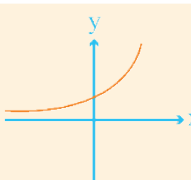
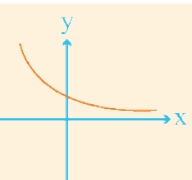
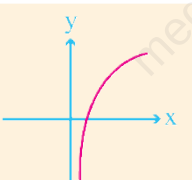
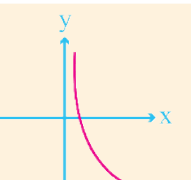
حالت دوم: اگر حاصل حد عبارت داخل براکت در بی نهایت، برابر عدد صحیح b باشد در این صورت ابتدا با روش هایی مانند عدد گذاری، تفکیک کسر، رسم نمودار و ... تعیین می کنیم که عبارت داخل براکت با مقادیر بیشتر از b به آن نزدیک می شود یا کمتر از آن و پس از مشخص شدن این موضوع، جزء صحیح آن عدد را به عنوان جواب مسئله اعلام می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{cases} b^+ : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] = [b^+] = b \\ b^- : \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] = [b^-] = b - 1 \end{cases}$$

حالت سوم: اگر حاصل حد عبارت داخل براکت در بی نهایت برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد در این صورت می توانیم جزء صحیح را برداشته و از تابع موجود در بی نهایت حد بگیریم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] \sim \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$$

حد توابع نمایی و لگاریتمی در بی نهایت

$f(x) = a^x$		$f(x) = \log_a x$	
$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
			
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{وجود ندارد}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{وجود ندارد}$

هم ارزی توانی:

در عبارت هایی به فرم $y = a^x + b^x$ ، زمانی که $x \rightarrow +\infty$ میل می کند، جمله با بزرگ ترین پایه را انتخاب کرده و مابقی جملات را حذف می کنیم و به طریق مشابه، زمانی که $x \rightarrow -\infty$ میل می کند، جمله با کوچک ترین پایه را انتخاب کرده و از بقیه جملات صرف نظر می کنیم. به عبارت دیگر با فرض $a > b$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \text{if } x \rightarrow +\infty : a^x + b^x &\sim a^x \\ \text{if } x \rightarrow -\infty : a^x + b^x &\sim b^x \end{aligned}$$

مثال: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{-2x} - 3^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3^x \right) \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3^x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = -(3^{+\infty}) = -\infty$



پیوستگی

نقاط ناپیوستگی

پیوستگی توابع در $\mathbb{R}$

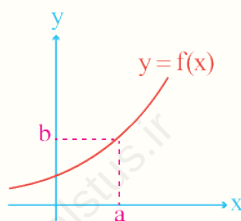
بررسی پیوستگی تابع جزء صحیح

پیوستگی روی بازه

پیوستگی یک طرفه

پیوستگی در نقطه

پیوستگی در نقطه



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad (a \in \mathbb{R})$$

تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته است، هرگاه دو شرط زیر را داشته باشد:

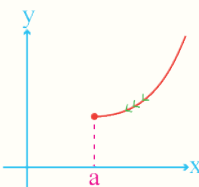
۱) تابع f در نقطه $x = a$ حد داشته باشد:

۲) مقدار تابع f در نقطه $x = a$ موجود و برابر حد تابع باشد:

به بیان دیگر برای این که تابع f در نقطه $x = a$ پیوسته باشد باید:

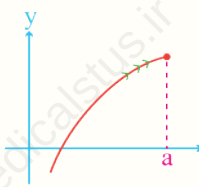
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{به زبان فارسی: } (x=a \text{ در } x=a) = (x=a \text{ در } x=a) = (x=a \text{ در } x=a) \\ \text{به زبان ریاضی: } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \end{array} \right.$$

پیوستگی یک طرفه



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

تابع f در $x = a$ از راست پیوسته است، هرگاه حد راست تابع در آن نقطه برابر باشد.

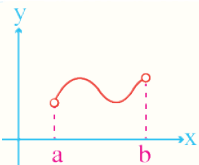


$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

تابع f در $x = a$ از چپ پیوسته است، هرگاه حد چپ تابع در آن نقطه برابر باشد.

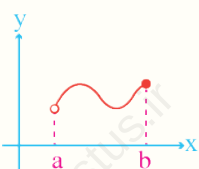
بنابراین اگر تابع f در همسایگی $x = a$ هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد، در این صورت تابع f در $x = a$ پیوسته است.

پیوستگی روی بازه



برای بررسی پیوستگی یک تابع در یک بازه حالت های زیر را داریم:

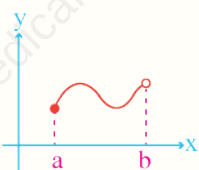
۱) تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است، هرگاه این تابع در همه زیرمجموعه های این بازه پیوسته باشد.



۲) تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه:

✓ تابع f در همه نقاط بازه باز (a, b) پیوسته باشد.

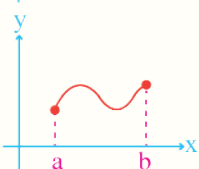
✓ این تابع در نقطه $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد، یعنی: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$



۳) تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه:

✓ تابع f در همه نقاط بازه باز (a, b) پیوسته باشد.

✓ این تابع در نقطه $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد، یعنی: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$



۴) تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است، هرگاه:

✓ تابع f در همه نقاط بازه باز (a, b) پیوسته باشد.

✓ این تابع در نقطه $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد، یعنی: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ و همچنین در نقطه $x = b$

پیوستگی چپ داشته باشد، یعنی: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$



نکته اگر تابع f در بازه (a, b) پیوسته باشد، آن گاه در هر بازه‌ای که زیرمجموعه‌ای از بازه (a, b) باشد، نیز پیوسته است. به عنوان مثال اگر تابعی در بازه $(-1, 3)$ پیوسته باشد آن گاه می‌توان گفت که این تابع در هر زیرمجموعه‌ای از بازه $(-1, 3)$ نیز پیوسته است (خُب معلومه دیگه! به قول شاعر که میله: چون که ۱۰۰ آید نود هم پیش ماست)

بررسی پیوستگی تابع جزء صحیح

در تابع با ضابطه $y = [f(x)]$:

۱ اگر به ازای $x = a$ عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد غیر صحیح باشد $(f(a) \notin \mathbb{Z})$ ، در آن صورت تابع $y = [f(x)]$ در نقطه $x = a$ پیوسته است.

۲ به عنوان مثال تابع $y = [2x]$ در نقطه $x = \frac{1}{3}$ پیوسته است، چرا که عبارت داخل جزء صحیح به ازای $x = \frac{1}{3}$ برابر $\frac{2}{3}$ می‌شود، که عددی غیر صحیح است.

۲ اگر به ازای $x = a$ عبارت داخل جزء صحیح برابر یک عدد صحیح باشد $(f(a) \in \mathbb{Z})$ ، در آن صورت داریم:

۱ اگر $x = a$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع $f(x)$ باشد، تابع $y = [f(x)]$ در این نقطه پیوسته است.

۲ در غیر این صورت تابع $y = [f(x)]$ در این نقطه ناپیوسته است.

توجه اگر مقدار تابع f در نقطه $x = a$ ، از مقدار نقاط تعریف شده اطرافش کمتر و یا مساوی باشد، نقطه $x = a$ را مینیمم نسبی تابع f می‌گوییم. البته نگران نباش مفهوم مینیمم نسبی رو توی فصل کاربرد مشتق یاد می‌گیریم ...

تأثیر عامل صفرشونده:

فرض کنید تابع $y = [f(x)]$ در $x = a$ ناپیوسته است، حال اگر عبارتی مانند $g(x)$ که در $x = a$ برابر صفر است $(g(a) = 0)$ در آن ضرب شود، کل عبارت در $x = a$ پیوسته خواهد شد.

در $x = a$ پیوسته $\xrightarrow{\text{با شرط } g(a)=0} y = g(x)[f(x)]$

به عنوان مثال تابع $y = [x]$ در $x = 1$ ناپیوسته است، حال اگر عبارت $(x-1)$ که در $x = 1$ برابر صفر است در آن ضرب شود کل عبارت به دست آمده پیوسته خواهد شد.

• $f(x) = [x] \rightarrow x = 1$ ناپیوسته است

• $f(x) = (x-1)[x] \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0 \rightarrow x = 1$ پیوسته است

تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $y = [f(x)]$ در بازه $[a, b]$

برای این که تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $y = [f(x)]$ را در بازه $[a, b]$ به دست آوریم:

۱ ابتدا نقاطی از بازه داده شده که عبارت داخل جزء صحیح به ازای آن‌ها برابر عدد صحیح می‌شود را به دست می‌آوریم $(f(x) = k : k \in \mathbb{Z})$

۲ نقاط مینیمم نسبی تابع $f(x)$ را (در صورت وجود) از بین نقاط به دست آمده کنار می‌گذاریم.

۳ در نهایت به سراغ نقاط ابتدا و انتهای بازه می‌رویم، اگر نقاط ابتدا و انتهای بازه جزء نقاط مرحله اول باشند، داریم:

۱ پیوستگی راست تابع را در $x = a$ بررسی می‌کنیم، اگر تابع در $x = a$ راست پیوسته باشد، این نقطه جزء نقاط ناپیوستگی به حساب نمی‌آید.

۲ همچنین پیوستگی چپ تابع را در $x = b$ بررسی می‌کنیم، اگر تابع در $x = b$ از چپ پیوسته باشد، این نقطه را نیز از لیست سیاه نقاط ناپیوستگی حذف می‌کنیم.

پیوستگی توابع در $\mathbb{R}$

اگر دامنه تابع f برابر مجموعه اعداد حقیقی $(D_f = \mathbb{R})$ و این تابع در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد می‌گوییم که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. در ادامه چند تابع معروف را به شما معرفی می‌کنیم که همواره در $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند.

۱ در جدول ارائه شده فرض بر این است که $g(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.



مثال	فرم	تابع
$f(x) = x^2 - 2x + 1$	$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$	چند جمله‌ای
$f(x) = \sin(2x - 1)$	$f(x) = \sin g(x)$	سینوس
$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = \cos g(x)$	کسینوس
$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	توابع شامل چند جمله‌ای زیر رادیکال با فرجه فرد
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$	$f(x) = a^{g(x)} \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$	نمایی
$f(x) = x^4 - 1 $	$f(x) = g(x) $	قدر مطلق

اما توابعی هم وجود دارند که روی $\mathbb{R}$ پیوسته نیستند، ولی تحت شرایط خاصی می‌توانند در $\mathbb{R}$ پیوسته باشند.

توابع رادیکالی با فرجه زوج: اگر بخواهیم یک تابع رادیکالی با فرجه زوج، در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید عبارت زیر رادیکال همواره نامنفی باشد.

توابع گویا: یک تابع گویا زمانی در $\mathbb{R}$ پیوسته خواهد شد، که مخرج کسر ریشه حقیقی نداشته باشد. چرا که توابع گویا در ریشه(های) مخرج خود ناپیوسته‌اند.

توابع چند ضابطه‌ای: برای این که یک تابع چند ضابطه‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، باید:

✓ هر یک از ضابطه‌ها در دامنه تعریف خود پیوسته باشند.

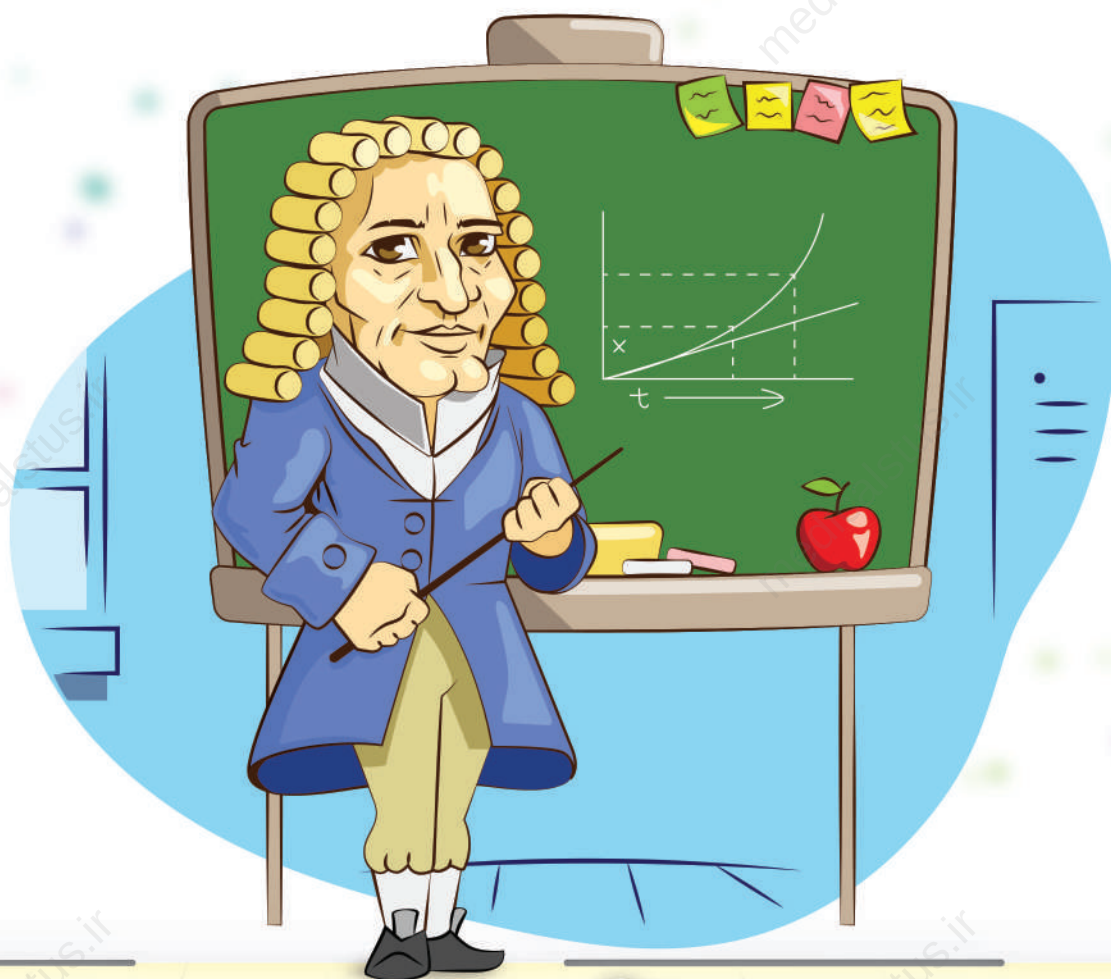
✓ شرط پیوستگی در نقاط مرزی دامنه برقرار باشد.

نکته: تابع $y = \log_g(x) f(x)$ در دامنه تعریف خود پیوسته است.

نقاط ناپیوستگی

در جدول زیر نقاطی که می‌توانن جزء نقاط ناپیوستگی باشند رو برای چند تابع معروف به سبک ماز براون جمع کردیم راضی باشید ...

نوع تابع	نقاط ناپیوستگی
توابع گویا	توابع گویا در نقاطی که به ازای آن‌ها مخرج کسر برابر صفر می‌شود، ناپیوسته هستند.
توابع رادیکالی با فرجه زوج	✓ در ریشه‌های ساده و ریشه‌های مکرر مرتبه فرد عبارت زیر رادیکال ناپیوسته است. ✓ در ریشه‌های مضاعف و رتبه‌های مکرر مرتبه زوج عبارت زیر رادیکال، باید پیوستگی را بررسی کنیم.
توابع جزء صحیح	نقاطی که عبارت داخل جزء صحیح به ازای آن‌ها برابر عدد صحیح می‌شود، می‌توانند جزء نقاط ناپیوستگی باشند. مگر این که: ✓ آن نقطه طول نقطه مینیمم نسبی عبارت درون جزء صحیح باشد ✓ یک عامل صفرشونده در آن نقطه، در جزء صحیح ضرب بشود، که قبلاً مفصل در موردش صحبت کردیم.
توابع چند ضابطه‌ای	در توابع چند ضابطه‌ای اگر هر یک از ضابطه‌ها در دامنه خودشان پیوسته باشند، در این صورت نقاط مرزی دامنه‌ها می‌توانند جزء نقاط ناپیوستگی باشند که این موضوع باید توسط شرط پیوستگی بررسی شود.
تابع $y = \tan f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است	می‌دانیم: $\tan f(x) = \frac{\sin f(x)}{\cos f(x)}$ بوده و در اصل یک تابع کسری است، بنابراین در نقاطی که $\cos f(x) = 0$ می‌باشد، این تابع ناپیوسته است. $\cos f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$
تابع $y = \cot f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است	به طریق مشابه، چون $\cot f(x) = \frac{\cos f(x)}{\sin f(x)}$ است، بنابراین در نقاطی که $\sin f(x) = 0$ است، این تابع ناپیوسته خواهد بود. $\sin f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



فصل ۴: مشتق

سلام، سلام... ما اومدیم با یه فصل و کلی چیزای جدید و چالشی که قراره با هم از پیشش برباییم. همین اول کاری میخایم با یه خبر خوب خوشحالتون کنیم، اونم اینه که توی این فصل کاری کردیم که مشتق به یکی از شیرین‌ترین بخش‌های کل دوران تحصیلی‌تون تبدیل بشه طوری که هر وقت از درس و کتاب خسته شدی بیای بشینی سوال‌های مشتق رو حل کنی موافقین؟ (البته کل فصل هامون این مدلیه!)

What's up here?

جدی از این مسائل، بیایم کمی این فصل رو با هم تحلیل کنیم و ببینیم اصلاً توی این فصل چه خبره! مشتق یه بخش خیلی مهم توی ریاضیه که میشه اون رو پلی بین فصل حد و فصل کاربرد مشتق دونست، از این فصل هر ساله معمولاً ۲ تا ۴ تست توی کنکور سوال میاد و آه بخایم تأثیری که این فصل توی حل سؤالاتی کاربرد مشتق داره رو هم در نظر بگیریم، این عدد میتونه حتی بیشتر هم بشه. با این حال آه میخایم توی کنکور با قدرت از پس سؤالاتی این بخش بر بیایم حتمن این فصل رو جدی بگیریم و روی بخش‌های قواعد مشتق‌گیری، مشتق‌پذیری، مشتق تابع مرکب و آهنگ تغییر، بیشتر از بقیه سرمایه‌گذاری کنیم. راستی یادت باشه فرمول‌ها و تکنیک‌های مشتق‌گیری رو توی برگه خلاصه‌هاات بنویس و هر چند روز یکبار مرورشون کن و تا میتونی از این فصل تست بزن که واقعا یکی از لذت‌های زندگی اینه که بشینی و سوال‌های خوب فصل حد و مشتق رو حل کنی! Do you agree

آماده‌ای شروع کنیم؟ بزن بریم رفیق!

کنکور سراسری	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ - نوبت اول	۱۴۰۲ - نوبت دوم
تعداد سؤال	۳	۴	۳	۱	۲
مباحث مطرح شده در سؤال	مشتق تابع مرکب آهنگ تغییر خط مماس بر منحنی	مشتق‌پذیری مشتق‌گیری از توابع مثلثاتی معادله نیم مماس مشتق‌گیری + قضیه تقسیم	خط مماس بر منحنی مشتق تابع مرکب مشتق‌گیری + دستور هویتل	شیب نیم مماس چپ و راست	مشتق تابع مرکب خط مماس بر منحنی

آشنایی با مفهوم مشتق

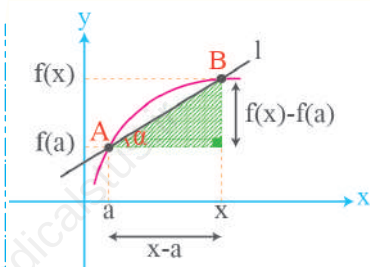
مشتق‌های یک طرفه

تعریف‌های دیگر مشتق

رابطه شیب خط مماس و علامت مشتق

تعبیر هندسی مشتق

تعبیر هندسی مشتق

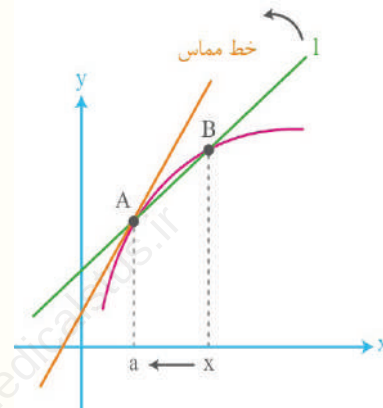
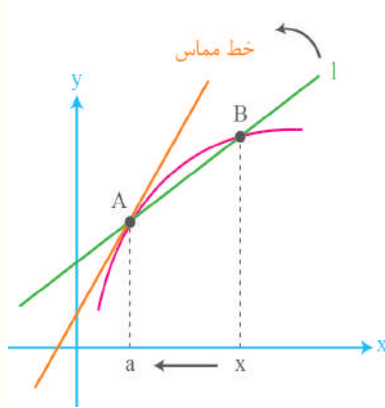
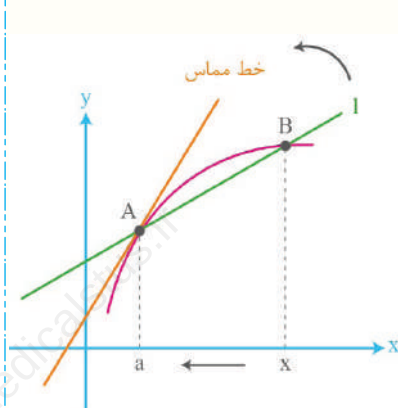


با توجه به شکل مقابل، نقاط A و B روی منحنی تابع f قرار دارند. به خطی که از این دو نقطه عبور می‌کند، **خط قاطع** (یا خط واصل دو نقطه) می‌گوییم. حال می‌خواهیم **شیب** این خط را به دست بیاوریم که برابر است با:

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شیب خط قاطع

حال نقطه A را ثابت و نقطه B را مانند یک گوی لغزان فرض کرده و آن را روی نمودار تابع f ، به سمت نقطه A می‌لغزانیم. همان‌طور که در شکل‌های زیر می‌بینیم، با نزدیک شدن نقطه x به نقطه a، شیب خط l، به شیب خط مماس در نقطه A نزدیک و نزدیک‌تر شده و در نهایت شیب خط l با شیب خط مماس در نقطه A، برابر می‌شود.



به عبارت دیگر، اگر x را به سمت a میل دهیم، حد شیب خط‌های قاطع با شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه A، برابر می‌شود، که آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی تابع در نقطه A} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

حال اگر حد بالا **موجود و متناهی** باشد، به آن **مشتق تابع f در نقطه $x = a$** می‌گوییم و آن را با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

نتیجه‌گیری اخلاقی

$$f'(a) = \text{مشتق تابع } f \text{ در نقطه } x = a = \text{شیب خط مماس بر نمودار تابع } f \text{ در نقطه‌ای به طول } x = a$$

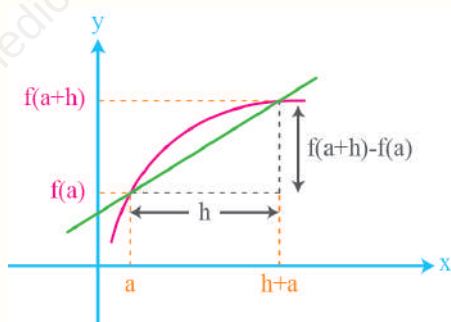
رابطه شیب خط مماس و علامت مشتق

در بعضی از سؤالات، از ما می‌خواهند که شیب خط مماس بر نمودار تابع در چند نقطه را با هم مقایسه کنیم و یا این که درباره علامت مشتق در یک نقطه سؤالاتی مطرح می‌شود که در این مواقع جدول زیر می‌تواند بسیار کمک‌کننده باشد.



توضیحات	مقایسه مشتق	مقایسه شیب خط مماس	شکل
شیب خط مماس و همچنین مقادیر مشتق در حال کاهش است.	$f'(a) > f'(b) > 0$	$m_a > m_b > 0$	
شیب خط مماس و همچنین مقادیر مشتق در حال افزایش است.	$f'(b) > f'(a) > 0$	$m_b > m_a > 0$	
شیب خط مماس و همچنین مقادیر مشتق در حال افزایش است.	$f'(a) < f'(b) < 0$	$m_a < m_b < 0$	
شیب خط مماس و همچنین مقادیر مشتق در حال کاهش است.	$f'(b) < f'(a) < 0$	$m_b < m_a < 0$	
شیب خط مماس و همچنین مقادیر مشتق در حال افزایش است. $\left. \begin{aligned} f'(a) < 0 \\ f'(b) = 0 \\ f'(c) > 0 \end{aligned} \right\}$	$f'(a) < f'(b) < f'(c)$	$m_a < m_b < m_c$	
شیب خط مماس و همچنین مقادیر مشتق در حال کاهش است. $\left. \begin{aligned} f'(c) < 0 \\ f'(b) = 0 \\ f'(a) > 0 \end{aligned} \right\}$	$f'(c) < f'(b) < f'(a)$	$m_c < m_b < m_a$	

تعریف های دیگر مشتق



تا الان مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را به صورت $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ نمایش می دادیم، اما با تغییر متغیر $h = x - a$ ، می توان مشتق تابع f در نقطه $x = a$ را به صورت زیر نشان داد.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

توجه با تغییر متغیر $h = x - a$ ، اگر $x \rightarrow a$ میل کند، $h \rightarrow 0$ میل می کند.



البته ناگفته نماند که می‌توان به جای h در تعریف فوق، هر عامل دیگری را جایگزین کرد، بدون اینکه تغییری در تعریف مشتق تابع f در نقطه $x = a$ ایجاد شود، ببینید ...

$$f'(a) = \lim_{\bigcirc \rightarrow \bigcirc} \frac{f(a + \bigcirc) - f(a)}{\bigcirc}$$

به مدل دیگه هم داریم که خیلی توی تست‌ها ازش استفاده میشه ...

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + mh) - f(a + nh)}{ch} = \left(\frac{m-n}{c} \right) f'(a)$$

ضریب h اولی ضریب h دومی ضریب h مخرج

مشتق‌های یک‌طرفه (مشتق چپ و مشتق راست)

از درسنامه‌های گذشته به خاطر داریم که مشتق تابع پیوسته $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ ، با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در این نقطه برابر است و آن را به صورت‌های زیر نمایش می‌دادیم:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

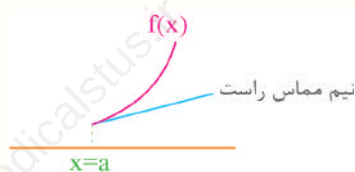
$$\bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

متن نمونه:

حال با این مقدمه به سراغ تعریف مشتق چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ می‌رویم.

مشتق راست تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ از راست پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق راست تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که در سمت راست $x = a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌مماس راست می‌گوییم.



$$\begin{cases} f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \end{cases}$$

$x = a$ شیب نیم‌مماس راست در $f'_+(a)$

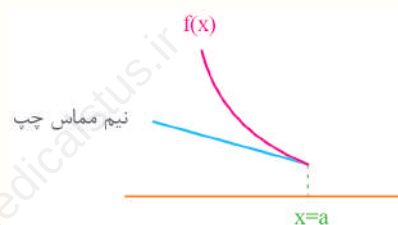
نکته شرط لازم برای وجود مشتق راست در نقطه $x = a$ ، این است که تابع f در این نقطه از راست پیوسته باشد. به عبارت دیگر اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوستگی راست نداشته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق راست تعریف نمی‌شود.

$$y - f(a) = f'_+(a)(x - a)$$

نکته معادله نیم‌مماس راست در نقطه $x = a$ برابر است با:

مشتق چپ تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$:

اگر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ از چپ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، در این صورت مشتق چپ تابع f در این نقطه، همان شیب نیم‌خطی است که در سمت چپ $x = a$ بر نمودار تابع f مماس می‌شود که به این نیم‌خط، اصطلاحاً نیم‌مماس چپ می‌گوییم.



$$\begin{cases} f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \end{cases}$$

$x = a$ شیب نیم‌مماس چپ در $f'_-(a)$

نکته شرط لازم برای وجود مشتق چپ در نقطه $x = a$ ، این است که تابع f در این نقطه از چپ پیوسته باشد. به عبارت دیگر اگر تابع f در نقطه $x = a$ پیوستگی چپ نداشته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق چپ تعریف نمی‌شود.

$$y - f(a) = f'_-(a)(x - a)$$

نکته معادله نیم‌مماس چپ در نقطه $x = a$ برابر است با:



قوانین مشتق گیری



قوانین مشتق (بخش سوم)

قوانین مشتق (بخش دوم)

قوانین مشتق (بخش اول)

قواعد مشتق گیری

برای محاسبه مشتق یک تابع در نقطه $x = a$ ، می توانیم از تعریف مشتق که در درسنامه های گذشته به طور مفصل درباره آن صحبت کردیم، استفاده کنیم. اما محاسبه مشتق برخی از توابع با استفاده از تعریف مشتق کمی دشوار است. بنابراین در ادامه قواعدی را به شما معرفی می کنیم که با استفاده از آن ها می توانید مشتق توابع را بدون استفاده از تعریف مشتق و در کمترین زمان ممکن به دست آورید.

فقط یادآور باشه که حفظ کردن این فرمول ها از نون شب هم واجب تره ...

قواعد مشتق (بخش اول)

۱ مشتق تابع ثابت: اگر $f(x) = c$ باشد، آنگاه $f'(x) = 0$ است. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه ای برابر صفر است.

۲ مشتق تابع خطی: اگر $f(x) = ax + b$ یک تابع خطی باشد، آنگاه مشتق این تابع در هر نقطه با شیب خط برابر است. یعنی:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

۳ مشتق تابع چندجمله ای: اگر $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{Q}$ باشد، آنگاه $f'(x) = nx^{n-1}$ است.

توجه اگر عددی در یک تابع ضرب شود، برای مشتق گیری، ابتدا ضریب عددی را کنار گذاشته و عمل مشتق را انجام می دهیم. سپس آن ضریب را در تابع مشتق ضرب می کنیم. به عبارت دیگر اگر f تابعی مشتق پذیر و $k \in \mathbb{R}$ باشد، داریم:

$$y = kf(x) \rightarrow y' = kf'(x)$$

۴ مشتق تابع رادیکالی: اگر $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ باشد، آنگاه داریم:

$$(*) f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \rightarrow f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n \times x^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{m}{n \sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

به عبارت دیگر:

$$f(x) = \sqrt[n]{x^m} \rightarrow f'(x) = \frac{m}{n \sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

توجه همان طور که در ابتدای این قسمت (*) نیز اشاره شد، برای مشتق گیری از تابع $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ می توانیم آن را به صورت $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ نوشته و سپس مانند یک تابع چندجمله ای از آن مشتق گرفت، مثال رو ببینید:

$$\text{مثال: } f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4 \sqrt[4]{x}}$$

قواعد مشتق (بخش دوم)

اگر توابع f ، g و h در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آنگاه داریم:

۱ مشتق مجموع و تفاضل دو تابع:

$$y = (f + g)(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

$$y = (f - g)(x) \rightarrow y' = f'(x) - g'(x)$$

و در حالت کلی تر داریم:

$$y = f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \dots \rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x) \pm \dots$$



۲ مشتق حاصل ضرب دو تابع:

$$y = (f \cdot g)(x) \rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

اولی مشتق اولی مشتق دومی

دومی خود دومی خود اولی

مثال: $y = (-x^2 + 3x - 1)(x^4 + 2x^3) \Rightarrow y' = \underbrace{(-2x + 3)}_{\text{مشتق اولی}} \underbrace{(x^4 + 2x^3)}_{\text{خود دومی}} + \underbrace{(4x^3 + 6x^2)}_{\text{مشتق دومی}} \underbrace{(-x^2 + 3x - 1)}_{\text{خود اولی}}$



بد نیست مشتق حاصل ضرب سه تا تابع رو هم بلد باشیم!

$$y = (f \cdot g \cdot h)(x) \rightarrow y' = f' \cdot g \cdot h + g' \cdot f \cdot h + h' \cdot f \cdot g$$

مشتق اولی مشتق دومی مشتق سومی

بقیه تابع بقیه تابع بقیه تابع

مثال: $y = (x^2 - x)(2x - 1)(x^3 + 3x) \Rightarrow y' = \underbrace{(2x - 1)}_{\text{مشتق اولی}} \underbrace{(2x - 1)(x^3 + 3x)}_{\text{بقیه تابع}} + \underbrace{(2)}_{\text{مشتق دومی}} \underbrace{(x^2 - x)(x^3 + 3x)}_{\text{بقیه تابع}} + \underbrace{(3x^2 + 3)}_{\text{مشتق سومی}} \underbrace{(x^2 - x)(2x - 1)}_{\text{بقیه تابع}}$

۳ مشتق تقسیم دو تابع:

$$y = \frac{f}{g}(x) \rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}, g(x) \neq 0$$

مشتق صورت مخرج مشتق مخرج صورت

(مخرج)^۲

مثال: $y = \frac{5 - 3x}{x^3 + 1} \Rightarrow y' = \frac{\underbrace{(-3)}_{\text{مشتق صورت}} \underbrace{(x^3 + 1)}_{\text{مخرج}} - \underbrace{(3x^2)}_{\text{مشتق مخرج}} \underbrace{(5 - 3x)}_{\text{صورت}}}{\underbrace{(x^3 + 1)^2}_{\text{(مخرج)}^2}}$

توجه: به کمک مشتق تقسیم دو تابع (قانون شماره ۳ در بالا)، می توان مشتق تابع هموگرافیک را به صورت زیر نتیجه گرفت:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \rightarrow y' = \frac{(ad - bc)}{(cx + d)^2}$$

مثال: $y = \frac{2x - 1}{3x + 4} \xrightarrow{a=2, b=-1, c=3, d=4} y' = \frac{((2 \times 4) - (-1 \times 3))}{(3x + 4)^2} = \frac{11}{(3x + 4)^2}$

قواعد مشتق (بخش سوم)

در این قسمت مشتق گیری توابعی را به شما معرفی می کنیم که در آن ها به جای x ، عبارتی بر حسب x حضور دارد. (چی شد؟ چی شد؟ من که نفهمیدم!)

بذار خودمونی تر بگم، قبلن میومدن و از ما مشتق تابع $y = x^2$ رو می پرسیدن. ولی حالا میان و به جای x توی تابع $y = x^2$ ، به عبارت بزرگ تر بر حسب x مثل $(x^2 - 3x)$ رو قرار میدن و میگن مشتق تابع $y = (x^2 - 3x)^2$ رو به دست بیار. به مثال دیگه ... یا اینکه قبلن به ما میگفتن مشتق تابع $y = \sqrt{x}$ چی میشه؟؟ ولی حالا میان و به جای x توی تابع $y = \sqrt{x}$ به عبارت دیگه مثل $(\frac{x^2 - 1}{2x + 5})$ رو قرار میدن و میگن حالا بیا و مشتق



تابع $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{2x+5}}$ رو حساب کن. توی این طور مواقع رابطه‌های زیر به ما کمک می‌کنن که سؤال رو فیتیله پیچ کنیم و هیچ جای فراری برش نداریم. بریم که اول این فن‌ها رو یاد بگیریم و بعداً اونارو روی سؤال پیاده کنیم ...

$$y = (f(x))^n \rightarrow y' = n f'(x) (f(x))^{n-1}$$

۱ مشتق‌گیری از توابع چندجمله‌ای به فرم $y = (f(x))^n$:

مثال: $y = (3x^2 + 2x - 1)^2 \Rightarrow y' = 2(6x + 2)(3x^2 + 2x - 1)$

$$y = \sqrt[n]{(f(x))^m} \rightarrow y' = \frac{m f'(x)}{n \sqrt[n]{(f(x))^{n-m}}}$$

۲ مشتق‌گیری از توابع به فرم $y = \sqrt[n]{(f(x))^m}$:

مثال: $y = \sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2} \xrightarrow[n=3]{m=1} y' = \frac{2x-1}{3 \sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2}}$

$$y = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d} \rightarrow y' = \frac{(ad-bc)}{(cf(x)+d)^2} \times f'(x)$$

۳ مشتق‌گیری از توابع به فرم $y = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d}$:

مثال: $y = \frac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}+4} \xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}} y' = \frac{(3 \times 4) - (-1 \times 2)}{(2\sqrt{x}+4)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{14}{2\sqrt{x}(2\sqrt{x}+4)^2}$

تکنیک‌های مشتق

تکنیک ۳ (دنده عقب توی مشتق)

تکنیک ۲ (مشتق‌گیری از عامل صفر شونده)

تکنیک ۱ (ساده کن بعد مشتق بگیر)

توی این قسمت قصد داریم که چندتا تکنیک خوب برای مشتق‌گیری بهتون یاد بدیم که یکی از یکی مهمترن. پس بدون اینکه وقت رو تلف کنیم بریم سراغشون!!!

تکنیک اول (ساده کن بعد مشتق بگیر)

در بعضی از سؤالات، قبل از مشتق گرفتن از تابع، سعی می‌کنیم که تابع داده شده را به کمک اتحادها، فاکتورگیری، تجزیه، گویا کردن مخرج کسرها و ... ساده کنیم و سپس از تابع به دست آمده مشتق بگیریم.

تکنیک دوم (مشتق‌گیری از عامل صفر شونده)

اگر تابعی به صورت حاصل ضرب دو یا چند عامل و به صورت $y = f(x) \times g(x) \times h(x) \times \dots$ بوده و یکی از عامل‌ها در نقطه $x = a$ برابر صفر باشد، در این صورت برای مشتق گرفتن از این تابع در نقطه $x = a$ ، فقط از عامل صفرشونده مشتق گرفته و سپس آن را در حدّ بقیه عامل‌ها در نقطه $x = a$ ضرب می‌کنیم. به عبارت دیگر:

$$y = f(x) \times g(x) \times h(x) \times \dots \xrightarrow{\text{if } f(a)=0} y'(a) = f'(a) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times h(x) \times \dots$$

توجه: اگر ضابطه تابع در نقطه $x = a$ ، دو یا چند عامل صفرشونده داشته باشد، در این صورت مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است.

توجه: اگر توان عامل صفرشونده بیشتر از یک باشد، در این صورت مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر است.

تکنیک سوم (دنده عقب توی مشتق)

در بعضی از سؤالات عبارتی با ظاهر نسبتاً پیچیده را به ما می‌دهند و حاصل آن را از ما می‌پرسند، در این گونه موارد معمولاً با طرف دوم مشتق مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و تقسیم دو تابع و یا با طرف دوم مشتق ترکیب توابع مواجهیم که در ادامه چند نمونه مهم که در اکثر تست‌ها مورد سؤال قرار می‌گیرند را برایتان لیست می‌کنیم:

• $f'(x) \pm g'(x) = (f \pm g)'(x)$

• $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = (f \cdot g)'(x)$



- $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) = g^2(x)\left(\frac{f}{g}\right)'(x)$; $(g(x) \neq 0)$
- $\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} = \left(\frac{f}{g}\right)'(x)$; $(g(x) \neq 0)$
- $2f(x)f'(x) = (f^2(x))'$
- $f'(x)g'(f(x)) = (g \circ f)'(x)$

مشتق تابع مرکب

اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند، در این صورت برای محاسبه مشتق تابع مرکب $(f \circ g)(x)$ ، ابتدا از تابع درونی، یعنی g مشتق گرفته و سپس مشتق تابع بیرونی یعنی f را به ازای خروجی تابع g ، به دست می آوریم. به عبارت دیگر:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

در حالت کلی تر داریم:

$$y = f(\bigcirc) \Rightarrow y' = \bigcirc' f'(\bigcirc)$$

توجه در صورتی که سه تابع مشتق پذیر با هم ترکیب شوند:

$$y = (f \circ g \circ h)(x) \rightarrow y' = h'(x)g'(h(x))f'(g(h(x)))$$

توجه برای مشتق گرفتن از یک تابع مرکب توان دار داریم:

$$y = f^n(g(x)) \rightarrow y' = ng'(x)f'(g(x))f^{n-1}(g(x))$$

نکته در برخی از سؤالات، طول نقطه مشتق گیری برای ما مشخص نیست. یعنی نمی دانیم که مشتق تابع را در چه نقطه ای به دست بیاوریم. در این گونه موارد بهتر است ابتدا ضابطه تابع مرکب را تشکیل داده و سپس با استفاده از قوانین مشتق گیری از رابطه به دست آمده مشتق بگیریم (به تست این مدلی با هم کار کنیم)

مشتق مرتبه دوم

می دانیم مشتق اول تابع $f(x)$ به صورت $f'(x)$ است. حال اگر تابع $f'(x)$ مشتق پذیر باشد، در این صورت مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)$ را به صورت $f''(x)$ نمایش می دهیم و برای محاسبه آن کافی است از تابع $f(x)$ دو بار مشتق بگیریم. به عبارت دیگر اگر تابع $f(x)$ را داشته باشیم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x)$$

مثال: $f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 1 \xrightarrow[\text{f}']{\text{مشتق اول}} f'(x) = 12x^3 + 4x \xrightarrow[\text{f}']{\text{مشتق دوم}} f''(x) = 36x^2 + 4$

حال اگر بخواهیم مشتق مرتبه دوم تابع f ، در نقطه $x = a$ را به کمک تعریف مشتق بیان کنیم، داریم:

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

و در حالت کلی تر:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+mh) - f'(a+nh)}{ch} = \left(\frac{m-n}{c}\right)f''(a)$$

مشتق توابع شامل قدرمطلق

برای مشتق گیری از یک تابع شامل قدرمطلق در نقطه $x = a$ ، باید به نحوی از دست قدرمطلق خلاص شویم و سپس عملیات مشتق گیری را انجام بدهیم. برای این کار $x = a$ را وارد بازی می کنیم. به این صورت که:

اگر عبارت داخل قدرمطلق به ازای $x = a$ ، مثبت باشد، به راحتی قدرمطلق را حذف کرده و از عبارت موجود در نقطه $x = a$ مشتق می گیریم. اگر عبارت داخل قدرمطلق به ازای $x = a$ ، منفی باشد، ابتدا یک علامت منفی در عبارت داخل قدرمطلق ضرب می کنیم و سپس قدرمطلق را برداشته و از عبارت موجود در نقطه $x = a$ مشتق می گیریم.

اگر عبارت داخل قدرمطلق به ازای $x = a$ برابر صفر باشد، این به آن معنی است که $x = a$ ریشه عبارت داخل قدرمطلق است. بنابراین برای محاسبه مشتق تابع در این نقطه، مشتق چپ و راست را در نقطه $x = a$ به صورت جداگانه به دست می آوریم.



مشتق توابع شامل جزء صحیح

برای مشتق گیری از توابع شامل جزء صحیح در نقطه $x = a$ ، داریم:

اگر عبارت داخل جزء صحیح، به ازای $x = a$ برابر یک عدد **غیر صحیح** شود، ابتدا مقدار جزء صحیح را به ازای $x = a$ تعیین کرده و سپس جزء صحیح را حذف می کنیم. در نهایت از عبارت به دست آمده مشتق می گیریم.

اگر عبارت داخل جزء صحیح، به ازای $x = a$ برابر یک عدد **صحیح** شود، باید مشتق چپ و راست تابع به ازای $x = a$ را به صورت جداگانه به دست بیاوریم.

یادآوری قاعده هوییتال: اگر در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، صورت و مخرج کسر به سمت صفر میل کند، به جای محاسبه این حد، مقدار

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ را به دست می آوریم. یعنی از صورت و مخرج کسر داده شده به صورت جداگانه مشتق گرفته و عبارت جدیدی می سازیم، سپس از

عبارت جدید در $x = a$ حد می گیریم. به این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

توجه: از این روش زمانی می توان استفاده کرد که توابع f و g در $x=a$ مشتق پذیر باشند.

توجه: اگر پس از استفاده از قاعده هوییتال دوباره به حالت $\frac{0}{0}$ برسیم، مجدداً این قاعده را روی عبارت جدید، یعنی $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ اعمال می کنیم.

مشتق پذیری

مشتق پذیری تابع f در نقطه $x=a$	انواع نقاط مشتق ناپذیر	مشتق پذیری توابع چند ضابطه ای در نقطه مرزی	مشتق پذیری توابع رادیکالی به فرم $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^m}$	مشتق پذیری در توابع شامل قدر مطلق	مشتق پذیری توابع شامل جزء صحیح	مشتق پذیری روی یک بازه	مشتق پذیری برخی از توابع خاص در مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$)
-----------------------------------	------------------------	--	---	-----------------------------------	--------------------------------	------------------------	---

مشتق پذیری تابع f در نقطه $x=a$

می دانیم که مشتق تابع f در نقطه $x = a$ با شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر است. بنابراین اگر بتوانیم در نقطه $x = a$ ، یک خط مماس **غیر قائم** بر نمودار تابع f رسم کنیم، آنگاه می توانیم ادعا کنیم که تابع در این نقطه مشتق پذیر است. به عبارت دیگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق پذیر است، اگر:

۱) تابع f در $x = a$ ، پیوسته باشد، یعنی:

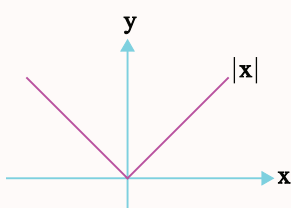
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

۲) مشتق چپ و مشتق راست تابع f در $x = a$ ، موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی:

$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

نکته: اگر تابع f در نقطه $x=a$ ، پیوسته نباشد، در نتیجه تابع f در این نقطه **مشتق ناپذیر** است.

نکته: اگر تابع f در نقطه $x=a$ ، **مشتق پذیر** باشد، در نتیجه تابع f در این نقطه **پیوسته** است. توجه شود که عکس این نکته صحیح نیست، به عبارت دیگر ممکن است تابعی در یک نقطه پیوسته باشد، اما مشتق پذیر نباشد. مانند تابع $y = |x|$ که در نقطه $x=0$ پیوسته هست ولی مشتق پذیر نیست، چرا که مشتق چپ و مشتق راست تابع در این نقطه با هم برابر نیستند.



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = 1 \\ f'_-(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

البته با توجه به نمودار تابع $y = |x|$ نیز می توان فهمید که این تابع در نقطه $x=0$ ، با وجود پیوسته بودن مشتق پذیر نیست، چرا که شیب نیم مماس راست و چپ در این نقطه با هم برابر نیستند.



انواع نقاط مشتق ناپذیر

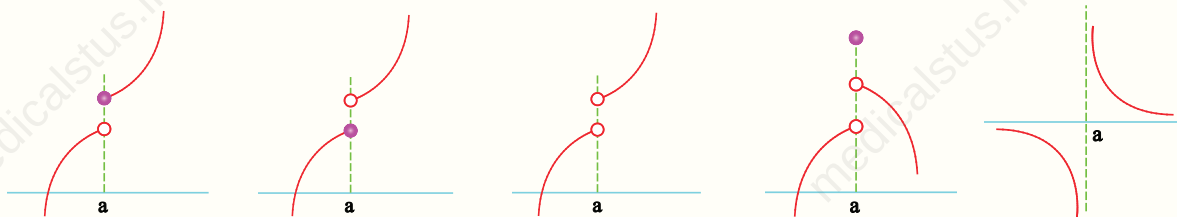
نقاط مشتق ناپذیر را به دو دسته کلی تقسیم بندی می کنیم:

۱. نقاطی که تابع در آن‌ها **ناپیوسته** است.

۲. نقاطی که تابع در آن‌ها **پیوسته** بوده ولی **مشتق ناپذیر** است.

حال می خواهیم که درباره هر یک از دسته ها به صورت مفصل تر بحث کنیم:

نقاط ناپیوستگی تابع: می دانیم که شرط اولیه مشتق پذیری، پیوستگی است. پس در نقاطی که تابع پیوسته نباشد، مشتق پذیر هم نخواهد بود، چرا که در این نقاط نمی توانیم یک خط مماس واحد بر نمودار تابع رسم کنیم. برای مثال در شکل های زیر، تابع مورد نظر در $x = a$ ناپیوسته بوده، پس مشتق ناپذیر است.



الف) نقاط گوشه ای (زاویه ای)

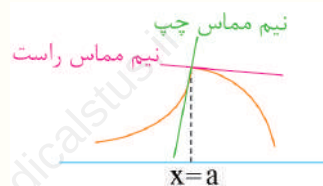
۱. نقاط عطف عمودی

۲. نقاط بازگشتی

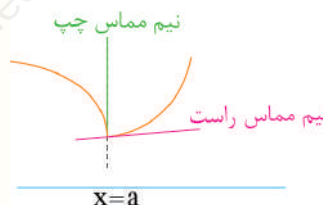
الف) نقاط گوشه ای (زاویه ای): نقطه $x = a$ را نقطه گوشه ای تابع f می گوئیم، هرگاه تابع در این نقطه پیوسته بوده و یکی از حالت های زیر اتفاق بیفتد:

مشتق چپ و مشتق راست در نقطه $x = a$ ، **موجود** ولی **نابرابر** باشند.

مشتق چپ و مشتق راست در نقطه $x = a$ ، یکی **ممتناهی** و دیگری **نامتناهی** باشد.

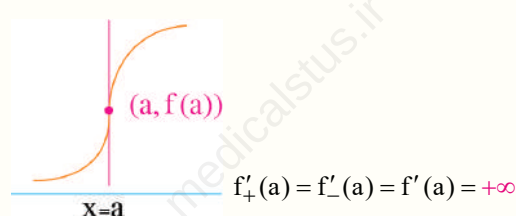
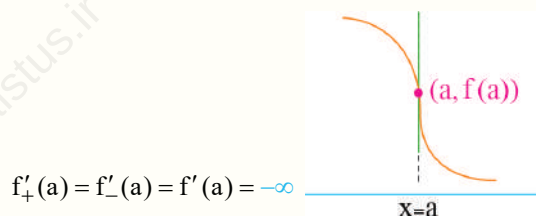


$$\begin{cases} f'_-(a) = \text{شیب نیممماس چپ} = m_1 = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \\ f'_+(a) = \text{شیب نیممماس راست} = m_2 = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m_1 \neq m_2$$



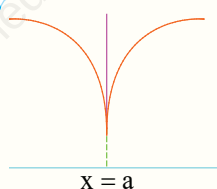
$$\begin{cases} f'_-(a) = \text{شیب نیممماس چپ} = m_1 = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \\ f'_+(a) = \text{شیب نیممماس راست} = m_2 = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0 \end{cases}$$

ب) نقاط عطف عمودی: فرض می کنیم که تابع f در یک همسایگی $x = a$ ، تعریف شده و در این نقطه پیوسته باشد. حال اگر مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x = a$ ، هر دو **نامتناهی** و با علامت های برابر (هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$) باشند، در این صورت به نقطه $(a, f(a))$ ، نقطه عطف عمودی و خط $x = a$ را **مماس قائم** بر منحنی تابع f می نامیم.

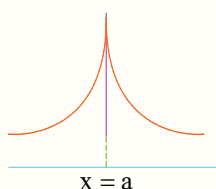


پ) نقاط بازگشتی: فرض می کنیم که تابع f در یک همسایگی $x = a$ ، تعریف شده و در این نقطه پیوسته باشد. حال اگر مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x = a$ ، هر دو **نامتناهی** و با علامت های نابرابر (یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$) باشند، در این صورت به نقطه $(a, f(a))$ ، نقطه بازگشتی و خط $x = a$ را **مماس قائم** بر منحنی تابع f می نامیم.

۱. هر دو این نقاط در کتاب درسی به عنوان نقاطی معرفی شده اند که تابع در آن ها **مماس قائم** دارد، ولی برای درک بهتر موضوع و دسته بندی مناسب، این دو نقطه را از هم تفکیک کردیم.



$$\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases}$$



$$\begin{cases} f'_-(a) = +\infty \\ f'_+(a) = -\infty \end{cases}$$



با به + بندی خوب چطوری؟! 🤔

انواع نقاط مشتق ناپذیر | نقاط ناپیوستگی تابع
 | نقاط گوشه‌ای | نوع اول: مشتق چپ و راست هر دو موجود ولی نابرابر
 | نقاط عطف عمودی: مشتق چپ و راست هر دو نامتناهی و با علامت‌های برابر
 | نقاط بازگشتی: مشتق چپ و راست هر دو نامتناهی و با علامت‌های نابرابر

مشتق پذیری توابع چندضابطه‌ای در نقطه مرزی

برای این که تابع چند ضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ در نقطه مرزی $x = a$ مشتق پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} h(x) = f(a)$$

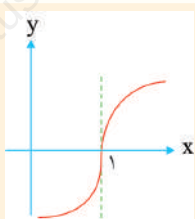
۱ تابع f در نقطه مرزی $x = a$ پیوسته باشد، یعنی:

۲ مشتق چپ و راست تابع f در نقطه $x = a$ ، موجود (متناهی) و با هم برابر باشند، یعنی:

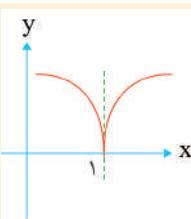
$$f'_+(a) = f'_-(a)$$

مشتق پذیری توابع رادیکالی به فرم $f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^m}$

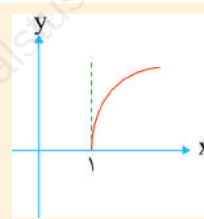
✓ اگر فرجه رادیکال از توان عبارت زیر رادیکال بیشتر باشد ($n > m$)، تابع f در ریشه عبارت زیر رادیکال یعنی در $x = a$ ، مشتق ناپذیر است.



$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

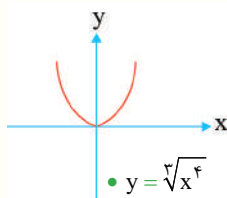


$$y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

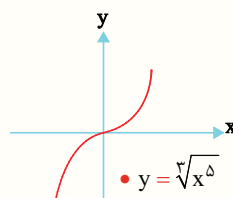


$$y = \sqrt{x-1}$$

✓ اگر فرجه رادیکال از توان عبارت زیر رادیکال کمتر باشد ($n < m$)، در این صورت مشتق تابع f در $x = a$ وجود برابر صفر خواهد بود.



$$y = \sqrt{x^4}$$



$$y = \sqrt{x^5}$$

✓ اگر فرجه رادیکال با توان عبارت زیر رادیکال برابر باشد ($n = m$)، دو حالت خواهیم داشت:

✓ حالت اول: اگر فرد $n = m$ باشد، در این حالت تابع f در $x = a$ مشتق پذیر است.

$$f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^m} \xrightarrow{n=m=\text{فرد}} f(x) = (x-a)$$

✓ حالت دوم: اگر زوج $n = m$ باشد، در این حالت تابع f در $x = a$ مشتق ناپذیر است و دلیل آن هم وجود نقطه گوشه‌ای در $x = a$ است.

$$f(x) = \sqrt[n]{(x-a)^m} \xrightarrow{m=n=\text{زوج}} f(x) = |x-a|$$

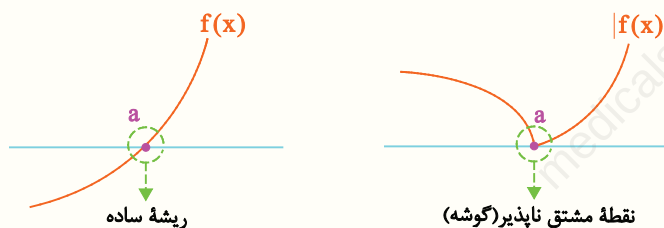


نکته اگر تابع $f(x) = \sqrt[n]{x-a}^m$; $(n > m)$, $(n \text{ فرد})$, در نقطه $x=a$ مشتق ناپذیر باشد، در این صورت با ضرب عامل صفرشونده $(x-a)$ در رادیکال، تابع f در نقطه $x=a$ مشتق پذیر خواهد شد.

به عنوان مثال، تابع $y = \sqrt[3]{x-2}$ در ریشه عبارت زیر رادیکال یعنی $x=2$ ، مشتق ناپذیر است، اما با ضرب عامل $(x-2)$ در رادیکال، این تابع به صورت $y = (x-2)^{\frac{1}{3}}(x-2)$ تبدیل شده و در نقطه $x=2$ مشتق پذیر خواهد شد.

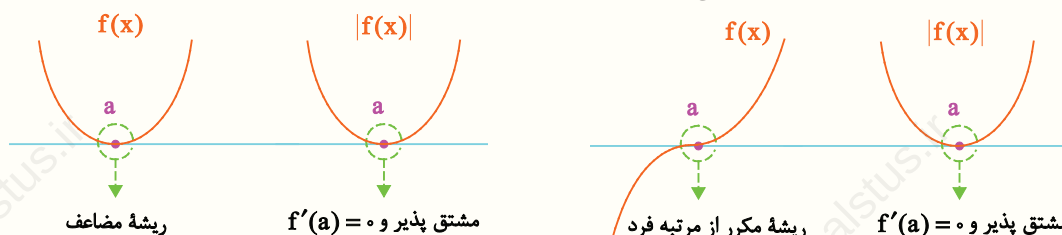
مشتق پذیری در توابع شامل قدرمطلق

در توابع قدرمطلق به فرم $f(x) = |g(x)|$ ، اگر $x=a$ ریشه عبارت داخل قدرمطلق فرض کنیم، داریم:
۱ اگر $x=a$ ریشه ساده عبارت داخل قدرمطلق باشد، در این صورت تابع f در $x=a$ ، مشتق ناپذیر است.



مثال: تابع $y = |3x-9|$ در $x=3$ مشتق ناپذیر است، چرا که $x=3$ ریشه ساده عبارت داخل قدرمطلق است.

۲ اگر $x=a$ ریشه مضاعف و یا ریشه مکرر از مرتبه فرد برای عبارت داخل قدرمطلق باشد، در این صورت تابع f در $x=a$ ، مشتق پذیر بوده و مقدار مشتق آن در این نقطه برابر صفر است. به عبارتی $f'(a) = 0$ است.



مثال: در تابع $y = |x^2 + 6x + 9|$ داریم:

تابع در $x = -3$ مشتق پذیر است، چرا که این نقطه، ریشه مضاعف عبارت داخل قدرمطلق است
 $y = |x^2 + 6x + 9| = |(x+3)^2| \Rightarrow$
بعضی ها هم به جور دیگه به داستان نگاه می کنند و میگویند که:

تابع f در $x=a$ مشتق ناپذیر است $\Rightarrow n=1$: $f(x) = |(x-a)^n|$, $(n \in \mathbb{N})$
تابع f در $x=a$ مشتق پذیر است و مقدار مشتق در آن برابر صفر است $\Rightarrow n \neq 1$

توجه در حالت کلی اگر $x=a$ ریشه عبارت داخل قدرمطلق باشد، برای بررسی مشتق پذیری تابع f در $x=a$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع را در این نقطه محاسبه کرده و سپس در مورد مشتق پذیری تابع f اظهار نظر می کنیم.

نکته در توابع قدرمطلق به فرم $f(x) = |g(x)|$ ، اگر $x=a$ ، هم ریشه عبارت داخل قدرمطلق (یعنی $g(x)$) و هم ریشه عبارت پشت قدرمطلق (یعنی $h(x)$) باشد، (به عبارتی $g(a) = h(a) = 0$) تابع f در $x=a$ ، مشتق پذیر است و این به خاطر ضریب صفرشونده در $x=a$ است که در پشت $|g(x)|$ قرار دارد.

مشتق پذیری توابع شامل جزء صحیح

تابع $f(x) = [g(x)]$ مفروض است:

۱ اگر عبارت درون براکت (یعنی $g(x)$) به ازای $x=a$ برابر عدد صحیح بشود ($g(a) \in \mathbb{Z}$)، آنگاه تابع f در $x=a$ ، ممکن است ناپیوسته و مشتق ناپذیر باشد. در این صورت عبارت داخل براکت یعنی $g(x)$ را ملاک قرار داده و وضعیت تابع f را با توجه به شرایط تابع $g(x)$ می سنجیم:



وضعیت تابع درون براکت ($g(x)$)	نمودار تابع $f(x)$ در اطراف $x = a$	توضیحات	نتیجه اخلاقی
در همسایگی $x = a$ ، اکیداً صعودی باشد.		حد راست تابع با مقدار تابع برابر است.	تابع f در $x = a$ پیوستگی راست و مشتق راست دارد و در این نقطه مشتق ناپذیر است.
در همسایگی $x = a$ ، اکیداً نزولی باشد.		حد چپ تابع با مقدار تابع برابر است.	تابع f در $x = a$ پیوستگی چپ و مشتق چپ دارد و در این نقطه مشتق ناپذیر است.
در $x = a$ دارای ماکزیمم نسبی به صورت $\wedge$ یا $\vee$ باشد.		تابع f در $x = a$ حد دارد.	تابع f در $x = a$ از هر دو طرف ناپیوسته بوده و مشتق چپ و راست ندارد و در این نقطه مشتق ناپذیر است.
در $x = a$ دارای مینیمم نسبی به صورت $\wedge$ یا $\vee$ باشد.		تابع f در $x = a$ پیوسته است.	تابع f در $x = a$ مشتق پذیر بوده و مقدار مشتق آن نیز در این نقطه برابر صفر است.

۲ اگر عبارت داخل براکت به ازای $x = a$ برابر عدد غیر صحیح شود ($g(a) \notin \mathbb{Z}$)، آن گاه تابع f در $x = a$ ، پیوسته و مشتق پذیر است و مقدار مشتق آن نیز در این نقطه برابر صفر است.

نکته اگر تابع $y=f(x)$ در همسایگی $x=a$ ، ناپیوسته باشد، در این صورت می توانیم کاری کنیم که این تابع در $x=a$ هم پیوسته و هم مشتق پذیر باشد به این صورت که:

اگر یک عامل صفرشونده در $x=a$ را در براکت ضرب کنیم، در این صورت تابع پیوسته خواهد شد.

به عنوان مثال تابع $y=[x-1]$ در $x=1$ ناپیوسته است ولی با ضرب یک عامل صفرشونده در $x=1$ مانند $(x-1)$ ، تابع مورد نظر پیوسته خواهد شد. پس تابع $y=(x-1)[x-1]$ در نقطه $x=1$ پیوسته است.

اگر بیشتر از یک عامل صفرشونده در $x=a$ را در براکت ضرب کنیم، در این حالت تابع به دست آمده مشتق پذیر هم خواهد شد. همان طور که در بالا هم دیدیم، تابع $y=[x-1]$ در نقطه $x=1$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است، حال اگر دو عامل صفرشونده در $x=1$ مانند $(x-1)^2$ را در براکت ضرب کنیم، تابع به دست آمده مشتق پذیر خواهد بود. بنابراین می توان گفت که تابع $y=(x-1)^2[x-1]$ در نقطه $x=1$ مشتق پذیر است.



این دفعه برای این که بهتر بتوانیم مقایسه کنیم، قوی جدول پایین به مثال خوب هم براتون آماده کردیم؛ امیدواریم که لذت کافی و وافعی رو ازش ببرید

ضابطه تابع	شکل تابع	وضعیت پیوستگی و مشتق پذیری در $x = 0$
ضرب دو عامل صفرشونده در $x = 0$ $(x \cdot x^2) \quad x = 0$		پیوسته مشتق پذیر
ضرب یک عامل صفرشونده در $x = 0$ $(x \cdot x) \quad x = 0$		پیوسته مشتق ناپذیر
ضابطه تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$		پیوسته مشتق پذیر
ضابطه تابع $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$		پیوسته مشتق ناپذیر
ضابطه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$		ناپیوسته مشتق ناپذیر



مشتق پذیری روی یک بازه



الف) تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است، هرگاه در هر نقطه از این بازه پیوسته و مشتق پذیر باشد.

ب) تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه:

۱ در بازه (a, b) پیوسته و مشتق پذیر باشد.

۲ در نقطه $x = a$ از راست پیوسته بوده و در این نقطه مشتق راست داشته باشد.

پ) تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه:

۱ در بازه (a, b) پیوسته و مشتق پذیر باشد.

۲ در نقطه $x = b$ از چپ پیوسته بوده و در این نقطه مشتق چپ داشته باشد.

ت) تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه:

۱ در بازه (a, b) پیوسته و مشتق پذیر باشد.

۲ در نقطه $x = a$ از راست پیوسته بوده و در این نقطه مشتق راست داشته باشد.

۳ در نقطه $x = b$ از چپ پیوسته بوده و در این نقطه مشتق چپ داشته باشد.

مشتق پذیری برخی از توابع خاص در مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$:

۱ توابع چند جمله‌ای به فرم $y = ax^n + bx^{n-1} + \dots$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیرند.

مثال: تابع $y = x^2 - 2x + 1$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

۲ برای این که تابع رادیکالی به فرم $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ در مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ مشتق پذیر باشد، برای عبارت درجه دوم زیر رادیکال، باید شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ برقرار باشد.

مثال: در تابع $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ ، چون در عبارت زیر رادیکال $a > 0$ و $\Delta < 0$ است، پس این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

۳ می‌دانیم که توابع گویا در ریشه‌های مخرج خود ناپیوسته و مشتق ناپذیرند. بنابراین یک تابع گویا به فرم $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ (که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ای هستند)، هنگامی در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است که مخرج کسر ریشه نداشته باشد.

حالت خاص: اگر مخرج کسر عبارتی از درجه دوم باشد، باید شرط $\Delta < 0$ برای آن برقرار باشد.

مثال: تابع $y = \frac{x-1}{2x^2 - 3x + 4}$ به دلیل این که Δ عبارت موجود در مخرج کسر منفی است، در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

۴ اگر بخواهیم تابع قدرمطلق به فرم $y = |ax^2 + bx + c|$ در مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ همواره مشتق پذیر باشد، باید عبارت درجه دوم داخل قدرمطلق، یا ریشه نداشته باشد (یعنی $\Delta < 0$) و یا این که ریشه مضاعف داشته باشد (یعنی $\Delta = 0$). پس در حالت کلی برای این که تابع مورد نظر در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد، باید برای عبارت داخل قدرمطلق، شرط $\Delta \leq 0$ برقرار باشد.

مثال: در تابع $y = |2x^2 - 4x + 2|$ ، به دلیل این که Δ عبارت داخل قدرمطلق برابر صفر است، لذا تابع در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است.

$$y = |2x^2 - 4x + 2| = |2(x-1)^2|$$

$$\Delta = 0$$

۵ برای این که یک تابع چندضابطه‌ای در مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ مشتق پذیر باشد، باید شرایط زیر را داشته باشد:

هر یک از ضابطه‌های آن در دامنه تعریف خود، پیوسته و مشتق پذیر باشند.

تابع در نقاط مرزی دامنه، پیوسته باشد.

مشتق چپ و راست تابع در نقاط مرزی دامنه، موجود (متناهی) و با هم برابر باشند.

مثال: در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \geq 2 \\ -x^2 + 3x - 1 & x < 2 \end{cases}$ داریم:

هر یک از ضابطه‌ها در دامنه تعریف خود پیوسته و مشتق پذیرند.

توجه: ضابطه بالا، یعنی $y = \frac{1}{x-1}$ در ریشه مخرج خود یعنی در $x=1$ ناپیوسته و مشتق ناپذیر است، اما با توجه به این که این نقطه در دامنه ضابطه بالا (یعنی $x \geq 2$) حضور ندارد، این ضابطه در دامنه تعریف خود پیوسته است.



تابع f در نقطه مرزی $x = 2$ پیوسته است.

مشتق چپ و راست تابع در نقطه $x = 2$ موجود و با هم برابرند.

پس نتیجه می گیریم که تابع f در مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است.

دامنه تابع مشتق

دامنه تابع مشتق مجموعه طول تمام نقاطی از تابع f است که تابع در آن نقاط مشتق پذیر است.

تعیین دامنه تابع مشتق $(D_{f'})$:

برای تعیین دامنه تابع مشتق، ابتدا دامنه تابع f را به دست می آوریم و سپس طول نقاط مشتق ناپذیر تابع را از آن حذف می کنیم. به عبارت دیگر:

$$D_{f'} = D_f - \{f \text{ طول نقاط مشتق ناپذیر تابع}\}$$

دامنه مشتق برخی از توابع خاص رو توی یه جدولی براون آماده کردیم، ببینید و لذتش رو ببرید:

تابع	فرم	دامنه تابع f	دامنه تابع f'
چند جمله ای ها	$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots$	$D_f = \mathbb{R}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
گویا	$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ (g, h چند جمله ای هستند)	$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$	$D_{f'} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های مخرج}\}$
رادیکال با فرجه زوج	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$	$D_{f'} = D_f - \{\text{طول نقاط مشتق ناپذیر}\}$
رادیکال با فرجه فرد	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	$D_f = D_g$	$D_{f'} = D_f - \{\text{طول نقاط مشتق ناپذیر}\}$
قدر مطلق	$f(x) = g(x) $	$D_f = \mathbb{R}$	$D_{f'} = \mathbb{R} - \{\text{ریشه های ساده عبارت داخل قدر مطلق}\}$
جزء صحیح	$f(x) = [g(x)]$	$D_f = \mathbb{R}$	$D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{ \begin{array}{l} \text{طول نقاطی که عبارت داخل} \\ \text{براکت را صحیح می کند به جز} \\ \text{طول نقاط مینیمم نسبی تابع } g \end{array} \right\}$

آقا! تابع چند ضابطه ای رو به ما نگفتی! آهه! تابع ما چند ضابطه ای بود چیکار کنیم؟! بیا تا بهت بگم!

برای به دست آوردن دامنه تابع مشتق در توابع چند ضابطه ای، مراحل زیر را انجام می دهیم:

(۱) نقاط مشتق ناپذیری هر یک از ضابطه ها را به صورت جداگانه به دست می آوریم.

(۲) مشتق پذیری تابع را در نقطه مرزی بررسی کرده و در صورت مشتق ناپذیر بودن تابع در نقطه مرزی، این نقطه را به جمع نقاط مشتق ناپذیر تابع اضافه می کنیم.

(۳) دامنه تابع f را مشخص کرده و نقاط مشتق ناپذیر مراحل ۱ و ۲ را از درون آن حذف می کنیم.

نمودار تابع مشتق

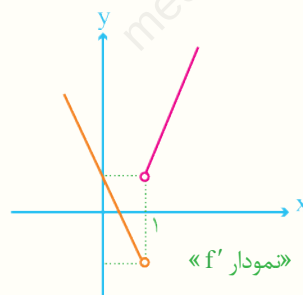
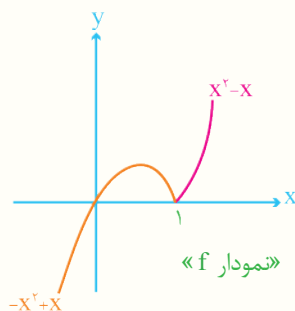
با داشتن ضابطه تابع f ، به راحتی می توان نمودار تابع مشتق آن را رسم کرد به این صورت که ابتدا از تابع f مشتق می گیریم و سپس نمودار تابع به دست آمده را رسم می کنیم فقط باید حواسمان باشد نقاطی که تابع f در آن نقاط مشتق ناپذیر است، جزو دامنه تابع مشتق نیستند.

مثال: می خواهیم نمودار تابع مشتق $f(x) = x|x-1|$ را رسم کنیم:

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت زیر بازنویسی کرده و از آن مشتق می گیریم:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) & x \geq 1 \\ -x(x-1) & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ -x^2 + x & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{f'} f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 1 \\ -2x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

می دانیم توابع قدر مطلق در ریشه ساده عبارت داخل قدر مطلق مشتق ناپذیرند بنابراین این نقطه $(x=1)$ عضوی از دامنه تابع مشتق نیست و به همین خاطر علامت تساوی را در ضابطه تابع مشتق برداشته ایم. البته این موضوع را با رسم تابع $f(x)$ نیز می توان فهمید، چرا که تابع در نقطه $x=1$ گوشه بوده و مشتق ناپذیر است، ببینید:

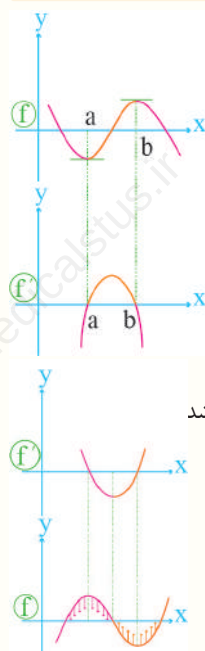


اما بعضی وقت‌ها به جای این‌که ضابطه تابع را به ما بدهند، نمودار تابع f را در سؤال به ما می‌دهند و از ما نمودار تابع f' را می‌خواهند و گاهی هم برعکس؛ یعنی نمودار تابع f' را می‌دهند و درباره نمودار تابع f می‌پرسند، پس در این مواقع با دو حالت مواجه می‌شویم:

حالت اول: نمودار تابع f را می‌دهند و نمودار تابع f' را می‌خواهند که در این حالت توجه به دو نکته زیر ضروری است:

۱- نقاطی که تابع f در آن‌ها مشتق ناپذیر است (که عبارتند از نقاط ناپیوستگی، نقاط گوشه، نقاط عطف عمودی و نقاط بازگشتی) در نمودار تابع f' به صورت ناپیوستگی ظاهر می‌شوند و تابع f' در این نقاط مقدار هم نخواهد داشت، چند تا نمونه با هم ببینیم ...

نمودار f'	نمودار f



- در بازه‌هایی که نمودار تابع f ، اکیداً صعودی باشد نمودار تابع f' در آن فاصله، بالای محور x ها قرار دارد.
- در بازه‌هایی که نمودار تابع f ، اکیداً نزولی باشد نمودار تابع f' در آن فاصله، پایین محور x ها قرار دارد.
- در نقاطی که خط مماس بر نمودار تابع f به صورت افقی باشد، نمودار تابع f' در آن نقاط محور x ها را قطع می‌کند.

- حالت دوم:** نمودار تابع f' را می‌دهند و نمودار تابع f را می‌خواهند که در این حالت نکات زیر می‌تواند بسیار کمک کننده باشد
- در بازه‌هایی که نمودار تابع f' صعودی است، گودی نمودار تابع f به سمت بالا است.
 - در بازه‌هایی که نمودار تابع f' نزولی است، گودی نمودار تابع f به سمت پایین است.
 - در نقاطی که خط مماس بر نمودار تابع f' به صورت افقی باشد، جهت گودی، عوض می‌شود.
 - در نقاطی که نمودار تابع f' محور x ها را قطع کند، نمودار تابع f در آن نقاط اکسترمم نسبی خواهد داشت.



یه سورپرایز (شفقتانه) خفج توی جدول پایین منتظره! کلی از ویژگی‌های توابع پرکاربرد رو توی این جدول لیست کردیم براتون، نوش جونتون

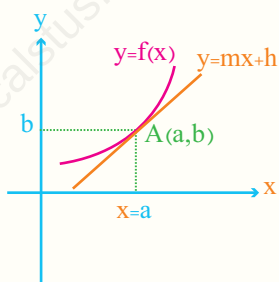
تابع	تابع مشتق	دامنه تابع	دامنه تابع مشتق	نمودار f	نمودار f'
$f(x) = C$ ($C \in \mathbb{R}$)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		
$f(x) = ax + b$ ($a > 0$)	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		
$f(x) = ax + b$ ($a < 0$)	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)	$f'(x) = 2ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		
$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)	$f'(x) = 2ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$		
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$		
$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R}$		



		$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
		$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$	$f(x) = x $
		$\mathbb{R} - \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \begin{cases} \text{وجود ندارد} & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$	$f(x) = [x]$

معادله خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای روی منحنی

با توجه به شکل مقابل، اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = a$ مشتق پذیر بوده و خط به معادله $y = mx + h$ در این نقطه بر تابع f مماس باشد آن گاه داریم:



۱. نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر آن در نقطه A ، مختصات یکسانی دارند به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} f(a) = b \\ ma + h = b \end{cases} \Rightarrow f(a) = ma + h$$

۲. شیب خط مماس بر منحنی (یعنی m)، با مشتق تابع f در نقطه $x = a$ برابر است یعنی:

$$m = f'(a)$$

۳. معادله تلاقی (معادله برخورد) خط $y = mx + h$ با منحنی $y = f(x)$ ، ریشه مضاعف خواهد داشت:

$$f(x) = mx + h \quad (\text{این معادله ریشه مضاعف دارد})$$

می‌دانیم یکی از روش‌هایی که برای نوشتن معادله یک خط به کار می‌رود این است که شیب آن خط و مختصات یک نقطه از خط را داشته باشیم پس با داشتن موارد گفته شده، برای به دست آوردن معادله خط مماس بر منحنی تابع f ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله ۱: شیب خط مماس را به دست می‌آوریم، می‌دانیم که شیب خط مماس بر منحنی در نقطه تماس با مشتق تابع f در آن نقطه برابر است به عبارت دیگر:

$$m = f'(a) = \text{شیب خط مماس}$$

مرحله ۲: با داشتن شیب خط مماس و مختصات نقطه تماس (یعنی $A(a, b)$)، معادله خط مماس را تشکیل می‌دهیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - b = f'(a)(x - a)$$

$$f'(a)$$

$$y = f'(a)(x - a) + b \quad \text{معادله خط مماس}$$



نکته اگر شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $x=a$ برابر صفر باشد ($f'(a) = 0$) در این صورت:

خط مماس بر منحنی تابع به صورت افقی است.

معادله خط مماس بر منحنی به صورت $y=f(a)$ می باشد.

نکته اگر شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $x=a$ نامتناهی باشد، در این صورت:

خط مماس بر منحنی تابع به صورت قائم است.

معادله خط مماس بر منحنی به صورت $x=a$ می باشد.

نکته اگر منحنی توابع f و g ، در نقطه ای به طول $x=a$ بر هم مماس باشند در این صورت:

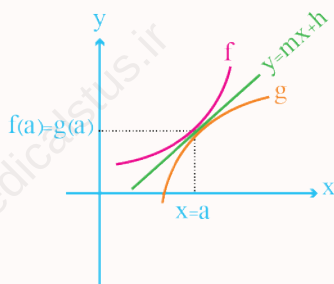
(۱) هر دو تابع در $x=a$ مقدار برابری دارند به عبارتی:

$$f(a) = g(a)$$

(۲) هر دو تابع در $x=a$ مماس مشترک دارند بنابراین شیب خط مماس بر نمودار هر دو تابع، در این

نقطه با هم برابر است به عبارتی:

$$f'(a) = g'(a) = m$$



آهنگ تغییر

آهنگ متوسط تغییر: با توجه به شکل مقابل می توان گفت که آهنگ متوسط تغییر تابع f ، با شیب خطی که دو نقطه A و B را به هم وصل می کند (شیب خط قاطع یا شیب خط واصل باشد) برابر است.

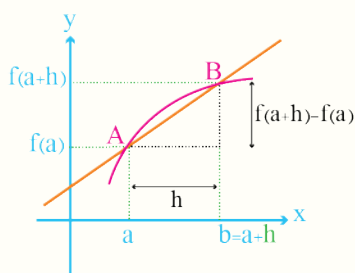
$$\text{شیب خط قاطع} = \tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

بنابراین آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a, b]$ برابر است با:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

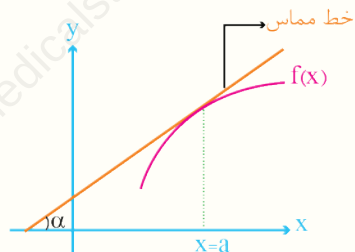
بعضی مواقع به جای عبارت «آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a, b]$ » از عبارت «آهنگ متوسط تغییر تابع f در $x=a$ به ازای نمو h » استفاده می شود که در این مواقع کافی است b را برابر $a+h$ در نظر بگیریم، یعنی:

$$b = a + h \Rightarrow \text{میزان نمو یا مقدار رشد}$$



$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ به ازای نمو } h = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

این همون فرمول قبله ولی با یه فرم و شکل دیگه و نمی خواد چیز جدیدی رو الکی توی ذهنت وارد کنی فقط کافیه که توی سؤال ها بلد باشی $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ رو به دست یاری همین!



آهنگ لحظه ای تغییر (آهنگ آنی تغییر): آهنگ لحظه ای تغییر تابع f در $x=a$ بنا به تعبیر هندسی، با شیب خط مماس بر نمودار تابع f در آن نقطه برابر است و از طرفی می دانیم که شیب خط مماس در نقطه $x=a$ با مقدار مشتق تابع در آن نقطه برابر است، پس مطابق شکل مقابل داریم:

$$\text{آهنگ لحظه ای تغییر تابع } f \text{ در } x=a = \text{شیب خط مماس} = \tan \alpha = f'(a)$$

بنابراین آهنگ لحظه ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$ برابر است با: $f'(a)$



کاربرد مشتق در فیزیک



یکی از کاربردهای مشتق در فیزیک در بحث حرکت شناسی است، کتاب درسی در این مبحث، فقط به بررسی مفهوم سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای متحرک پرداخته است بنابراین ما هم به همین مقدار بسنده می‌کنیم:

حال اگر معادله مکان - زمان متحرکی را به صورت $x = f(t)$ در اختیار داشته باشیم، داریم:

(۱) برای پیدا کردن **سرعت متوسط** این متحرک در بازه $[t_1, t_2]$ کافی است آهنگ متوسط تغییر تابع (تابع ما در این جا معادله مکان - زمان است) را در بازه $[t_1, t_2]$ به دست آوریم:

$$V_{\text{متوسط}} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

(۲) برای محاسبه **سرعت لحظه‌ای** این متحرک در لحظه t ، باید آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع را در لحظه t به دست بیاوریم به این صورت که از ضابطه داده شده (معادله مکان - زمان) مشتق گرفته و لحظه t را جایگذاری می‌کنیم:

$$V_{\text{لحظه‌ای}} = f'(t)$$

نکته اگر متحرکی پس از طی مسافتی **متوقف** شود، سرعت لحظه‌ای آن متحرک برابر **صفر** خواهد بود.



فصل ۷: کاربرد مشتق

میدونیم که توابع رابطه‌هایی که برای پیش‌بینی و بررسی رفتار یک پدیده تعریف میشن الان می‌خوایم بدونیم این همه مشتق گرفتیمو قیافه تابع رو بهم ریختیم برای چی بود؟!

اصلاً چرا ما این بلارو سر به تابع میاریم؟!

یکی از دلایلش پیدا کردن نقاطی از تابعه که مقدار تابع تو اون نقطه بیشترین یا کمترین مقدار بشه تا بتونیم براش برنامه‌ریزی کنیم، به این کار می‌گن بهینه‌سازی به تابع. مثلاً فرض کن به کارخونه داری که می‌خوای سودش رو بیشترین حالت ممکن کنی یا هزینه‌هاش رو به کمترین حد ممکن برسونی، باید اول براش به تابع تعیین کنی که رفتارش رو پیش‌بینی کنه بعد به کمک مشتق و کاربرد مشتق، پیدا میکنیم که متغیر باید چجوری باشه تا سود یا هزینه بهینه بشه. خیلی باحال و کاربردی خیسلی! برو که رفتیم...

لنگور سراسری	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ - نوبت اول	۱۴۰۲ - نوبت دوم
تعداد سؤال	صفر	۳	۲	۲	۲
مباحث مطرح شده در سؤال	—	یکنواپی (۲ سؤال) اکسترمم نسبی	رسم نمودار توابع اکسترمم نسبی	نقطه بحرانی بهینه‌سازی	بهینه‌سازی نقطه عطف



بررسی یکنوایی تابع

بررسی یکنوایی توابع به کمک مشتق (در حالت کلی)

فرض کنید که تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد در این صورت به ازای هر x در بازه (a, b) ، داریم:

✓ اگر $f'(x) > 0$ باشد، آن گاه تابع f در بازه $[a, b]$ ، اکیداً صعودی است.

✓ اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، آن گاه تابع f در بازه $[a, b]$ ، صعودی است.

✓ اگر $f'(x) < 0$ باشد، آن گاه تابع f در بازه $[a, b]$ ، اکیداً نزولی است.

✓ اگر $f(x) \leq 0$ باشد، آن گاه تابع f در بازه $[a, b]$ ، نزولی است.

✓ اگر $f'(x) = 0$ باشد، آن گاه تابع f در بازه $[a, b]$ ، تابعی ثابت (هم صعودی و هم نزولی) است.

با توجه به موارد فوق می توان گفت که برای مشخص کردن بازه های مربوط به صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق پذیر f ، کافی است که مراحل زیر را طی کنیم:

- دامنه تابع f را تعیین می کنیم.
- از تابع f مشتق گرفته و با رسم جدول تغییرات تابع، مشتق را تعیین علامت می کنیم.
- در نهایت به کمک جدول تغییرات تابع، رفتار تابع را از لحاظ صعودی یا نزولی بودن، مشخص می کنیم.

نکته اگر در یک بازه، $f'(x)$ به ازای تعداد متناهی نقطه (یک یا چند نقطه) برابر صفر باشد، تابع f همچنان اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) است اما اگر به ازای نامتناهی نقطه (مثلاً در یک یا چند بازه) مشتق برابر صفر باشد دیگر نمی توان لفظ اکید را برای آن به کار برد.

یکنوایی چند تابع خاص

بررسی یکنوایی توابع دوضابطه ای

بررسی یکنوایی توابع کسری

بررسی یکنوایی تابع درجه سوم

بررسی یکنوایی تابع درجه سوم

برای بررسی یکنوایی توابع درجه سوم به فرم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، ابتدا از تابع مورد نظر مشتق گرفته و داریم:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$a > 0$	$f'(x) \geq 0$	f اکیداً صعودی باشد
$\Delta_{f'} \leq 0$		
$a < 0$	$f'(x) \leq 0$	f اکیداً نزولی باشد
$\Delta_{f'} \leq 0$		

در حالت کلی، اگر f تابعی چندجمله ای و غیر ثابت باشد، به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، داریم:

✓ اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، آن گاه تابع f ، اکیداً صعودی است.

✓ اگر $f'(x) \leq 0$ باشد، آن گاه تابع f ، اکیداً نزولی است.

بررسی یکنوایی توابع کسری

می دانیم که توابع کسری در ریشه های مخرج خود، ناپیوسته اند بنابراین در این نوع از توابع، اگر عبارت مخرج کسر ریشه داشته باشد (البته ریشه مخرجی که با صورت کسر ساده نشده) در این صورت آن تابع کسری در بازه هایی که شامل ریشه مخرج باشد، غیر یکنوا است (یعنی توی اون بازه هایی که ریشه مخرج رو دارن نه صعودیه و نه نزولی).

بررسی یکنوایی توابع دوضابطه ای

با توجه به جدول زیر برای بررسی یکنوایی توابع دوضابطه ای به فرم $y = \begin{cases} f(x) & ; x \geq a \\ g(x) & ; x < a \end{cases}$ داریم:

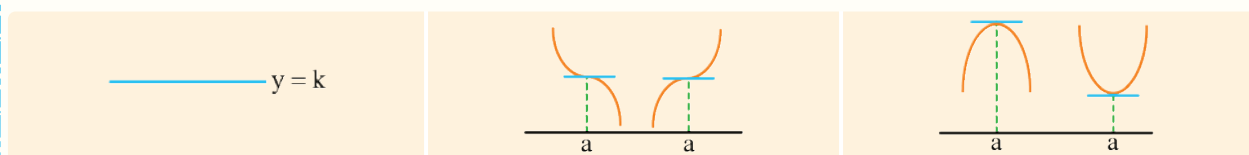


تابع صعودی باشد	تابع نزولی باشد
$f'(x) \geq 0$	$f'(x) \leq 0$
$g'(x) \geq 0$	$g'(x) \leq 0$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$

نقطه بحرانی

تعریف

هرگاه در نقطه‌ای به طول $x = a$ ، $f'(a)$ برابر صفر باشد و یا $f'(a)$ موجود نباشد، در این صورت، نقطه $(a, f(a))$ را نقطه بحرانی تابع f می‌نامیم. به بیان دیگر، اگر تابع f در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، نقاط بحرانی این تابع عبارتند از: **الف)** نقاط ابتدا و انتهای بازه (یعنی نقاطی به طول $x = a$ و $x = b$) **ب)** نقاطی که مشتق تابع در آن‌ها برابر صفر است.



ج) نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق ناپذیر است.

نقاط عطف عمودی	نقاط بازگشتی	نقاط گوشه‌ای	نقاط ناپیوستگی

توجه کنید که نقطه بحرانی عضوی از دامنه تابع است، بنابراین نقاطی که عضوی از دامنه تابع نیستند، جزو نقاط بحرانی به حساب نمی‌آیند.

تعیین نقاط بحرانی به کمک رسم نمودار

بهترین راهکار برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع، رسم نمودار آن تابع است. به این صورت که ابتدا با توجه به ضابطه و البته دامنه تابع، نمودار آن را رسم کرده و سپس از روی نمودار، نقاط بحرانی تابع را مشخص می‌کنیم.

تعیین نقاط بحرانی در توابع چندجمله‌ای

در توابع چندجمله‌ای به فرم $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + c$ ، طول نقاط بحرانی از حل معادله $f'(x) = 0$ به دست می‌آیند.

تعیین نقاط بحرانی در توابع رادیکالی

در توابع رادیکالی به فرم $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ (n می‌تونه زوج باشه یا فرد باشه)، با فرض مشتق پذیر بودن تابع g ، طول نقاط بحرانی، از حل معادله‌های $g'(x) = 0$ و $g(x) = 0$ به دست می‌آید.

تعیین نقاط بحرانی در توابع قدرمطلق

الف) در توابع قدرمطلق به فرم $y = |f(x)|$ ، با فرض مشتق پذیر بودن تابع f ، طول نقاط بحرانی از حل معادله‌های $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ به دست می‌آیند.

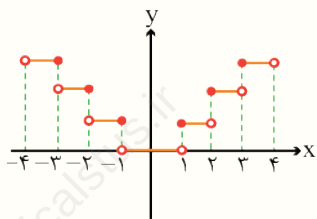
ب) در توابع قدرمطلق به فرم $y = g(x)|f(x)|$ ، با فرض مشتق پذیر بودن توابع f و g ، طول نقاط بحرانی از حل معادله‌های $f(x) = 0$ و به دست $(g(x)f(x))' = 0$ به دست می‌آیند.



تعیین نقاط بحرانی در توابع براکتی

در توابع براکتی به فرم $f(x) = [g(x)]$ ، هر نقطه‌ای که از دامنه تابع انتخاب کنیم، یک نقطه بحرانی است، چرا؟ یا دلیلش رو بهت بگم...
اگر عبارت داخل براکت به ازای $x = a$ برابر عدد صحیحی باشد $(g(a) \in \mathbb{Z})$ ، در این صورت تابع f در نقطه مورد نظر ناپیوسته است و آن نقطه جزو نقاط مشتق ناپذیری تابع بوده و در نتیجه یک نقطه بحرانی است.

اگر عبارت داخل براکت به ازای $x = a$ برابر عدد غیر صحیحی باشد $(g(a) \in \{\mathbb{R} - \mathbb{Z}\})$ ، در این صورت تابع f در نقطه مورد نظر پیوسته است، اما شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه (چون مشتق خودمون توی او نقطه) برابر صفر بوده و در نتیجه آن نقطه نیز یک نقطه بحرانی است به عنوان مثال، $y = [x]$ را در نظر بگیرید:



$$y = [x] = \begin{cases} [x] & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تعیین نقاط بحرانی در توابع کسری

در توابع کسری فرم $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ (که در آن $g(x)$ و $h(x)$ هر تابعی می‌تونن باشند) برای تعیین طول نقاط بحرانی به روش زیر عمل می‌کنیم:
ابتدا دامنه تابع f را پیدا می‌کنیم.

سپس $f'(x)$ را محاسبه کرده و پس از مخرج مشترک گیری (در صورت لزوم)، ریشه‌های صورت و مخرج آن را به دست می‌آوریم.
در نهایت از بین ریشه‌های صورت و مخرج $f'(x)$ ، آن‌هایی که عضو دامنه تابع باشند به عنوان طول نقاط بحرانی معرفی می‌کنیم.
توجه داشته باشید که ریشه‌های صورت $f'(x)$ ، طول نقاطی هستند که مشتق در آن‌ها برابر صفر است و ریشه‌های مخرج $f'(x)$ نیز طول نقاطی هستند که تابع f در آن نقاط مشتق ناپذیر است.

تعیین نقاط بحرانی در توابع چندضابطه‌ای

برای پیدا کردن طول نقاط (نقاط) بحرانی در توابع چندضابطه‌ای به روش زیر عمل می‌کنیم:
۱ ابتدا طول نقاط بحرانی هر یک از ضابطه‌ها را در دامنه تعریف خود به صورت جداگانه به دست می‌آوریم. (فقط دقت کن که طول نقطه بحرانی هر یک از ضابطه‌ها باید توی دامنه اون ضابطه حضور داشته باشه)
۲ پیوستگی و مشتق پذیری را در نقاط مرزی دامنه بررسی می‌کنیم و در صورتی که تابع در نقطه (نقاط) مرزی دامنه خود یکی از شرایط زیر را داشته باشد، آن نقطه را به عنوان نقطه بحرانی معرفی می‌کنیم.
ناپیوسته باشد. مشتق ناپذیر باشد. مشتق چپ و راست هر دو موجود و برابر صفر باشند.

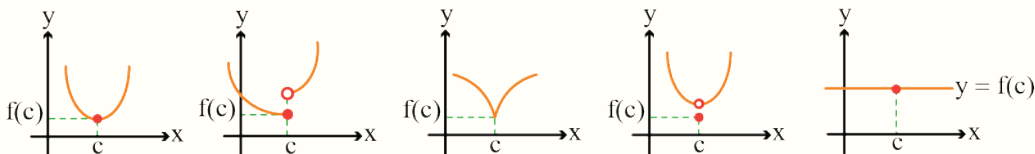
اکسترم های نسبی تابع

پیدا کردن نقاط اکسترم نسبی توابع پیوسته

تعریف

تعریف

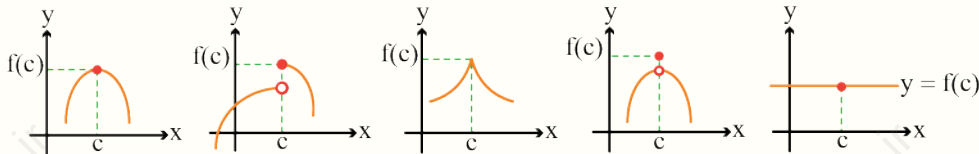
۱ فرض کنید تابع f در بازه (a, b) تعریف شده باشد در این صورت نقطه به طول $x = c$ ($c \in (a, b)$) را طول نقطه مینیمم نسبی تابع f می‌گوییم، هرگاه:
تابع f در همسایگی نقطه $x = c$ تعریف شده باشد.
به عبارت دیگر، اگر تابع f در یک همسایگی از نقطه $x = c$ تعریف شده باشد و در آن همسایگی $f(c) \leq f(x)$ باشد، در این صورت، $x = c$ را طول نقطه مینیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.





۲ فرض کنید تابع f در بازه (a, b) تعریف شده باشد، در این صورت نقطه به طول $x = c$ ($c \in (a, b)$) را طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم، هرگاه:
 ✓ تابع f در همسایگی نقطه $x = c$ تعریف شده باشد.

✓ تابع f در نقطه $x = c$ نسبت به همسایه‌های خود مقدار بیشتری داشته باشد.
 به عبارت دیگر، اگر تابع f در یک همسایگی از نقطه $x = c$ تعریف شده باشد و در آن همسایگی $f(c) \geq f(x)$ باشد، در این صورت $x = c$ را طول نقطه ماکزیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع f می‌گوییم.

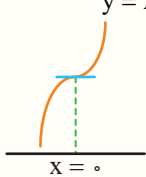


حالا چند تا نکته پایری رو داشته باش...

✓ اگر تابع f در نقطه به طول $x = c$ ماکزیمم نسبی و یا مینیمم نسبی داشته باشد، در این صورت می‌گوییم که تابع f در $x = c$ دارای اکسترمم نسبی است.

✓ در توابع ثابت به فرم $f(x) = k$, ($k \in \mathbb{R}$)، هر نقطه‌ای که از دامنه تابع انتخاب کنیم، هم مینیمم نسبی و هم ماکزیمم نسبی است.
 ✓ نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف تابع، نمی‌توانند نقطه مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی باشند چرا که تابع حداقل در یکی از همسایگی‌های این دو نقطه تعریف نمی‌شود. (یادته که یکی از شرط‌های نقاط اکسترمم نسبی این بود که تابع در همسایگی اون نقطه تعریف شده باشه)

✓ اگر تابع f در نقطه $x = c$ ماکزیمم نسبی و یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c) = 0$ موجود باشد در این صورت $f'(c) = 0$
 است، به عبارت دیگر می‌توان گفت که هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی است، اما لزوماً هر نقطه بحرانی تابع، نقطه اکسترمم نسبی نمی‌باشد. به عنوان مثال، تابع $y = x^3$ را در نظر بگیرید، تابع مشتق این تابع به صورت $f'(x) = 3x^2$ است و با وجود اینکه مقدار $f'(x)$ در $x = 0$ برابر صفر است، اما با توجه به نمودار آن، کاملاً مشخص است که $x = 0$ طول نقطه بحرانی تابع است ولی این نقطه نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی است، پس لزوماً هر نقطه بحرانی، نقطه اکسترمم نسبی نیست.



پیدا کردن نقاط اکسترمم نسبی توابع پیوسته (به کمک آزمون مشتق اول)

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم نسبی یک تابع پیوسته مانند f ، به روش زیر عمل می‌کنیم:

✓ ابتدا طول نقاط بحرانی تابع f را به دست می‌آوریم. (البته به جز نقاط سروته بازه! چرا که توی این دو نقطه شرط همسایگی برقرار نیست.)

✓ سپس به کمک رسم جدول تغییرات، تابع مشتق (f') را تعیین علامت می‌کنیم.

حالا توی جدول تعیین علامت تابع مشتق، سه حالت ممکنه اتفاق بیفته...

حالت اول: اگر علامت تابع مشتق در اطراف $x = c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی است. به عبارت دیگر، اگر تابع f قبل از $x = c$ صعودی و بعد از آن نزولی باشد، در این صورت تابع f ماکزیمم نسبی دارد.

مثال نموداری	جدول تغییرات						
	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$x = c$</td></tr> <tr> <td>f'</td><td>$\begin{matrix} + & \circ & - \end{matrix}$</td></tr> <tr> <td>$f$</td><td>$\begin{matrix} \nearrow & \text{max} & \searrow \end{matrix}$</td></tr> </table>	x	$x = c$	f'	$\begin{matrix} + & \circ & - \end{matrix}$	f	$\begin{matrix} \nearrow & \text{max} & \searrow \end{matrix}$
x	$x = c$						
f'	$\begin{matrix} + & \circ & - \end{matrix}$						
f	$\begin{matrix} \nearrow & \text{max} & \searrow \end{matrix}$						

حالت دوم: اگر علامت تابع مشتق در اطراف $x = c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطه مینیمم نسبی است. به عبارت دیگر، اگر تابع f قبل از $x = c$ نزولی و بعد از آن صعودی باشد، در این صورت تابع f در این نقطه مینیمم نسبی دارد.

مثال نموداری	جدول تغییرات						
	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$x = c$</td></tr> <tr> <td>f'</td><td>$\begin{matrix} - & \circ & + \end{matrix}$</td></tr> <tr> <td>$f$</td><td>$\begin{matrix} \searrow & \text{min} & \nearrow \end{matrix}$</td></tr> </table>	x	$x = c$	f'	$\begin{matrix} - & \circ & + \end{matrix}$	f	$\begin{matrix} \searrow & \text{min} & \nearrow \end{matrix}$
x	$x = c$						
f'	$\begin{matrix} - & \circ & + \end{matrix}$						
f	$\begin{matrix} \searrow & \text{min} & \nearrow \end{matrix}$						

حالت سوم: اگر علامت تابع مشتق در اطراف $x = c$ تغییر نکند، آن‌گاه $x = c$ طول نقطه اکسترمم نسبی نیست.



مثال نموداری

The graph shows a function with two local minima at $x=c$. The function is U-shaped, and a vertical dashed line marks $x=c$ at the bottom of the curve.

جدول تغییرات

x	$x = c$	x	$x = c$
f'	- 0 -	f'	+ 0 +
f	↘ ↗	f	↗ ↘

توجه کنید که در برخی از سوالات، بدون استفاده از این روش و تنها به کمک رسم نمودار تابع می توان نقاط اکسترمم تابع را مشخص کرد.

نکته اگر نقطه A به مختصات $A(a,b)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد، آن گاه:

مختصات این نقطه در ضابطه تابع f صدق می کند، یعنی $f(a) = b$

مشتق تابع f در نقطه $x = a$ برابر صفر است، یعنی $f'(a) = 0$

نکته حالت خاص: اگر نقطه $A(a,b)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، آن گاه:

مختصات این نقطه در ضابطه تابع f صدق می کند، یعنی $\frac{f(a)}{g(a)} = b$

مختصات این نقطه در هویتال تابع هم صدق می کند، یعنی $\frac{f'(a)}{g'(a)} = b$

نکته اگر $y = k$ عرض نقطه اکسترمم نسبی تابع f باشد، در این صورت، خط $y = k$ بر نمودار تابع f مماس بوده و معادله تلاقی $f(x) = k$ ، ریشه مضاعف خواهد داشت، حال اگر معادله $f(x) - k = 0$ از درجه دوم باشد، برای این منظور باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\Delta = \frac{\text{عبارت صورت}}{\text{عبارت مخرج}}$$

نکته در توابع به فرم $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ ، حاصل ضرب عرض اکسترمم های نسبی تابع برابر است با:

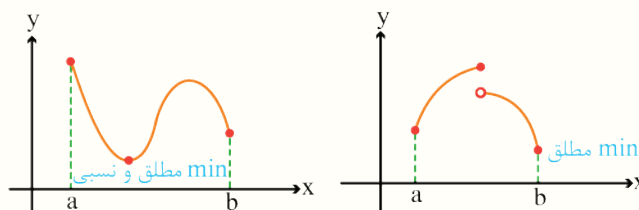
اکسترمم های مطلق تابع

پیدا کردن نقاط اکسترمم مطلق یک تابع در بازه $[a, b]$

تعریف

تعریف

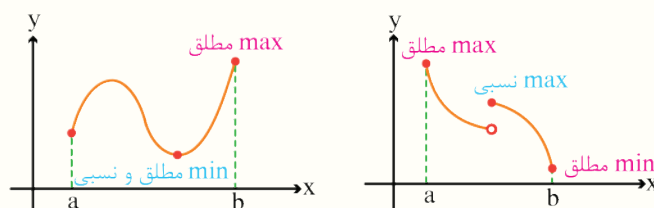
۱ فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد و $x = c$ در این بازه باشد. در این صورت به ازای هر x متعلق به این بازه، اگر $f(c) \leq f(x)$ باشد، آن گاه: $x = c$ را طول نقطه مینیمم مطلق و $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق تابع می نامیم. نقطه $(c, f(c))$ را نقطه مینیمم مطلق تابع f می گوئیم.



۲ فرض کنید تابع f در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد و $x = c$ در این بازه باشد، به ازای هر x متعلق به این بازه، اگر $f(c) \geq f(x)$ باشد، آن گاه:

$x = c$ را طول نقطه ماکزیمم مطلق و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع می نامیم.

نقطه $(c, f(c))$ را نقطه ماکزیمم مطلق تابع f می گوئیم.





پیدا کردن نقاط اکسترمم های مطلق یک تابع در بازه $[a, b]$

برای پیدا کردن نقاط اکسترمم مطلق تابع f در بازه $[a, b]$ به روش زیر عمل می کنیم:

- ۱ ابتدا طول نقاط بحرانی تابع f را به دست می آوریم. (امیدوارم یادت باشه که ابتدا و انتهای بازه بسته هم جزو نقاط بحرانی بودن)
- ۲ سپس مقدار تابع را به ازای طول نقاط بحرانی محاسبه می کنیم.
- ۳ در مرحله ۲، بزرگ ترین عدد به دست آمده را مقدار ماکزیمم مطلق و کوچک ترین آن ها را مقدار مینیمم مطلق تابع f می نامیم.

بهینه سازی

4

برای حل مسائل بهینه سازی به روش زیر عمل می کنیم:

- ۱ در صورت لزوم با توجه به اطلاعات مسئله شکل مناسبی برای مسئله رسم کرده و اطلاعات مسئله را روی آن سوار می کنیم.
- ۲ رابطه کمیتی که قرار است بهینه شود (مینیمم یا ماکزیمم شود) را به دست می آوریم.
- ۳ رابطه به دست آمده را به کمک روابط موجود در مسئله به یک رابطه تک متغیره تبدیل می کنیم.
- ۴ سپس طول نقاط بحرانی رابطه تک متغیره را به دست می آوریم.
- ۵ در نهایت مقدار رابطه تک متغیره را به ازای طول نقاط بحرانی آن محاسبه کرده و بیشترین مقدار یا کم ترین مقدار آن را (بستگی داره خواسته سوال

کدومش باشه!) پیدا می کنیم.

⚠️ خاطره بازی: امیدوارم فرمول های پاییر رو از سال های قبل با خود داشته باشی...

روابط مساحت

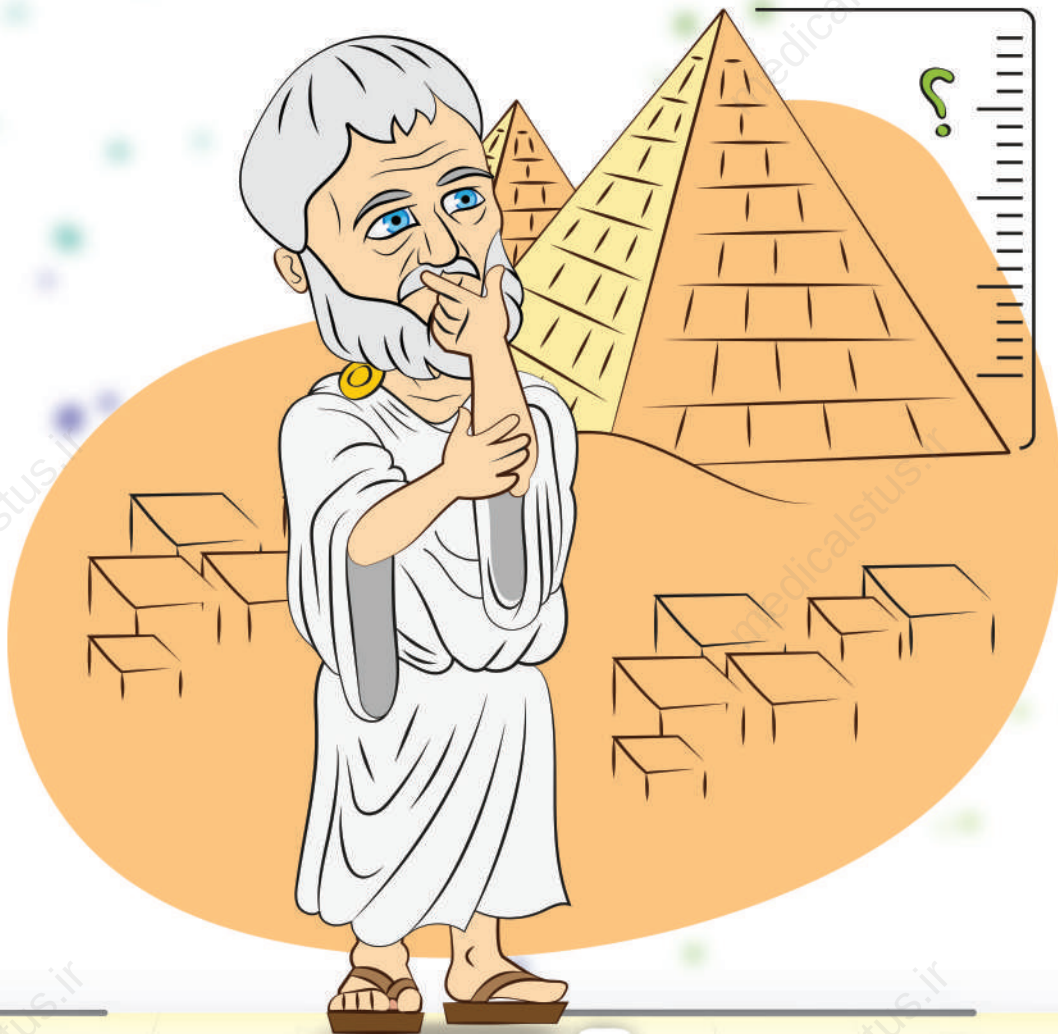
$S = \pi r^2$	$S = ab$	$S = a^2$	$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$S = \frac{1}{2} \times BC \times AH$

روابط حجم

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$	$V = \pi r^2 h$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$	$V = a^3$	$V = abc$



Lined area for writing notes, consisting of multiple horizontal blue lines.



فصل ۱: هندسه

و اما هندسه!

هندسه به شاخه از ریاضیات هستش که به بررسی نحوه قرارگیری اشکال در فضا (چرخش، دوران و ...)، ویژگی‌های یک شکل (دایره، بیضی و ...)، مقایسه اشکال (تشابه، تالاس و ...) و ... می‌پردازه. اما به بخش دیگه‌ای هم از هندسه هست که بهش هندسه تحلیلی (فاصله نقطه از نقطه یا از خط و ...) میگن و این یه ارتباطی بین هندسه و ریاضیات هستش. تسلط رو این بخش‌ها، نیاز به دید ریاضی و درک منطقی داره (که ما داریم اینو!) یعنی برای موفقیت توی این بخش، اولاً باید رابطه‌های ریاضی و محاسباتی و ویژگی‌های اشکال رو بشناسی، بعد با درک و دید هندسی (قوانین و قضیه‌های هندسی) به بررسی و دلیل آوردن (استدلال) برای حل یک مسئله بپردازی.

دانش آموزان سوالاتی هندسه رو وقت گیر و سخت می‌بینن (اتفاقاً این چن ساله، بعضی سؤالاتش اینی بودن) اما هر چی بیشتر هندسه رو کار کنی می‌تونی روش‌های ساده‌تری رو برای حل به سول پیدا کنی، پس براش وقت بزار و یادت باشه یادآوری نکات هندسه هشتم و نهم می‌تونه توی درک این بخش خیلی کمک‌کننده باشه.

هندسه، منتظر باش که اومدیم شاخو بشکنیم. 🌱

۱۴۰۲- نوبت دوم	۱۴۰۲- نوبت اول	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	کنکور سراسری
۴	۴	۳	۴	۳	تعداد سؤال
۱. قضیه تالاس و تشابه ۲. تشابه ۳. هندسه تحلیلی ۴. دایره	۱. قضیه تالاس و تشابه ۲. تشابه ۳. هندسه تحلیلی ۴. دایره	۱. هندسه تحلیلی ۲. قضیه تالاس ۳. بیضی	۱. قضیه تالاس ۲. هندسه تحلیلی (۲ سوال) ۳. دایره	۱. قضیه تالاس ۲. هندسه تحلیلی ۳. تشابه	مباحث مطرح شده در سؤال



مقدمات هندسه

زاویه	مثلث متساوی الساقین و ویژگی های آن	عمود منصف و ویژگی های آن	میان و ویژگی های آن	استدلال	قضیه
مثلث متساوی الساقین و ویژگی های آن	نیمساز و ویژگی های آن	ارتفاع و ویژگی های آن	مکان هندسی		

زاویه

جدول رو دریاپ ...

	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$	مجموع زاویه های داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰ درجه است.
	$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_3 \\ \hat{O}_2 = \hat{O}_4 \end{cases}$	زاویه های متقابل به رأس با هم برابرند.
	$\begin{cases} x = \beta + \gamma \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + \gamma \end{cases}$	در هر مثلث، هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاورش برابر است.
	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_3 = \hat{B}_1 = \hat{B}_3 \\ \hat{A}_2 = \hat{A}_4 = \hat{B}_2 = \hat{B}_4 \end{cases}$	اگر خط مورب d دو خط موازی l_1 و l_2 را قطع کند، آن گاه زاویه های حاده با هم و زاویه های منفرجه نیز با هم برابرند و بالعکس.
	$\alpha = \frac{ \hat{B} - \hat{C} }{2}$	در هر مثلث، زاویه بین نیمساز و ارتفاع متناظر به یک رأس، با نصف قدر مطلق تفاضل دو زاویه دیگر برابر است.
	$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$	در هر مثلث، زاویه روبه رو به ضلع بزرگ تر از زاویه روبه رو به ضلع کوچک تر، بزرگ تر است و بالعکس.

مثلث متساوی الساقین و ویژگی های آن

	$AB = AC$	دو ضلع برابر دارد.
	$\hat{B} = \hat{C}$	زاویه های روبه رو به ساق ها با هم برابرند.



	$AH \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ ارتفاع است. $AH \Rightarrow BH = CH$ میانه است. $AH \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ نیمساز است. $AH \Rightarrow AB = AC$ عمودمنصف است.	ارتفاع، میانه، عمودمنصف و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق اند.
--	---	--

مثلث متساوی الاضلاع و ویژگی های آن

	$AB = AC = BC$	تمامی اضلاع مثلث با هم برابرند.
	$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$	تمامی زوایای داخلی مثلث برابر 60° است.
	$AH = BH' = CH'' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$	ارتفاع ها، میانه ها، عمودمنصف ها و نیمساز های نظیر هر رأس بر هم منطبق بوده و همه آن ها با هم برابرند.

توجه کنید که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر است با: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

نیمساز و ویژگی های آن

تعریف: نیمساز یک زاویه، پاره خطی است که آن زاویه را نصف می کند.

ویژگی های نیمساز:

	$\hat{O}$ نیمساز زاویه $\Rightarrow \begin{cases} AM = AN \\ ON = OM \end{cases}$	اگر نقطه ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، آن گاه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
	$AM = AN \Rightarrow \hat{O}$ نیمساز زاویه	اگر فاصله یک نقطه از دو ضلع یک زاویه به یک اندازه باشد، آن گاه آن نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.
	$OH = OH' = OH'' = r$	محل برخورد نیمساز های داخلی هر مثلثی همواره درون مثلث است که این نقطه همان مرکز دایره محاطی مثلث بوده و فاصله آن از هر سه ضلع مثلث با هم برابر است.



عمودمنصف و ویژگی های آن

تعریف: عمودمنصف، خطی است که بر یک پاره خط عمود بوده و آن را نصف می کند.

■ ویژگی های عمودمنصف:

	$BC \text{ عمودمنصف } d \Rightarrow AB = AC$	اگر نقطه ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، آن گاه از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.
	$AB = AC \Rightarrow BC \text{ عمودمنصف } d$	اگر فاصله یک نقطه از دو سر یک پاره خط به یک اندازه باشد، آن گاه آن نقطه روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

■ نقطه همرسی عمودمنصف های اضلاع مثلث:

عمودمنصف های اضلاع هر مثلثی در یک نقطه هم می رسند که آن نقطه، **مرکز دایره محیطی** مثلث است و نقطه همرسی آن ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است که این فاصله همان **شعاع دایره محیطی** مثلث است.

نوع مثلث	منفرجه الزاویه	قائم الزاویه	حاده الزاویه
شکل			
محل همرسی	بیرون مثلث	وسط وتر	درون مثلث

ارتفاع و ویژگی های آن

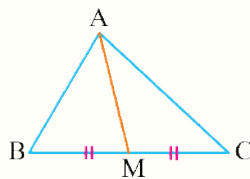
تعریف: ارتفاع، خط عمودی است که از یک رأس بر پاره خط مقابل (و یا امتداد آن) وارد می شود.

■ نقطه همرسی ارتفاع های مثلث:

نوع مثلث	منفرجه الزاویه	قائم الزاویه	حاده الزاویه
شکل			
محل همرسی	بیرون مثلث	روی رأس قائم	درون مثلث



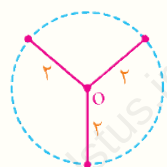
میان و ویژگی های آن



میان، پاره خطی است که از یک رأس مثلث رسم شده و ضلع مقابل به آن زاویه را نصف می کند. به عنوان مثال در شکل زیر، اگر میان وارد بر ضلع BC را رسم کنیم، داریم:

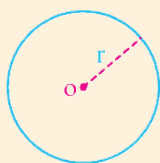
$$AM \Rightarrow BM = MC$$

مکان هندسی

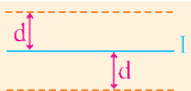


به مجموعه نقاطی از صفحه که دارای یک یا چند ویژگی مشترک باشند، مکان هندسی می گوییم. به عنوان مثال، دایره ای به مرکز O و شعاع ۲ واحد را در نظر بگیرید. تمامی نقاطی که روی این دایره قرار دارند دارای یک ویژگی مشترک هستند و آن هم این است که همه این نقاط از مرکز دایره (یعنی نقطه O)، ۲ واحد فاصله دارند.

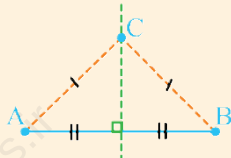
مکان هندسی های مهم رو توی جدول زیر براتون آماده کردیم...



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت مانند O به فاصله r هستند، دایره ای به مرکز O و به شعاع r است.

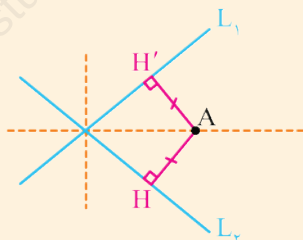


مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصله d هستند، دو خط موازی با خط L و به فاصله d از آن است که در دو طرف خط L قرار می گیرند.



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله هستند، عمود منصف پاره خط AB است.

$$AC = BC$$



مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله هستند، نیمسازهای آن دو خط متقاطع است.

$$AH = AH'$$

استدلال

استدلال ها انواع مختلفی دارند که چند تا از اونا رو به طور معرفی می کنیم...

■ استدلال استقرایی:

به استدلالی که با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت مختلف، به یک نتیجه کلی می رسیم، استدلال استقرایی می گوییم. به عبارت دیگر، در این نوع استدلال، از جزء به کل می رسیم. توجه داشته باشید که با چنین استدلالی نمی توان همواره به درستی نتیجه حاصل شده مطمئن بود یعنی نتایجی که با استفاده از این استدلال به دست می آیند ممکن است درست یا نادرست باشند.

■ استدلال استنتاجی:

به استدلالی که براساس نتیجه گیری منطقی و بر پایه واقعیت هایی باشد که درستی آن ها را پذیرفته ایم، استدلال استنتاجی می گوییم. توجه کنید که نتایج حاصل شده از این استدلال، همواره درست است.

■ برهان خلف:

نوع دیگری از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. در برهان خلف، به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کرده و به درستی حکم برسیم، فرض می کنیم که حکم، نادرست باشد (فرض خلف) و با این فرض به یک تناقض یا به یک نتیجه غلط یا غیرممکن می رسیم، سپس نتیجه می گیریم که فرض اولیه ما (فرض خلف) صحیح نبوده و حکم، نمی تواند نادرست باشد. به عبارت



دیگر، مراحل اثبات به روش برهان خلف به صورت زیر است:

۱ فرض می‌کنیم که حکم، نادرست باشد. (فرض خلف)

۲ ثابت می‌کنیم که با فرض خلف، به تناقض یا به یک نتیجه غیرممکن می‌رسیم.

۳ نتیجه می‌گیریم که فرض خلف، نادرست بوده و حکم نمی‌تواند نادرست باشد.

■ **مثال نقض:** نوع دیگری از استدلال، استدلال به روش مثال نقض است که در آن از یک مثال برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است اصطلاحاً مثال نقض می‌گوییم. توجه داشته باشید که برای نشان دادن **نادرستی** یک حکم کلی، ارائه تنها یک مثال نقض، کافی است اما برای نشان دادن **درستی** یک حکم کلی، حتماً باید اثباتی را انجام دهیم.

مثال:

حکم	مثال نقض
تمامی اعداد اول، فرد هستند.	عدد ۲، عددی اول اما زوج است.
هر عدد فردی، اول است.	عدد ۹، عددی فرد بوده ولی اول نیست.

قضیه

■ **قضیه:** برخی از نتایج مهم و کاربردی که از استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند را «قضیه» می‌گوییم. یک قضیه از **فرض** و **حکم** تشکیل شده است که فرض، همان اطلاعات داده شده سوال و حکم، همان اطلاعات خواسته شده مسئله است.

■ **عکس قضیه:**

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» می‌گوییم. عکس یک قضیه ممکن است **درست** یا **نادرست** باشد. به عنوان مثال:

قضیه	اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آن گاه قطرهاش یکدیگر را نصف می‌کنند.
عکس قضیه	اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آن گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

■ **قضیه شرطی:**

هر گزاره شرطی درست را یک قضیه شرطی می‌گوییم. قضیه شرطی معمولاً به فرم «**اگر** فرض **آن گاه** حکم» بیان می‌شود.

■ **قضیه دو شرطی:**

اگر یک قضیه شرطی و عکس آن، هر دو درست باشند، آن قضیه را قضیه دوشروطی می‌گوییم. توجه داشته باشید که قضیه‌های دوشروطی معمولاً به فرم «**اگر** فرض **آن گاه** حکم و **بالعکس**» یا به صورت «فرض **اگر و تنها اگر** حکم» بیان می‌شوند. به عنوان مثال:

فرم ۱	اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آن گاه زاویه مقابل به ضلع بزرگ‌تر از زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است و بالعکس .
فرم ۲	در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند، اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آن دو ضلع با هم برابر باشند.



قضیه تالس

میان خط
در دوزنقه

قضیه تالس
و دوزنقه

قضیه تالس
در حالت کلی

قضیه میان خط
در مثلث

عکس قضیه
تالس

تعمیم
قضیه تالس

قضیه تالس

نسبت و
تناسب

نسبت و تناسب

نسبت: حاصل تقسیم عدد حقیقی a بر عدد حقیقی و غیر صفر b را به صورت $\frac{a}{b}$ نشان می‌دهیم و آن را نسبت a به b می‌گوییم. ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) فقط دقت کنید a و b باید هم واحد باشند.

مثال: اگر AB پاره‌خطی به طول 3 cm و CD پاره‌خطی به طول 5 cm باشد، نسبت طول پاره‌خط AB به طول پاره‌خط CD برابر است با:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$$

تناسب: اگر دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ با هم برابر باشند، این دو نسبت، تشکیل یک تناسب می‌دهند به عبارت دیگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ نشان‌دهنده یک تناسب است.

توجه: در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، d و a را **طرفین تناسب** و b و c را **وسطین تناسب** می‌نامیم.

مثال: پاره‌خط‌های $AB = 2$ و $CD = 4$ به ترتیب با پاره‌خط‌های $A'B' = 6$ و $C'D' = 12$ متناسب هستند. (چرا؟)

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{1}{2}$$

ویژگی‌های تناسب: به کمک اعمال و روش‌های جبری، از هر تناسبی می‌توان تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها را در جدول زیر ببینید. (البته با فرض این‌که مخرج تمامی کسرهای مخالف صفر است.)

ویژگی	رابطه	مثال
طرفین - وسطین	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow 2 \times 10 = 4 \times 5$
معکوس کردن طرفین تناسب	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$
تعویض جای طرفین	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{4}{2}$
تعویض جای وسطین	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$
ترکیب نسبت در صورت	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{3+5}{5} = \frac{6+10}{10}$
ترکیب نسبت در مخرج	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{3}{3+5} = \frac{6}{6+10}$
تفضیل نسبت در صورت	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$	$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} \Rightarrow \frac{7-5}{5} = \frac{14-10}{10}$
تفضیل نسبت در مخرج	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$	$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} \Rightarrow \frac{7}{5-7} = \frac{14}{10-14}$
ترکیب صورت‌ها و مخرج‌ها	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{3}{2} = \frac{9}{6} \Rightarrow \frac{3+9}{2+6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$

توجه: در مورد ویژگی آخر جدول در حالت کلی‌تر می‌توان گفت که اگر چند نسبت با هم برابر باشند، می‌توان نسبت جدیدی را تشکیل داد که صورت آن مجموع صورت نسبت‌ها و مخرج آن هم مجموع مخرج نسبت‌ها باشد که حاصل این نسبت جدید با تمامی نسبت‌های قبلی برابر است. به عبارت دیگر:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = k \Rightarrow \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = k$$



مثال:

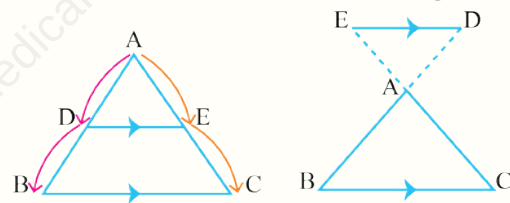
$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} \Rightarrow \frac{3+6+9+12}{4+8+12+16} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$$

نکته اگر تناسبی داشتیم که در یک طرف آن **یک عدد معلوم** و در طرف دیگر آن **یک نسبت مجهول** وجود داشت، (مانند $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$) می‌توانیم صورت و مخرج طرف معلوم را در متغیری مانند t ضرب کرده و سپس صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را نیز با هم برابر فرض کنیم.

نکته اگر تناسبی داشتیم که در آن چند نسبت با صورت‌های مجهول و مخرج‌های معلوم (و یا برعکس) وجود داشت، می‌توانیم هر یک از نسبت‌ها را برابر متغیری مانند k قرار داده و مجهولات را برحسب ضریبی از k به دست بیاوریم و سپس آنها را در خواسته مسئله جای‌گذاری کنیم.

قضیه تالس

هرگاه در مثلثی، خطی موازی یکی از اضلاع، دو ضلع دیگر مثلث (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، روی آن دو ضلع (یا امتداد آنها)، پاره‌خط‌هایی جدا می‌کند که اندازه آنها تشکیل یک تناسب می‌دهند. این قضیه را اصطلاحاً **تالس جزء به جزء** می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر در شکل‌های زیر DE با BC موازی باشد، داریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

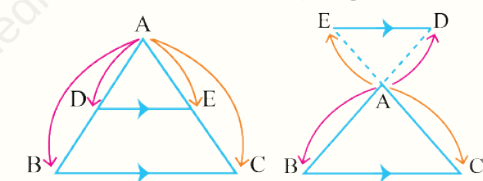
البته قضیه تالس، فرم‌های دیگر هم دارد که بهتره اون‌ها رو هم بلد باشی!

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در صورت}} \frac{AD+DB}{DB} = \frac{AE+EC}{EC} \Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC} \xrightarrow{\text{معکوس کردن تناسب}} \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AD}{DB+AD} = \frac{AE}{EC+AE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

تعمیم قضیه تالس

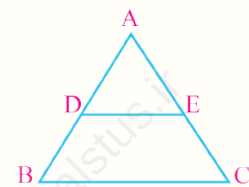
هرگاه خطی دو ضلع یک مثلث (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند و با ضلع سوم مثلث موازی باشد، در این صورت مثلثی به وجود می‌آید که اندازه ضلع‌های آن با اندازه ضلع‌های مثلث اصلی متناسب است. این قضیه را اصطلاحاً **تالس جزء به کل** می‌نامیم. به عبارت دیگر، اگر در شکل‌های زیر DE با BC موازی باشد، داریم:



$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

عکس قضیه تالس

هرگاه خطی دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آن دو ضلع، چهار پاره‌خط با اندازه‌های متناسب جدا کند، آن‌گاه آن خط با ضلع سوم مثلث موازی است.



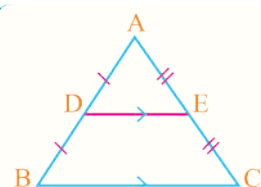
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

توجه داشته باشید که در مسائل مربوط به عکس قضیه تالس، ما هیچ اطلاعی از موازی بودن DE و BC نداریم و باید از متناسب بودن اندازه پاره‌خط‌های ایجاد شده روی دو ضلع مثلث ABC ، به این نتیجه برسیم که $DE \parallel BC$ است.

(خب! فرض کن که فهمیدیم DE موازی BC بشه که چی مثلث؟ معلومه دیگه، آگه DE با BC موازی بشه به راحتی می‌تونیم از قضیه تالس یا تعمیم قضیه تالس استفاده کنیم؟ (Do you understand?))

قضیه میان خط در مثلث

پاره‌خطی که وسط دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند **میان خط مثلث** می‌نامیم و داریم: این پاره‌خط با ضلع سوم مثلث موازی است.



$$DE \parallel BC$$

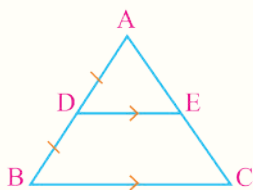


اندازه این پاره خط، نصف ضلع سوم مثلث است.

$$DE = \frac{BC}{2}$$

و همچنین اگر از وسط ضلع مثلثی، خطی موازی با یک ضلع دیگر مثلث رسم کنیم، این خط ضلع سوم مثلث را در وسط آن قطع می کند به عبارت دیگر:

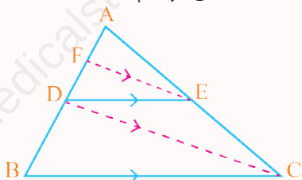
$$\begin{cases} AD = DB \\ DE \parallel BC \end{cases} \Rightarrow AE = EC$$



گاهی اوقات در مسائل مربوط به قضیه تالس، موازی بودن دو پاره خط را به طور غیرمستقیم در فرض مسئله بیان می کنند که در جدول زیر به چند نمونه از این موارد اشاره می کنیم:

اطلاعات فرض مسئله	شکل مسئله	توضیحات
زاویه $\hat{M}$ با زاویه $\hat{B}$ برابر است. یا زاویه $\hat{N}$ با زاویه $\hat{C}$ برابر است.		$\hat{M} = \hat{B} \Rightarrow MN \parallel BC$ $\hat{N} = \hat{C} \Rightarrow MN \parallel BC$
زوایای $\hat{MNB}$ و $\hat{MBC}$ مکمل هم اند. یا زوایای $\hat{MNC}$ و $\hat{NCB}$ مکمل هم اند.		$\hat{MNB} + \hat{MBC} = 180^\circ \Rightarrow MN \parallel BC$ $\hat{MNC} + \hat{NCB} = 180^\circ \Rightarrow MN \parallel BC$
چهارضلعی MNCB دوزنقه است.		$MNCB \Rightarrow MN \parallel BC$ دوزنقه است.
فاصله نقطه M تا ضلع BC با فاصله نقطه N از ضلع BC برابر است.		$MH = NH' \Rightarrow MN \parallel BC$
چهارضلعی MNPB متوازی الاضلاع است.		$MNPB \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel BC \\ NP \parallel AB \end{cases}$ متوازی الاضلاع است

اگر در مثلثی، دو جفت خط موازی داشته باشیم، می توانیم با دوبار استفاده کردن از تعمیم قضیه تالس، به نتیجه جالبی برسیم:

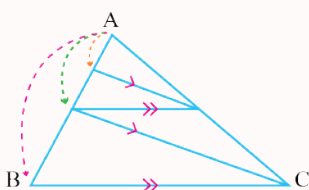


$$\begin{aligned} \triangle ABC : DE \parallel BC &\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \triangle ADC : FE \parallel DC &\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC} \end{aligned} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow (AD)^2 = AF \times AB$$

به عبارت دیگر در شکل مقابل، به سراغ ضلعی از مثلث ABC که به سه قسمت تقسیم شده می رویم و رابطه زیر را در آن به کار می بریم:

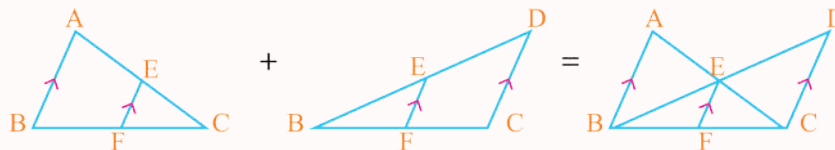
$$(\text{فلش بزرگ}) \times (\text{فلش کوچک}) = (\text{فلش متوسط})^2$$

کنکور توی دهه ۸۰ و ۹۰، به این مدل از سوالات توجه خاصی داشت پس تو هم جدی بگیرش!





نکته اگر دو مثلث ABC و DBC، مطابق شکل زیر با هم ادغام شوند، شکل سومی پدید می‌آید که در آن $AB \parallel EF \parallel DC$ خواهد بود. حال اگر در دو مثلث ABC و DBC، تعمیم قضیه تالس را به کار بگیریم، می‌توانیم به روابط جالبی دست پیدا کنیم، ببینید:



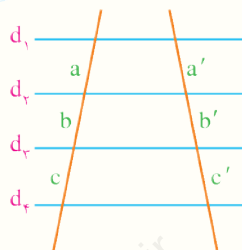
$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}$$

اگر اندازه EF مدنظر باشد می‌توان نشان داد که:

اگر اندازه BF یا CF مدنظر باشد می‌توان نشان داد که اندازه BF با اندازه AB و اندازه CF نیز با اندازه DC متناسب است. به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} \frac{BF}{AB} = k \Rightarrow BF = k(AB) \\ \frac{CF}{DC} = k \Rightarrow CF = k(DC) \end{cases}$$

قضیه تالس در حالت کلی

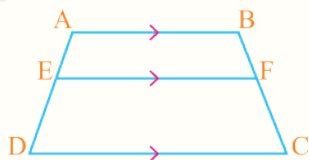


اگر چند خط با هم موازی باشند و دو خط مورب آنها را قطع کند در این صورت به کمک قضیه تالس می‌توان ثابت کرد که خطوط موازی روی خط‌های مورب، قطعه‌های متناسب ایجاد می‌کنند (و برعکس). به عبارت دیگر، در شکل زیر اگر خطوط $d_1, d_2, d_3, \dots$ با هم موازی باشند، داریم:

$$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel \dots \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots$$

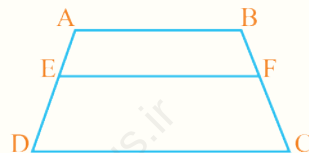
قضیه تالس در دوزنقه

قضیه تالس در دوزنقه: اگر در یک دوزنقه، خطی موازی قاعده‌های آن رسم کنیم به طوری که این خط، ساق‌های دوزنقه را در نقاط E و F قطع کند، در این صورت این خط روی ساق‌های دوزنقه پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کند.



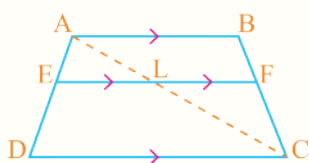
$$EF \parallel AB \parallel DC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} & (\text{جزء به جزء}) \\ \frac{AE}{AD} = \frac{BF}{BC} & (\text{جزء به کل}) \end{cases}$$

عکس قضیه تالس در دوزنقه: اگر در یک دوزنقه، خطی رسم کنیم به طوری که این خط ساق‌های دوزنقه را در نقاط E و F قطع کرده و روی آنها پاره‌خط‌های متناسب ایجاد کند، در این صورت این خط با قاعده‌های دوزنقه موازی است.

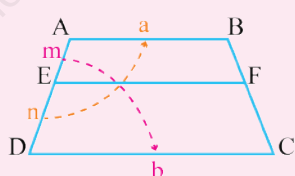


$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow EF \parallel AB \parallel DC$$

اما در سؤال‌های مرتبط با این بخش، کشیدن یکی از قطرهای دوزنقه می‌تواند کلید حل مسئله باشد. به عنوان مثال در شکل زیر با رسم قطر AC و استفاده از قضیه تالس در دو مثلث ADC و CBA، می‌توان با توجه به اطلاعات مسئله، نسبت‌های مورد نظر را تشکیل داد و مجهول خواسته شده را به دست آورد.



$$\begin{cases} \Delta ADC : EL \parallel DC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AE}{ED} = \frac{AL}{LC} & (\text{جزء به جزء}) \\ \frac{AE}{AD} = \frac{AL}{AC} = \frac{EL}{DC} & (\text{جزء به کل}) \end{cases} \\ \Delta CBA : FL \parallel BA \Rightarrow \begin{cases} \frac{CF}{FB} = \frac{CL}{LA} & (\text{جزء به جزء}) \\ \frac{CF}{CB} = \frac{CL}{CA} = \frac{FL}{BA} & (\text{جزء به کل}) \end{cases} \end{cases}$$

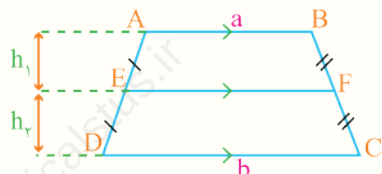


توجه اگر در سؤالی، اندازه پاره خط EF مدنظر باشد، می توان با استفاده از رابطه زیر مستقیماً طول EF را محاسبه کرد. به طوری که اگر $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC} = \frac{m}{n}$ باشد، داریم:

$$EF = \frac{mb + na}{m + n}$$

میان خط در دوزنقه

به پاره خطی که وسط های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می کند **خط دوزنقه** می گوئیم و در این حالت، داریم:



$$AB \parallel EF \parallel DC$$

$$EF = \frac{a + b}{2}$$

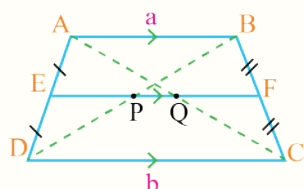
$$h_1 = h_2$$

✓ میان خط دوزنقه با دو قاعده دوزنقه موازی است.

✓ اندازه میان خط دوزنقه با نصف مجموع دو قاعده دوزنقه برابر است.

✓ فاصله میان خط دوزنقه از دو قاعده دوزنقه برابر است.

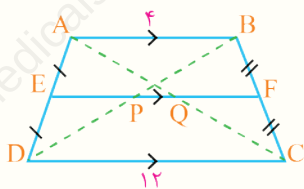
✓ اگر قطر های دوزنقه را رسم کنیم، طول پاره خط های ایجاد شده روی EF برابر است با:



$$\begin{cases} EP = FQ = \frac{a}{2} \\ EQ = FP = \frac{b}{2} \\ PQ = \frac{b-a}{2} \end{cases}$$

مثال: در شکل مقابل، ABCD دوزنقه است. اگر $AB = 4$ و $DC = 12$ و نقاط E و F وسط ساق های دوزنقه باشد، اندازه پاره خط های ایجاد شده روی EF را به دست آورید.

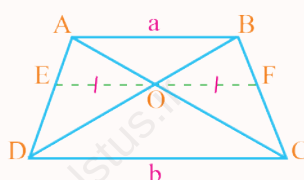
چون نقاط E و F وسط ساق های دوزنقه هستند بنابراین پاره خط EF، میان خط دوزنقه است، پس $AB \parallel EF \parallel DC$



$$\begin{cases} EP = FQ = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ EQ = FP = \frac{DC}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ PQ = \frac{DC - AB}{2} = \frac{12 - 4}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{cases}$$

و اگر اندازه EF را هم بخواهیم:

$$EF = \frac{DC + AB}{2} = \frac{12 + 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$



نکته اگر از محل برخورد قطر های دوزنقه (نقطه O) خطی را موازی با قاعده دوزنقه رسم کنیم به طوری که ساق های

دوزنقه را در نقاط E و F قطع کند، داریم:

✓ اندازه OE با اندازه OF برابر است.

✓ اندازه OE، OF و EF برابر است با:

$$OE = OF$$

$$\begin{cases} OE = OF = \frac{ab}{a+b} \\ EF = \frac{2ab}{a+b} \end{cases}$$



تشابه



روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

نسبت اجزای فرعی، محیطها و مساحت های دو مثلث متشابه

شکل های مهم در تشابه دو مثلث

حالت های تشابه دو مثلث

قضیه اساس تشابه مثلث ها

تشابه مثلث ها

تشابه مثلث ها



دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ را متشابه گوییم اگر و فقط اگر **زاویه های متناظر** در هر دو مثلث با هم برابر بوده و **نسبت اضلاع متناظر** نیز در هر دو مثلث **یکسان** باشد، در این صورت می گوییم که دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ با هم متشابه اند و آن را به صورت $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ نشان می دهیم.



$$\hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$$

زاویه های متناظر در هر مثلث با هم برابر باشند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$$

نسبت اضلاع متناظر در هر دو مثلث، **یکسان** باشد.

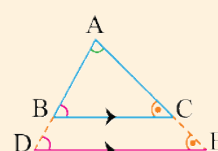
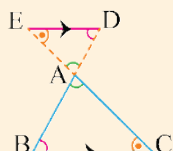
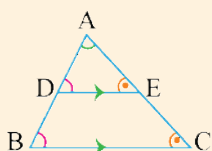
نسبت تشابه:

در دو مثلث متشابه، به نسبت اندازه های اضلاع متناظر، **نسبت تشابه** می گوییم. به عبارت دیگر، اگر دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ با نسبت $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$ متشابه باشند، در این صورت عدد k را **نسبت تشابه** می نامیم. بدیهی است که مثلث $\triangle A'B'C'$ نیز با مثلث $\triangle ABC$ با نسبت $\frac{1}{k}$ متشابه است.

قضیه اساسی تشابه مثلث ها



اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، دو ضلع دیگر (یا امتداد آن ها) را قطع کند، در این صورت مثلثی که به وجود می آید با مثلث اولیه متشابه خواهد بود.

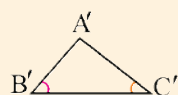
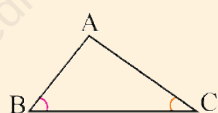


$$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \xrightarrow{\text{نتیجه}} \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}, \hat{B} = \hat{D}, \hat{C} = \hat{E} \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \end{cases}$$

حالت های تشابه دو مثلث



با استفاده از قضیه اساسی تشابه مثلث ها می توان سه قضیه بعد را نتیجه گرفت که این قضایا حالت های تشابه دو مثلث را بیان می کنند:



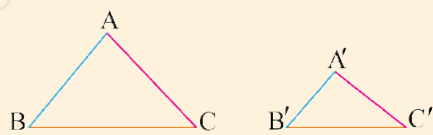
$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B'} \\ \hat{C} = \hat{C'} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

هرگاه **دو زاویه** از مثلثی با **دو زاویه** از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث به حالت دو زاویه برابر (ز.ز)، متشابه اند.



$$\begin{cases} \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} = \hat{A'} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

هرگاه اندازه های **دو ضلع** از مثلثی با اندازه های **دو ضلع** از مثلث دیگر متناسب بوده و **زاویه بین** آن ها با هم برابر باشد، آن دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر (ض.ض)، متشابه اند.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

هرگاه اندازه سه ضلع از مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث به حالت سه ضلع متناسب (ض ض ض)، متشابه اند.

نکته: اگر دو مثلث به حالت دو زاویه برابر با هم متشابه باشند، برای نوشتن نسبت اضلاع متناظر، به روش زیر عمل می کنیم:

ابتدا سعی می کنیم که دو مثلثی را که با هم متشابه هستند را به صورت جدا از هم تصور کنیم.

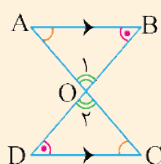
سپس در دو مثلث متشابه، زاویه های برابر را پیدا کرده و آن ها را به ترتیب و متناظر با هم، در زیر یکدیگر می نویسیم.

در نهایت، اضلاع روبه رو به زاویه های برابر را شناسایی کرده و در تناسب قرار می دهیم.

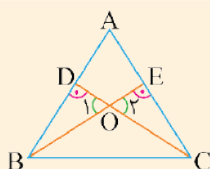
توجه داشته باشید که در نوشتن تناسب، در صورت هر سه کسر، اضلاع مربوط به یک مثلث و در مخرج کسر نیز اضلاع مربوط به مثلث دیگر را می نویسیم.

شکل های مهم در تشابه دو مثلث

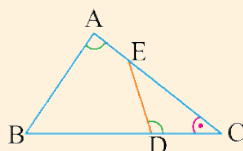
توی جدول پایین، چند تا شکل مهم از تشابه دو تا مثلث به حالت دو زاویه برابر (همون ز زا) رو براتون آماده کردیم.



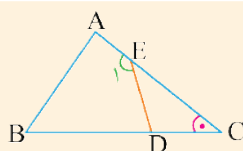
$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{A} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \triangle AOB \sim \triangle COD$$



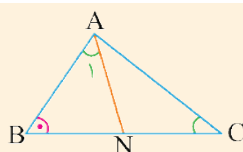
$$\begin{cases} \hat{D} = \hat{B} \\ \hat{E} = \hat{C} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \Rightarrow \triangle ODB \sim \triangle OEC$$



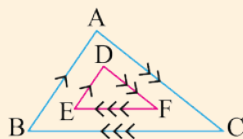
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$$



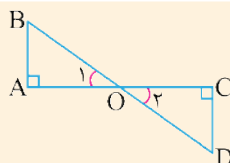
$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{E}_1 = 180^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC$$



$$\begin{cases} \hat{C} = \hat{A}_1 \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle NBA$$



$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \hat{B} = \hat{E} \\ \hat{C} = \hat{F} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$



$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD$$



نکته اگر اندازه ضلع‌های دو مثلث در اختیار داشته باشیم، این دو مثلث به شرطی با هم متشابه هستند که تناسب زیر بین اضلاع آن‌ها برقرار باشد:

$$\frac{\text{ضلع کوچک } \triangle ABC}{\text{ضلع کوچک } \triangle A'B'C'} = \frac{\text{ضلع متوسط } \triangle ABC}{\text{ضلع متوسط } \triangle A'B'C'} = \frac{\text{ضلع بزرگ } \triangle ABC}{\text{ضلع بزرگ } \triangle A'B'C'}$$

نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

هرگاه دو مثلث با هم متشابه باشند، آن‌گاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) با **نسبت تشابه** برابر است و نسبت مساحت‌های آن‌ها نیز با **توان دوم (مربع) نسبت تشابه** برابر است، به عبارت دیگر، اگر مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ با هم متشابه باشند و نسبت تشابه آن‌ها برابر k باشد، داریم:

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$					
نسبت مساحت‌ها	نسبت محیط‌ها	نسبت میانه‌ها	نسبت نیمسازها	نسبت ارتفاع‌ها	نسبت اضلاع
$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k^2$	$\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = k$	$\frac{AM}{A'M'} = k$	$\frac{AD}{A'D'} = k$	$\frac{AH}{A'H'} = k$	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k$

روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، اگر ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آید که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

نتیجه	نسبت اضلاع	شکل
$AB^2 = BH \times BC$	$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}$	
$AC^2 = CH \times CB$	$\triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC}$	
$AH^2 = CH \times BH$	$\triangle AHB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CH}{AH} = \frac{AH}{BH}$	

نکته اگر مساحت مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ را به دو روش محاسبه کرده و آن‌ها را با هم برابر قرار دهیم، یکی دیگر از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AH \\ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \end{cases} \Rightarrow BC \times AH = AB \times AC$$



تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

آشنایی با مقاطع مخروطی

برش

دوران شکل های هندسی

دوران پاره خط حول یک محور

دوران نقطه حول یک محور

وقتی شکل های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شود، جسم های مختلف هندسی ساخته می شود. نمونه هایی از این دوران ها را در زیر بررسی می کنیم:

دوران نقطه حول یک محور



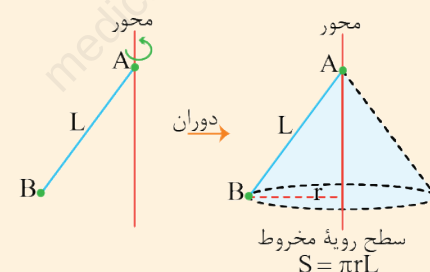
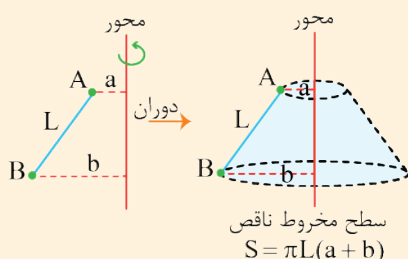
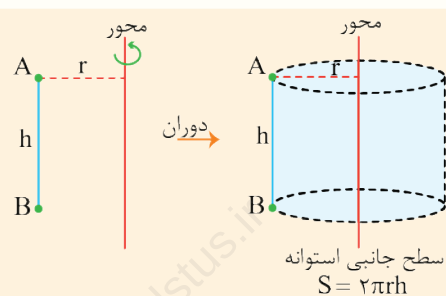
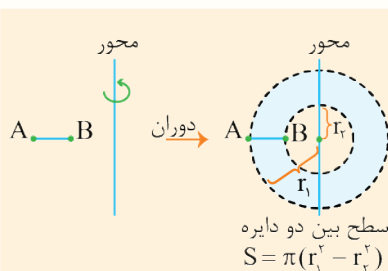
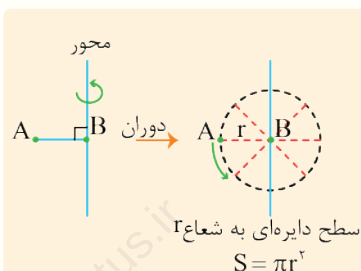
محیط دایره

$$S = \pi r^2$$

شکلی که در اثر دوران نقطه A حول یک محور پدید می آید، محیط دایره است. شعاع این دایره با فاصله عمودی نقطه A تا محور دوران برابر است.

دوران پاره خط حول یک محور

با دوران پاره خط AB حول یک محور، سطح های متفاوتی ایجاد می شود. این سطح بستگی به وضعیت پاره خط و محور دارد.



حجم و مساحت اشکال هندسی مهم:

کره	حجم	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	نیم کره	حجم	$V = \frac{2}{3}\pi r^3$
	مساحت جانبی	$S_{\text{جانبی}} = 4\pi r^2$		مساحت جانبی	$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r^2$
	مساحت کل	$S_{\text{کل}} = 4\pi r^2$		مساحت کل	$S_{\text{کل}} = 3\pi r^2$
مخروط	حجم	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	استوانه	حجم	$V = \pi r^2 h$
	مساحت جانبی	$S_{\text{جانبی}} = \pi rL$		مساحت جانبی	$S_{\text{جانبی}} = 2\pi rh$
	مساحت کل	$S_{\text{کل}} = \pi rL + \pi r^2$		مساحت کل	$S_{\text{کل}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

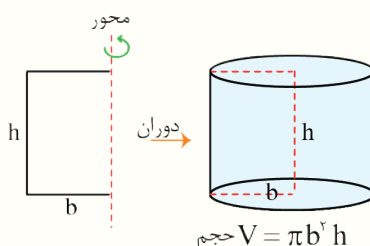


مکعب مستطیل	حجم	$V = abc$	مکعب	حجم	$V = a^3$
	مساحت جانبی	$S_{\text{جانبی}} = 2(ac + bc)$		مساحت جانبی	$S_{\text{جانبی}} = 4a^2$
	مساحت کل	$S_{\text{کل}} = 2(ab + ac + bc)$		مساحت کل	$S_{\text{کل}} = 6a^2$

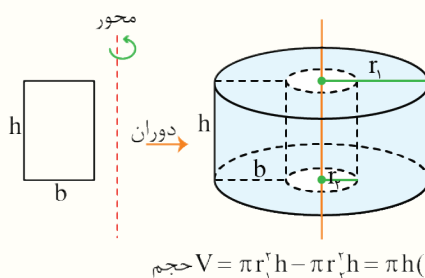
نکته قطر مکعبی به طول ضلع a برابر با $a\sqrt{3}$ و قطر هر وجه آن برابر با $a\sqrt{2}$ است.

دوران شکل های هندسی

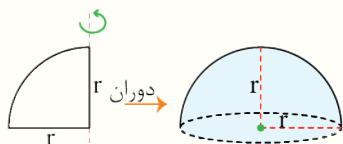
۱. **دوران مستطیل حول یکی از اضلاعش:** استوانه ای پدید می آید. ارتفاع استوانه برابر ضلع محور دوران و شعاع قاعده آن برابر ضلع دیگر مستطیل است.



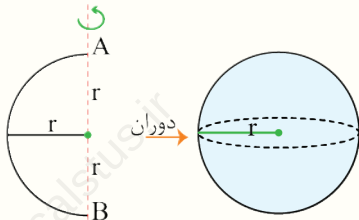
۲. **دوران مستطیل حول خطی موازی با اضلاعش:** استوانه ای ایجاد می شود که وسطش خالی است.



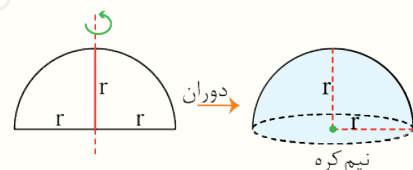
۳. **دوران ربع دایره حول شعاعش:** نیم کره ای به شعاع r پدید می آید.



۴. **دوران نیم دایره حول قطرش:** کره ای به شعاع r پدید می آید.

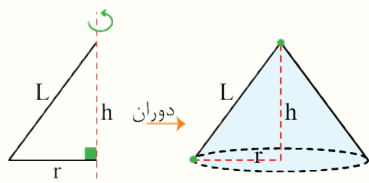


۵. **دوران نیم دایره حول شعاعش:** نیم کره ای به شعاع r پدید می آید.

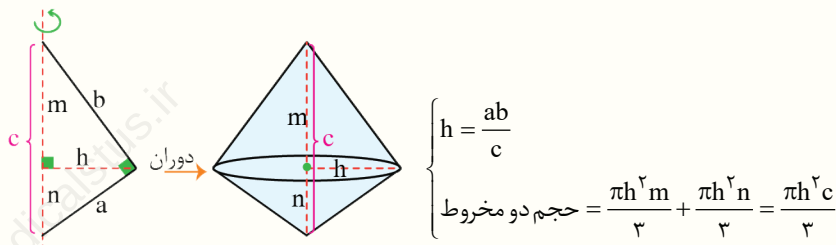




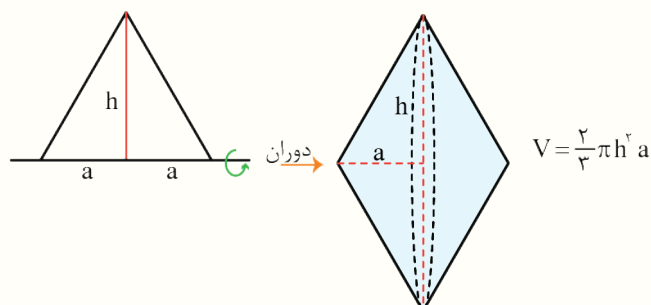
۶ دوران مثلث قائم الزاویه حول اضلاع قائمه: یک مخروط به شعاع و ارتفاع اضلاع های قائمه پدید می آید.



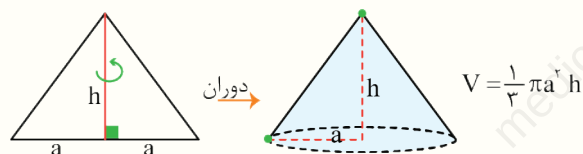
۷ دوران مثلث قائم الزاویه حول وتر: دو مخروط به شعاع ارتفاع وارد بر وتر پدید می آید که از قاعده به هم چسبیده هستند.



۸ دوران مثلث متساوی الساقین حول قاعده: حاصل این دوران، دو مخروط از قاعده به هم چسبیده است که حجم یکسانی دارند.

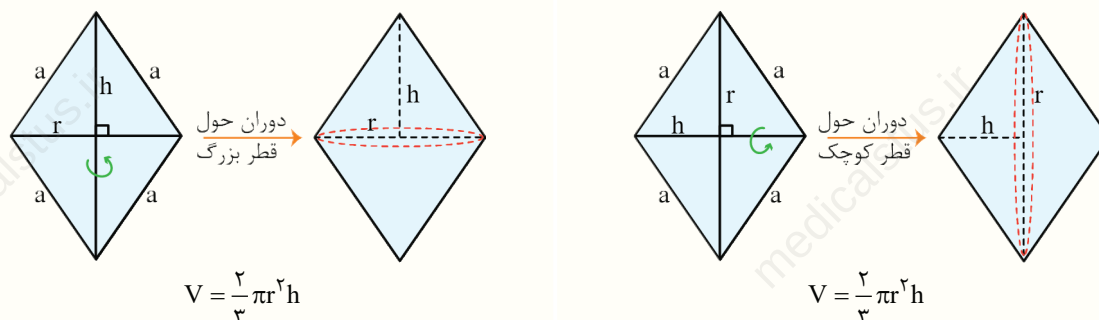


۹ دوران مثلث متساوی الساقین حول ارتفاع وارد بر قاعده: حاصل این دوران یک مخروط است که شعاعش نصف قاعده مثلث است.

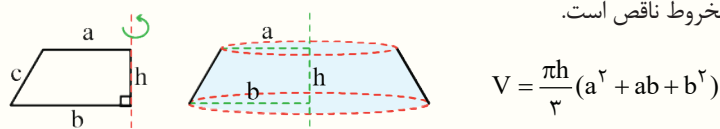


۱۰ دوران مثلث دلخواه حول ارتفاع: با توجه به شکل، اگر این مثلث را حول محور ارتفاع h دوران دهیم، شکل حاصل مخروطی به شعاع m و ارتفاع h است. در واقع مخروط حاصل از مثلث کوچکتر در درون مخروط حاصل از مثلث بزرگتر قرار می گیرد. بنابراین در دوران مثلث حول ارتفاع آن فقط قسمت بزرگتر مثلث مهم است.

۱۱ دوران لوزی حول قطر بزرگ یا کوچک: حاصل این دوران دو مخروط یکسان است که از قاعده به هم چسبیده اند.

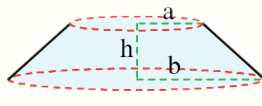
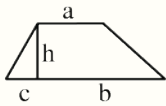


۱۲ دوران دوزنقه قائم الزاویه حول ساق قائم: شکل حاصل یک مخروط ناقص است.





۱۳ دوران دوزنقه حول ارتفاع:



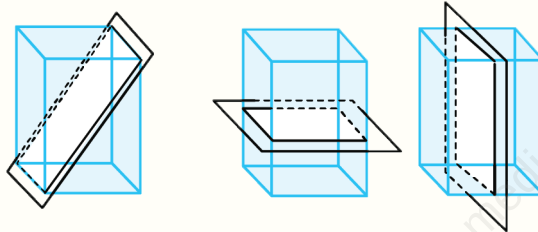
$$V = \frac{\pi h}{3} (a^2 + ab + b^2) = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

$$S_1 = \pi a^2, \quad S_2 = \pi b^2$$

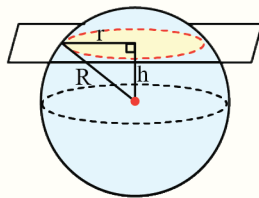
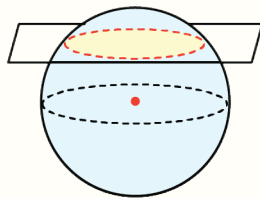
برش



اگر جسمی سه بعدی را با صفحه‌ای برش بزنیم، شکلی که از برخورد صفحه با جسم هندسی حاصل می‌شود، سطح مقطع آن نامیده می‌شود. برش می‌تواند به صورت افقی، قائم و مایل انجام گیرد.



۱ **سطح مقطع کره:** سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با کره (به صورت افقی، قائم و مایل)، همواره یک دایره است. هر چه این صفحه به مرکز کره نزدیک‌تر باشد، سطح مقطع بزرگ‌تر است. اگر صفحه از مرکز کره بگذرد، سطح مقطع بیشترین مساحت را خواهد داشت.



$$R^2 = r^2 + h^2$$

شعاع سطح مقطع
شعاع کره

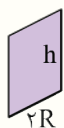
۲ **سطح مقطع مکعب مستطیل با قاعده مربع:**

				نوع برش
مایل	مایل	افقی	عمودی	
مثلث	مستطیل	مربع	مستطیل	سطح مقطع

۳ **سطح مقطع استوانه:** سطح مقطع حاصل از برخورد استوانه قائم با یک صفحه ممکن است دایره، بیضی یا مستطیل باشد.

برش مایل	برش عمودی	برش افقی
سطح مقطع: بیضی	سطح مقطع: مستطیل	سطح مقطع: دایره

در برش عمودی استوانه، اگر صفحه شامل محور استوانه باشد، در این صورت، حجم استوانه نصف می‌شود و مستطیلی با بیشترین مساحت پدید می‌آید.



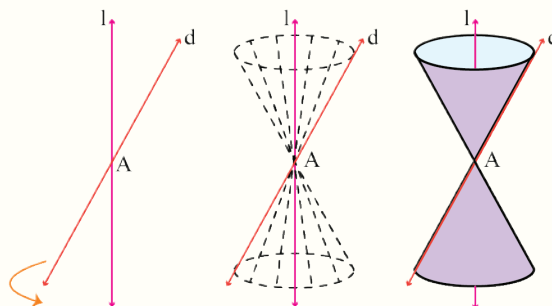
$$S = 2R \times h$$



آشنایی با مقاطع مخروطی

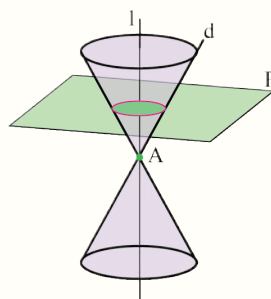


دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود. در این حالت، خط l محور، نقطه A ، رأس و خط d ، مولد این سطح مخروطی است.

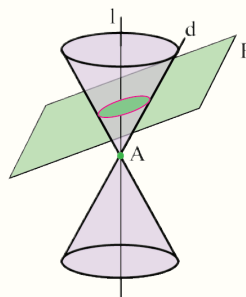


وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است. از آن جا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، مقاطع مخروطی نامیده می‌شوند. در ادامه با انواع **مقاطع مخروطی** آشنا خواهیم شد.

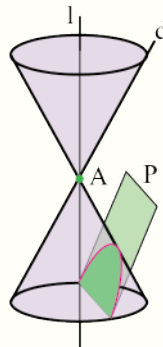
الف) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل، **دایره** است.



ب) اگر صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل، **بیضی** خواهد بود.

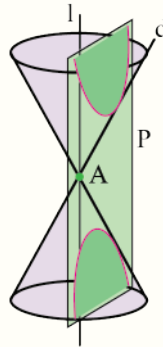


پ) اگر صفحه P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل، یک **سه‌می** است.

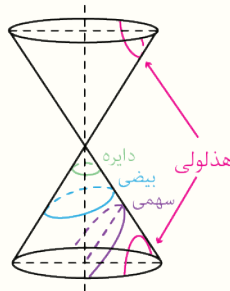




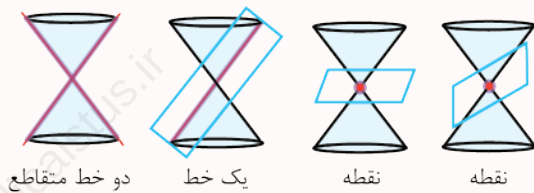
ت) اگر صفحه P ، سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را **هذلولی** می‌نامیم.



بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارت‌اند از : دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.



نکته اگر صفحه P سطح مخروطی را قطع کند و از رأس آن بگذرد ممکن است یک نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع ایجاد شود.



اگر صفحه‌ای موازی یکی از مولدهای یک سطح مخروطی، آن را قطع کند، شکل حاصل، یک سهمی یا خط مولد است.

اگر صفحه‌ای که شامل محور یک سطح مخروطی است، آن را قطع کند، شکل حاصل، دو خط متقاطع است.

بیضی

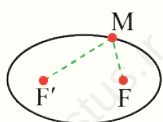
دایره مماس بر بیضی

خروج از مرکز بیضی

مختصات نقاط بیضی

بیضی و پارامترهای آن

بیضی و پارامترهای آن



بیضی، مجموعه‌ای از نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه ثابت F و F' که آن‌ها را کانون‌های بیضی می‌نامند، برابر مقدار ثابت $2a$ است که این مقدار ثابت با طول قطر بزرگ بیضی برابر است.

$$MF + MF' = 2a$$

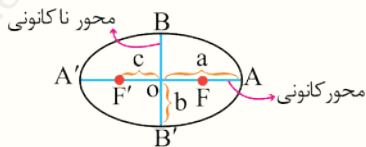
■ وضعیت بیضی و نقطه نسبت به هم:

درون بیضی M	روی بیضی M	بیرون بیضی M
$MF + MF' < 2a$	$MF + MF' = 2a$	$MF + MF' > 2a$



اجزاء و روابط بیضی:

اجزاء اصلی بیضی مطابق شکل به صورت زیر هستند:
۱ O مرکز بیضی است.



مختصات مرکز بیضی: $O(\alpha, \beta) = \frac{A+A'}{2} = \frac{F+F'}{2} = \frac{B+B'}{2}$

۲ F و F' کانون‌های بیضی و FF' فاصله کانونی است.

$OF = OF' = c \Rightarrow$ فاصله کانونی = $FF' = 2c$

۳ A و A' رأس‌های کانونی و AA' قطر بزرگ بیضی است.

$OA = OA' = a \Rightarrow$ قطر بزرگ بیضی = $AA' = 2a$

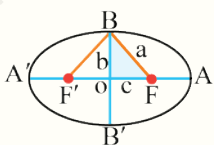
۴ B و B' رأس‌های غیرکانونی و BB' قطر کوچک بیضی است.

$OB = OB' = b \Rightarrow$ قطر کوچک بیضی = $BB' = 2b$

نکته در بیضی، همواره قطر بزرگ از فاصله کانونی بزرگ‌تر است و در نتیجه: $a > c$

رابطه بین a, b و c در بیضی:

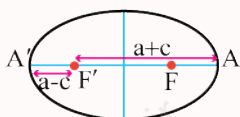
فاصله رأس غیرکانونی (B) از هر یک از کانون‌های بیضی برابر a است.



$BF + BF' = 2a \xrightarrow{BF=BF'} BF = a$

با توجه به رابطه فیثاغورس در مثلث OBF خواهیم داشت: $a^2 = b^2 + c^2$

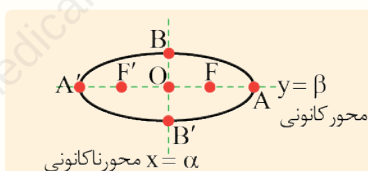
نکته بیشترین و کمترین فاصله نقاط بیضی از دو کانون برابر است با:



بیشترین فاصله از کانون = $AF' = a + c$

کمترین فاصله از کانون = $A'F' = a - c$

مختصات نقاط بیضی



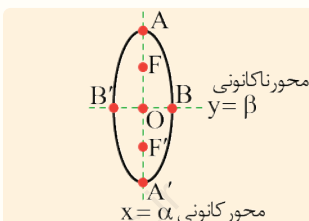
$O(\alpha, \beta)$

$F(\alpha + c, \beta), F'(\alpha - c, \beta)$
 $A(\alpha + a, \beta), A'(\alpha - a, \beta)$
 $B(\alpha, \beta + b), B'(\alpha, \beta - b)$

کانون‌ها و رأس‌های کانونی و مرکز عرضشان برابر است.

بیضی افقی

در بیضی افقی، محور کانون بیضی، موازی محور x و محور ناکانونی، موازی محور y است.



$O(\alpha, \beta)$

$F(\alpha, \beta + c), F'(\alpha, \beta - c)$
 $A(\alpha, \beta + a), A'(\alpha, \beta - a)$
 $B(\alpha + b, \beta), B'(\alpha - b, \beta)$

کانون‌ها و رأس‌های کانونی و مرکز طولشان برابر است.

بیضی قائم

در بیضی قائم، محور کانونی موازی محور y و محور ناکانونی، موازی محور x است.

توجه کشیدن شکل بیضی کمک زیادی به حل تست‌های این بخش می‌کند و به کمک شکل، فرمول‌های بالا را راحت‌تر می‌توان به یاد سپرد.

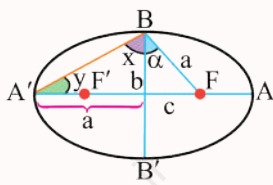
نکته اگر رأس‌های کانونی، کانون‌ها و مرکز بیضی، دارای عرض یکسانی باشند، بیضی افقی و اگر دارای طول‌های یکسانی باشند، بیضی قائم است.

خروج از مرکز بیضی

عدد $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌گویند، چون $a > c$ است، همواره $0 < e < 1$ است. هرچه $e = \frac{c}{a}$ به صفر نزدیک‌تر شود، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد و هرچه $e = \frac{c}{a}$ به یک نزدیک‌تر شود، شکل بیضی کشیده‌تر و به پاره‌خط شبیه‌تر می‌شود.



توان $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ $\rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
 $\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$
 $e = \frac{c}{a}$, $0 < e < 1$ خروج از مرکز بیضی



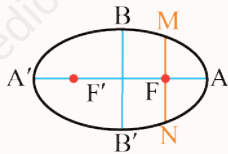
$$\sin \alpha = \frac{c}{a} = e$$

$$\tan x = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$$

$$\tan y = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$



وتری که از کانون بیضی می‌گذرد و بر محور کانونی عمود است، وتر کانونی بیضی نام دارد و اندازه آن $\frac{2b^2}{a}$ است. کوچکترین وتری که از مرکز بیضی می‌گذرد همان $2b$ است.

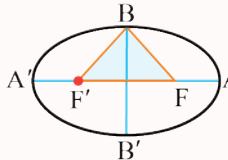


$$MF = FN = \frac{b^2}{a}$$

$$\text{وتر کانونی} = MN = \frac{2b^2}{a}$$



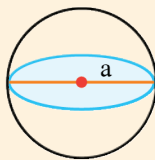
مساحت بزرگترین مثلثی که دو رأس آن کانون‌ها و رأس سوم آن نقطه دلخواهی روی بیضی باشد، زمانی است که رأس سوم، روی رأس غیرکانونی باشد.



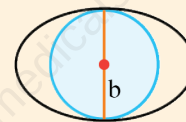
$$S_{\max} = \frac{b \times 2c}{2} = bc$$



دایره مماس بر بیضی



$$\text{دایره } r = a$$



$$\text{دایره } r = b$$

با توجه به شکل، چهارضلعی $BFB'F'$ یک لوزی به طول ضلع a و قطرهای $2b$ و $2c$ است و همچنین چهارضلعی $AB'A'B$ یک لوزی به طول ضلع $\sqrt{a^2 + b^2}$ و قطرهای $2a$ و $2b$ است.



دایره

وضعیت دایره و بیضی

طول قطعه مماس بر دایره از نقطه واقع در بیرون دایره

وضعیت خط نسبت به دایره

معادله دایره در حالت‌های مختلف

تعریف دایره و معادله آن

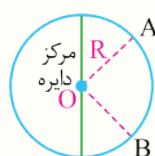
وضعیت دو دایره نسبت به هم

معادله وتر مشترک دو دایره

وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم

شرط دایره بودن

تعریف دایره و معادله آن



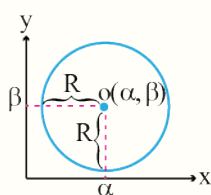
$$OA = OB = R$$

مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از نقطه ثابت O به اندازه R باشد را یک دایره می‌نامند و به صورت $C(O, R)$ نمایش می‌دهند.
 O مرکز دایره و R شعاع آن است.



■ معادله استاندارد دایره:

معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع R به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است.



مساحت دایره $S = \pi R^2$

محیط دایره $P = 2\pi R$

در حالت خاص، اگر مرکز دایره، مبدأ مختصات باشد، معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 = R^2$ می‌باشد.

نکته اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ مختصات دو سر یک پاره‌خط باشند، آنگاه مختصات وسط پاره‌خط از رابطه $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$ به دست می‌آید.

■ معادله گسترده دایره: اگر در معادله استاندارد دایره، اتحادها را باز کنیم، معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در می‌آید که معادله گسترده دایره نام دارد.

معادله استاندارد دایره: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

معادله گسترده دایره: $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4$

توجه در معادله گسترده دایره باید ضریب x^2 و y^2 برابر یک باشد.

معادله گسترده دایره را با استفاده از اتحاد مربع کامل می‌توان به معادله استاندارد تبدیل کرد.

معادله گسترده دایره: $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$

معادله استاندارد دایره $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ $\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 12 + 4 + 9 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$

معادله استاندارد دایره	معادله گسترده دایره
$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$
مرکز (α, β)	مرکز $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$
شعاع $= R$	شعاع $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$

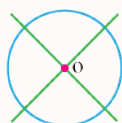
شرط دایره بودن

در معادله گسترده $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ داریم:

$a^2 + b^2 > 4c$	معادله یک دایره است.
$a^2 + b^2 = 4c$	معادله یک نقطه است.
$a^2 + b^2 < 4c$	معادله تهی است.

توجه در معادله گسترده، اگر $c \leq 0$ باشد، معادله حتماً مربوط به یک دایره است.

نکته برای یافتن نقاط برخورد دایره با محور x ها، در معادله دایره به جای y ، صفر قرار می‌دهیم و برای یافتن نقاط برخورد دایره با محور y ها، در معادله دایره به جای x ، صفر قرار می‌دهیم.



نکته محورهای تقارن دایره، همان قطرهای دایره هستند. بنابراین، نقطه برخورد آن‌ها مرکز دایره است.

خطوط عمود بر دایره همان قطرهای دایره هستند که از مرکز دایره می‌گذرند.



معادله دایره در حالت‌های مختلف

۱. معادله دایره با داشتن سه نقطه از آن:

برای به دست آوردن معادله دایره‌ای که از سه نقطه A, B, C می‌گذرد، معادله دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر گرفته و سپس با قرار دادن مختصات نقاط A, B, C در معادله دایره و حل معادلات به دست آمده، ضرایب a, b, c را به دست می‌آوریم.

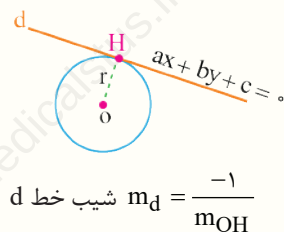
۲. معادله دایره با داشتن دو نقطه از دایره و رابطه‌ای بین مختصات مرکز دایره (α, β) :

با توجه به اینکه فاصله مرکز دایره از نقاط روی دایره برابر شعاع دایره است، فاصله مرکز دایره از این دو نقطه را به دست آورده و مساوی هم قرار می‌دهیم.

۳. معادله دایره با داشتن مرکز دایره و خط مماس بر دایره:

اگر خط $ax + by + c = 0$ بر دایره به مرکز $O(x_0, y_0)$ مماس باشد، آن‌گاه فاصله مرکز دایره تا خط، با شعاع دایره برابر است.

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



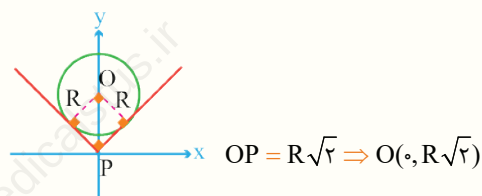
نکته عمودمنصف هر وتر از دایره، از مرکز دایره عبور می‌کند.

۴. معادله دایره مماس بر محورهای مختصات:

$(x - \alpha)^2 + (y - R)^2 = R^2$	الف) مماس بر محور x ها:
$(x - R)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$	ب) مماس بر محور y ها:
$(x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2$ $(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2$ $(x + R)^2 + (y + R)^2 = R^2$ $(x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2$	پ) مماس بر هر دو محورهای مختصات:

۵. معادله دایره مماس بر نیمسازها:

اگر دایره‌ای بر نیمسازهای ربع اول و دوم مماس باشد، باید مرکز دایره روی محور y ها باشد.



$(0, R\sqrt{2})$	مرکز دایره مماس بر نیمساز اول و دوم
$(-R\sqrt{2}, 0)$	مرکز دایره مماس بر نیمساز دوم و سوم
$(0, -R\sqrt{2})$	مرکز دایره مماس بر نیمساز سوم و چهارم
$(R\sqrt{2}, 0)$	مرکز دایره مماس بر نیمساز چهارم و اول



۶ معادله دایره مماس بر دو خط موازی:

فاصله دو خط موازی مماس بر دایره، برابر قطر دایره است و مرکز دایره روی خط $ax + by = \frac{c+c'}{2}$ قرار دارد.

$$r = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم

معادله گسترده دایره: $f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

نقطه بیرون دایره	نقطه روی دایره	نقطه درون دایره
$OA > r$	$OA = r$	$OA < r$
$f(x_A, y_A) > 0$	$f(x_A, y_A) = 0$	$f(x_A, y_A) < 0$

وضعیت خط نسبت به دایره

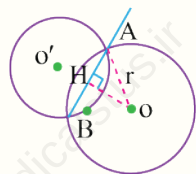
خط، مماس بر دایره است.	خط و دایره متقاطعند	خط، دایره را قطع نمی‌کند.
$OH = r$	$OH < r$ $AB = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$	$OH > r$

نکته اگر معادله خط را در معادله دایره قرار دهیم، یک معادله درجه دومی حاصل می‌شود که با محاسبه Δ می‌توان وضعیت خط نسبت به دایره را تعیین کرد.

$\Delta > 0$	خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. ریشه‌های معادله تلاقی همان طول نقاط تلاقی است.
$\Delta = 0$	خط بر دایره مماس است و ریشه مضاعف معادله، طول نقطه تماس آن‌ها است.
$\Delta < 0$	خط، دایره را قطع نمی‌کند.

معادله وتر مشترک دو دایره

اگر دو دایره متقاطع باشند و در معادله گسترده آن‌ها، ضرایب x^2 و y^2 برابر یک باشد، با تفاضل معادلات دو دایره، معادله وتر مشترک (پاره خط AB) به دست می‌آید.



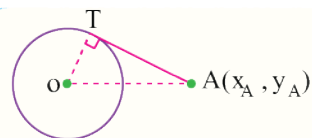
$$AH = \sqrt{r^2 - OH^2}$$

$$AB = 2AH = 2\sqrt{r^2 - OH^2}$$

طول وتر مشترک

از برخورد دایره با وتر مشترک، دو نقطه برخورد A و B به دست می‌آید که فاصله این دو نقطه همان طول وتر مشترک است.

طول قطعه مماس بر دایره از نقطه واقع در بیرون دایره



$$AT = \sqrt{(AO)^2 - r^2}$$

طول قطعه مماس

نکته اگر $f(x_0, y_0) = 0$ فرم گسترده دایره باشد، طول قطعه مماس بر دایره از نقطه A بیرون دایره برابر است با: $AT = \sqrt{f(x_A, y_A)}$



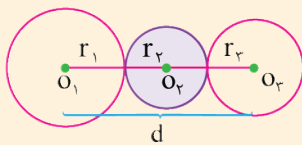
وضعیت دو دایره نسبت به هم



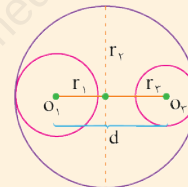
برای بررسی این موضوع، فاصله دو مرکز دایره را با $r + r'$ و $|r - r'|$ مقایسه می‌کنیم. پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را بهم وصل می‌کند خط‌المرکزین نامیده می‌شود و با d نمایش داده می‌شود.

	$d > r + r'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = r + r'$	دو دایره مماس بیرون
	$ r - r' < d < r + r'$	دو دایره متقاطع
	$d = r - r' $	دو دایره مماس درون
	$d < r - r' $	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دو دایره هم‌مرکز

نکته با توجه به شکل، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین دایره مماس بر دو دایره متخارج به صورت زیر است:



$$d = r_1 + 2r_2 + r_3 \Rightarrow 2r_2 = d - r_1 - r_3$$



$$2r_2 = r_1 + d + r_3$$

وضعیت دایره و بیضی



بیضی درون دایره و مماس بر آن	دایره و بیضی متقاطع‌اند	دایره درون بیضی و مماس بر آن
دایره $r = a$	$b < r < a$	دایره $r = b$



هندسه تحلیلی

مثلت مختصات

فاصله نقطه
از خط

قرینه نقطه

فاصله دو نقطه

وضعیت دو خط
نسبت به هم

خط و
معادله خط

دستگاه مختصات

دستگاه مختصات

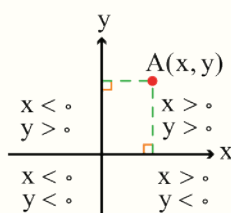
دستگاه مختصات: دو خط عمود بر هم که در مبدأ مختصات متقاطع اند. این دو خط صفحه را به چهار بخش تقسیم می کنند. محور افقی، x و محور عمودی، y نام دارد. به دستگاه مختصات، دستگاه دکارتی هم گفته می شود.



به هر یک از این چهاربخش، **ربع** گفته می شود.

مختصات نقطه‌ای مانند A را به صورت (x, y) نمایش می دهند.

علامت x و y در هر یک از ربع ها به صورت زیر است:



اگر نقطه A روی محور x باشد، مختصات آن به صورت $(x, 0)$ خواهد بود.

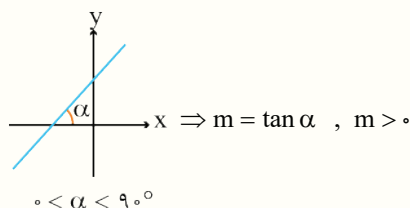
اگر نقطه A روی محور y باشد، مختصات آن به صورت $(0, y)$ خواهد بود.

توجه: نقاطی که روی محورها قرار دارند، جزو هیچ کدام از نواحی دستگاه مختصات محسوب نمی شوند.

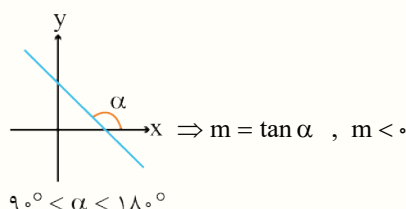
خط و معادله خط

در سال نهم، مطالبی در مورد خط خواندیم! در این قسمت علاوه بر مرور مطالب متوسطه اول می خواهیم اطلاعاتمان در مورد خط را تکمیل کنیم. قبل از هر چیزی باید با «شیب» آشنا بشیم.

شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x تشکیل می دهد و معمولاً آن را با m نشان می دهند.

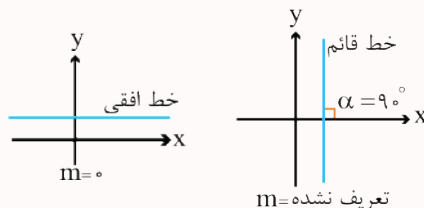


■ **خط صعودی:**



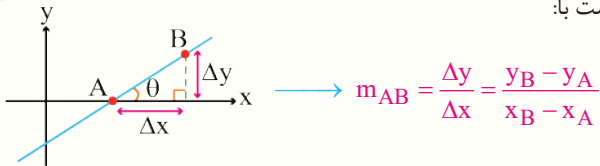
■ **خط نزولی:**

نکته: طبق مطالب فوق، شیب خطوط افقی برابر «صفر» و شیب خطوط عمودی «تعریف نشده» خواهد بود.





شیب خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد برابر است با:



می‌توان گفت «شیب، برابر است با نسبت تغییرات عرض (Δy) به تغییرات طول (Δx)» این مفهوم در فیزیک خیلی به دردتون می‌خوره!

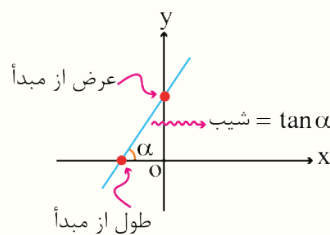
حالا که با شیب آشنا شدیم، بریم که «نوشتن معادله خط» را با هم یاد بگیریم. قبلش باید با فرم‌های معادله خط آشنا بشید!

یکی از حالت‌های نمایش معادله خط « $y = mx + b$ » است، که در آن ضریب x یعنی m شیب خط و b عرض از مبدأ است.

دومین حالت نمایش معادله خط « $ax + by + c = 0$ » است که در این حالت، شیب برابر است با $-\frac{a}{b}$ و عرض از مبدأ $-\frac{c}{b}$ است.

عرض از مبدأ: نقطه برخورد با محور y ها را گویند. برای به دست آوردن عرض از مبدأ کافی است $x = 0$ را در معادله خط قرار دهیم.

طول از مبدأ: نقطه برخورد با محور x ها را گویند. برای به دست آوردن طول از مبدأ کافی است $y = 0$ را در معادله خط قرار دهیم.



■ نوشتن معادله خط در ۴ حالت:

با داشتن شیب خط و مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$:

در این حالت معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

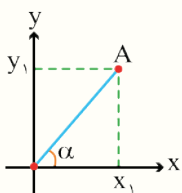
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

با داشتن مختصات دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از خط:

در این حالت معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1)$$

با داشتن زاویه بین خط و جهت مثبت محور x ها و مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$: بدون شرح!

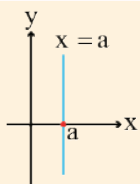


$$y - y_1 = (\tan \alpha)(x - x_1)$$

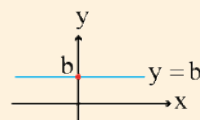
با داشتن عرض از مبدأ و طول از مبدأ: معادله خط را به صورت زیر می‌نویسیم:



$$\frac{y}{p} + \frac{x}{q} = 1$$



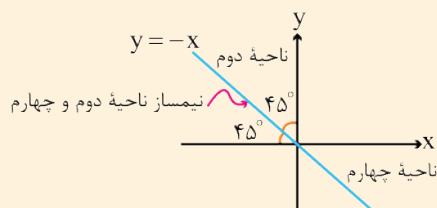
معادله خط موازی با محور y ها: $x = a$



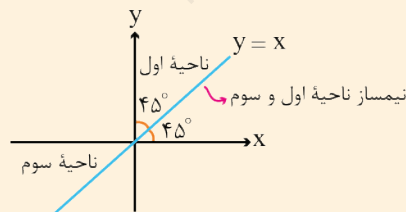
معادله خط موازی با محور x ها: $y = b$



معادله نیمساز ناحیه دوم و چهارم: $y = -x$



معادله نیمساز ناحیه اول و سوم: $y = x$



معادله کلی خطوط گذرنده از مبدأ مختصات به صورت $y = mx$ است.

اگر سه نقطه $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ بر روی یک خط راست قرار گرفته باشند (یا به اصطلاح بر یک استقامت باشند)، آن گاه داریم:

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

با معلوم بودن عرض از مبدأ (p) و طول از مبدأ (q) شیب از رابطه مقابل به دست می آید: $m = -\frac{p}{q}$

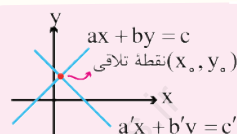
اگر طول از مبدأ خطی برابر q و عرض از مبدأ آن برابر p باشد، مساحت محدود بین آن خط و دستگاه مختصات برابر است با:

$$S = \frac{|p \times q|}{2}$$

وضعیت دو خط نسبت به هم

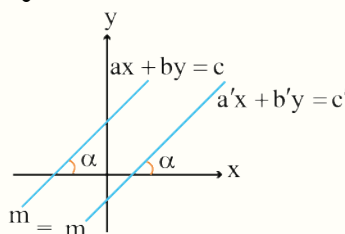
می خواهیم وضعیت دو خط $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ را نسبت به هم در حالت های زیر بررسی کنیم:

■ **دو خط متقاطع:** دو خط بالا در صورتی متقاطع اند که شیب های نابرابر داشته باشند. به عبارتی: $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$



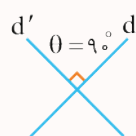
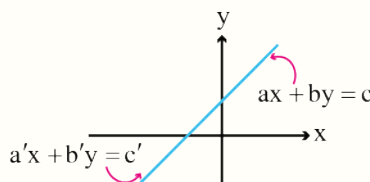
توجه: مختصات نقطه تلاقی در معادله هر دو خط صدق می کند.

■ **دو خط موازی:** دو خط در صورتی موازی اند که دارای شیب های برابر باشند. به عبارتی: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$



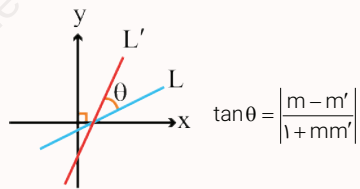
توجه: با معلوم بودن شیب یکی از خط های موازی می توان شیب خط دیگر را به دست آورد.

■ **دو خط منطبق:** دو خط در صورتی بر هم منطبق اند که: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$



نکته: دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ با شیب های m و m' زمانی بر هم عمودند که:

$$m \times m' = -1, \quad m = -\frac{1}{m'} \\ aa' + bb' = 0$$



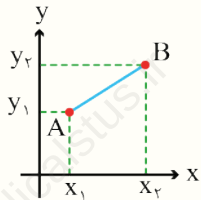
نکته اگر دو خط با شیب‌های m و m' متقاطع باشند و θ زاویه حاده بین آن‌ها باشد، داریم:

$$\tan \theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

فاصله دو نقطه



■ **فاصله دو نقطه:** برای به دست آوردن فاصله دو نقطه به مختصات $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

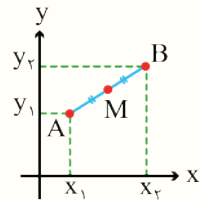


$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

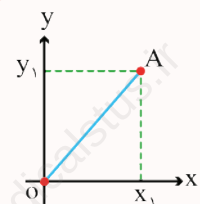
$$AB = \sqrt{(\text{اختلاف عرض‌ها})^2 + (\text{اختلاف طول‌ها})^2}$$

✓ برای به خاطر سپاری بهتر اینجوری ببینید، بهتره:

■ **نقطه وسط:** مختصات نقطه وسط پاره خط واصل بین $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ به صورت زیر است:



$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

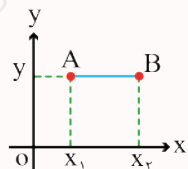


$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

نکته سه حالت خاص داریم:

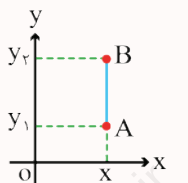
(الف) فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از مبدأ مختصات $O(0, 0)$ برابر است با:

(ب) اگر دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هم‌عرض $y_1 = y_2$ باشند، داریم:



$$AB = |x_2 - x_1|$$

(ج) اگر دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هم‌طول $x_1 = x_2$ باشند، داریم:



$$AB = |y_2 - y_1|$$

قرینه نقطه



■ **نسبت به نقطه:** قرینه نقطه $A(x_1, y_1)$ نسبت به نقطه $M(x_M, y_M)$ به صورت زیر است:

$$A'(2x_M - x_1, 2y_M - y_1)$$

در حالت خاص، قرینه نقطه $A(x_1, y_1)$ نسبت به مبدأ $O(0, 0)$ به صورت $A'(-x_1, -y_1)$ است.

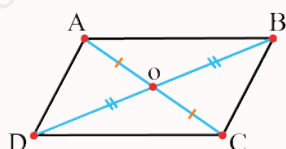
■ **قرینه نسبت به خط:** برای این کار، ۳ گام زیر را برمی‌داریم:

۱ ابتدا باید معادله خطی را که از نقطه $A(x_1, y_1)$ گذشته و بر خط مورد نظر عمود باشد، می‌نویسیم.

۲ حالا نقطه تلاقی دو خط عمود بر هم را به دست می‌آوریم و آن را A' می‌نامیم.

۳ و در گام آخر، قرینه نقطه A را نسبت به نقطه A' به دست می‌آوریم.





$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

نکته در هر متوازی الاضلاع، مجموع مولفه‌های مختصات رئوس روبه‌روی هم، برابرند.

نکته فوق در مورد مربع، مستطیل و لوزی نیز صدق می‌کند.

فاصله نقطه از خط

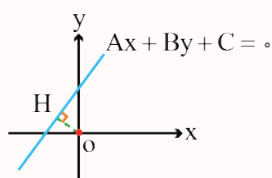
فاصله نقطه از خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که نقطه را به خط وصل می‌کند، که این کوتاه‌ترین پاره‌خط، همان خط عمودی است که از نقطه به خط وارد می‌شود.

$A(x_1, y_1)$

$Ax + By + C = 0$

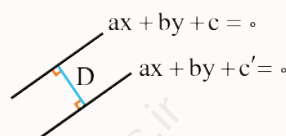
برای پیدا کردن فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط $Ax + By + C = 0$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Rightarrow AH = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



$$\Rightarrow OH = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

نکته در حالت خاص، فاصله مبدأ مختصات از خط $Ax + By + C = 0$ به صورت زیر قابل محاسبه است:



برای محاسبه فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ در مرحله اول باید ضرایب x و y را یکسان

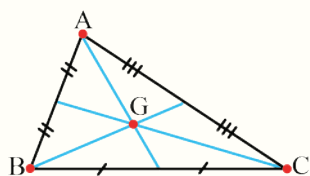
کرده و سپس فاصله دو خط را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\Rightarrow D = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثلث مختصاتی

اگر سه نقطه $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ سه رأس یک مثلث باشند، آن‌گاه برای پیدا کردن مساحت مثلث مورد نظر، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:

$$S_{\Delta} = \frac{|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|}{2} = \frac{|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2)|}{2}$$



بد نیست بدانید که مختصات مرکز ثقل (همرسی میانه‌ها) مثلث مقابل برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \end{cases}$$



Lined area for writing notes, consisting of multiple horizontal blue lines.



فصل ۹: آمار و احتمال

خب رسیدیم به آخرین فصل از کتاب ریاضی تاپکان:

چند نکته رو در مورد این فصل یادت باشه:

- ۱) این بخش ها توی سال های گذشته به طور متوسط ۳ یا ۴ سوال کنکور (عموماً با سطح متوسط) ازش طرح شده پس میشه رو جواب داشتن سرمایه گذاری کرد.
- ۲) قسمت های جایگشت و ترکیب توی بخش شمارش بدون شمردن، احتمال شرطی و احتمال کل توی بخش احتمال و معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی توی بخش آمار، از مهمترین ها هستن پس اونا رو خوب یاد بگیر.
- ۳) سؤالی این فصل رو تینن اما توی بعضی از سوالا محاسبات یکم زیاد میشن، پس بهتره یکم رو محاسبات بیشتر دقت کنی.

کنکور سراسری	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ - تویب اول	۱۴۰۲ - تویب دوم
تعداد سؤال	۳	۴	۴	۴	۴
مباحث مطرح شده در سؤال	ترکیب احتمال مقدماتی ضرب تغییرات	ترکیب جایگشت دوری احتمال مقدماتی احتمال شرطی	ترکیب احتمال شرطی میان و میانگین انحراف معیار	احتمال مقدماتی احتمال شرطی احتمال کل ضرب تغییرات	جایگشت احتمال مقدماتی احتمال کل میانگین و انحراف معیار



شمارش بدون شمردن

ترتیب

ترکیب

جایگشت

اصل ضرب و اصل جمع

اصل ضرب و اصل جمع

اصل ضرب: اگر عمل w_1 را بتوان به n_1 طریق و بعد از آن عمل w_2 را به n_2 طریق و ... و عمل w_k را به n_k طریق بتوان انجام داد و هیچ جفت از این عمل‌ها را نتوان همزمان انجام داد، آن گاه این k عمل را می‌توان به $n_1 n_2 \dots n_k$ طریق انجام داد.

عمل w_1 و w_2 و ... و w_n

اصل جمع: اگر عمل w_1 را بتوان به n_1 طریق و بعد از آن عمل w_2 را بتوان به n_2 طریق و ... و عمل w_k را بتوان به n_k طریق انجام داد و هیچ جفت از این عمل‌ها را نتوان همزمان انجام داد، آن گاه یکی از این کارها را می‌توان به $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ طریق انجام داد.

عمل w_1 یا w_2 یا ... یا w_n

توجه: نشانه استفاده از اصل ضرب، حرف «و» و نشانه استفاده از اصل جمع کلمه «یا» می‌باشد.

نکته: تعداد توابع $f: A \rightarrow B$ در صورتی که $n(A) = n$ و $n(B) = m$ ، برابر است با: m^n .

نکته: تعداد توابع یک‌به‌یک $f: A \rightarrow B$ در صورتی که $n(A) = n$ و $n(B) = m$ ، برابر است با: $\frac{m!}{(m-n)!}$.

جایگشت یک در میان:

اگر بخواهیم دو گروه از اشیاء را یک در میان در یک ردیف قرار دهیم، باید یا تعداد افراد دو گروه برابر باشد و یا یک واحد اختلاف داشته باشند که:

۱) اگر تعداد افراد دو گروه یکسان بود، جایگشت هر گروه را جداگانه حساب کرده و در هم ضرب می‌کنیم و در آخر باید این جواب را در ۲ ضرب کرد. مثلاً سه دختر و سه پسر را در یک صف به $3! \times 3! \times 2$ طریق می‌توان یک در میان قرار داد. در واقع، ابتدا می‌توان پسر را به $3!$ طریق قرار دهیم و سپس سه دختر را در سه مکان ایجاد شده بین پسرها به $3!$ طریق قرار داد. ولی چون تعداد پسر و دختر برابر است، می‌توان ابتدا دخترها را در صف قرار داد (یعنی اول صف دختر باشد) به همین دلیل جواب را در ۲ ضرب می‌کنیم.

۲) اگر تعداد افراد دو گروه یکسان نبود، جایگشت هر گروه را حساب کرده و حاصل‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

مثلاً ارقام زوج ۰، ۲، ۴، ۶ و ارقام فرد ۱، ۳، ۵ را به $4! \times 3! = 144$ طریق می‌توان یک در میان قرار داد.

جایگشت با تکرار:

اگر n شیء داشته باشیم که n_1 تای آن شبیه هم و n_2 تای دیگر شبیه هم $n_3, \dots, n_k$ تای دیگر هم شبیه هم باشند، آن گاه تعداد جایگشت‌های

این n شیء برابر است با: $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$

$$\frac{7!}{3! \times 2!}$$

تعداد ۱های تکراری تعداد ۲های تکراری

مثلاً تعداد اعداد ۷ رقمی که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۱، ۲، ۲ می‌توان نوشت برابر است با:

نکته: هنگام استفاده از فرمول جایگشت با تکرار، در ساختن عدد وقتی که k رقم صفر وجود داشته باشد، باید در صورت کسر به جای $n!$ از

$(n-k) \times (n-1)!$ استفاده کرد.

جایگشت دوری:

تعداد حالاتی که n نفر می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند برابر است با: $(n-1)!$

مثلاً ۵ نفر به $(5-1)! = 4! = 24$ طریق می‌توانند دور یک میز گرد قرار بگیرند.



ترکیب



$$\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز برابر است با:
توجه کنید که ترتیب انتخاب اشیاء مهم نمی باشد.



توجه به خاطر سپردن موارد زیر در محاسبه، مفید است.

$$\begin{cases} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 6, \underbrace{\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}}_{\text{رابطه پاسکال}} = \binom{n}{r} \end{cases}$$

رابطه پاسکال

ترتیب



$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$P(n, r)$ ، تعداد حالات انتخاب r شیء از n شیء متمایز، به طوری که ترتیب انتخاب مهم باشد، برابر است با:

مثلاً فرض کنید می خواهیم از بین ۱۰ نفر کاندید، ۳ نفر را انتخاب کنیم، به طوری که نفر اول رئیس و نفر دوم معاون و نفر سوم حسابدار باشد. در این جا ترتیب انتخاب اهمیت دارد و این کار به $P(10, 3) = \frac{10!}{7!}$ طریق امکان پذیر است که با اصل ضرب هم به همین نتیجه خواهیم رسید زیرا برای انتخاب رئیس ۱۰ حالت و برای انتخاب معاون ۹ حالت و برای انتخاب حسابدار ۸ حالت داریم، یعنی جواب برابر است با: $10 \times 9 \times 8$ که همان $\frac{10!}{7!}$ است.



احتمال



فضای نمونه‌ای

اگر نتیجه یک آزمایش، قبل از وقوع مشخص نباشد، ولی مجموعه نتایج ممکن آن مشخص باشد، آن را آزمایش تصادفی می‌نامند و به مجموعه همه نتایج ممکن، فضای نمونه‌ای گفته می‌شود و تعداد اعضای این مجموعه را با $n(S)$ نشان می‌دهیم.

چند تا از فضاهای نمونه‌ای مهم:

۱ اگر یک سکه را n بار پرتاب کنیم یا n سکه را با هم پرتاب کنیم $\leftarrow n(S) = 2^n$

۲ برای تولد n فرزند در یک خانواده $\leftarrow n(S) = 2^n$

۳ اگر تاسی را n بار پرتاب کنیم یا n تاس را با هم پرتاب کنیم $\leftarrow n(S) = 6^n$

تعریف پیشامد

هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S را یک پیشامد تصادفی می‌گوییم. پس اگر S دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن یعنی 2^n ، در واقع همان تعداد پیشامدهایی است که می‌توان روی S تعریف کرد.

پیشامد غیرممکن: $\emptyset \subseteq S$ را یک پیشامد نشدنی یا غیرممکن می‌نامند.

پیشامد قطعی: $S \subseteq S$ را پیشامد قطعی یا حتمی می‌گوییم.

مثلاً در پرتاب یک تاس معمولی، پیشامد A را مبنی بر این که عدد رو شده صفر باشد، یک پیشامد نشدنی و پیشامد B را مبنی بر این که عدد رو شده مساوی یک باشد، یک پیشامد حتمی است.

اعمال روی پیشامدها

فرض کنیم که A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند:

۱ **اجتماع دو پیشامد:** $A \cup B$ ، پیشامدی است که در آن حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد. (A یا B یا هر دو رخ دهند).

۲ **اشتراک دو پیشامد:** $A \cap B$ ، پیشامدی است که در آن هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

۳ **تفاضل دو پیشامد:** $A - B$ ، پیشامدی است که در آن A رخ دهد ولی B رخ ندهد.

۴ **متمم یک پیشامد:** A' ، پیشامدی است که در آن A رخ ندهد.

پیشامدهای ناسازگار

تعریف: دو پیشامد A و B را ناسازگار گویند، هرگاه $A \cap B = \emptyset$ ، یا به عبارتی A و B هیچ‌گاه با هم رخ نمی‌دهند.

مثلاً A و A' همیشه ناسازگارند، زیرا: $A \cap A' = \emptyset$.

محاسبه احتمال یک پیشامد

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال رخداد A را با $P(A)$ نشان داده و برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

احتمال مربوط به فرزند و سکه

احتمال این که در یک خانواده n فرزندی، k فرزند پسر (k فرزند دختر) باشند برابر است با:

$$P = \frac{\binom{n}{k} \rightarrow n(A)}{2^n \rightarrow n(S)}$$

و احتمال این که در پرتاب n سکه با هم n بار پرتاب یک سکه، k بار رو یا k بار پشت بیاید برابر است با:

$$P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

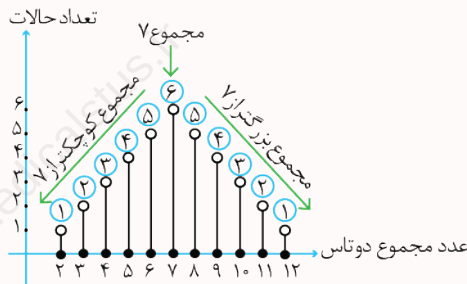


نکته به طور کلی، اگر پرتابها فرد باشد، چون امکان برابر بودن تعداد روها و پشتها وجود ندارد، دقیقاً در نصف حالات تعداد روها بیشتر و در نصف حالات، تعداد پشتها بیشتر است.

احتمال مربوط به تاس:

می‌دانیم در پرتاب n تاس با هم یا n بار پرتاب یک تاس، داریم: $n(S) = 6^n$.

نکته یکی از مسائل پر تکرار در مورد تاس، حالتی است که یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. (یا دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم) و پیشامد ما مجموع دو عدد رو شده است.



در این حالت، بهتر است از نمودار مقابل کمک بگیریم.

اولین چیزی که می‌توان از این نمودار متوجه شد، این است که تعداد حالات مجموع دو تاس کوچکتر از ۷ برابر ۱۵ است و تعداد حالات مجموع بزرگتر از ۷ هم نیز برابر ۱۵ است.

تفسیر نمودار: در پرتاب دو تاس، هر مجموعی را که نیاز داریم پیدا کنیم، ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که مجموع دو تاس بزرگتر از یک و کوچکتر از ۱۳ است. حال، آن مجموع به هر کدام از اعداد ۱ یا ۱۳ نزدیکتر بود، فاصله‌اش تا این عدد، تعداد حالات این مجموع را به شما می‌دهد.

نکته در پرتاب یک تاس، برای پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، بزرگتر از ۳ آمدن و کوچکتر از ۴ آمدن و اول آمدن و غیر اول آمدن، همگی شانسی برابر $\frac{1}{2}$ داریم و اگر n تاس را با هم پرتاب کنیم (یک تاس را n بار پرتاب کنیم)، در این صورت، برای محاسبه احتمال k بار رخ دادن هر کدام از پیشامدهایی

که گفتیم، می‌توان از فرمول $P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ استفاده کرد. (فرمولی که برای سکه یا فرزند استفاده می‌کردیم).

مسائل مربوط به جعبه و مهره

در حل مسائل مربوط به خارج کردن k مهره از درون جعبه‌ای با n مهره، سه نوع فضای نمونه‌ای وجود دارد:

$$n(S) = \binom{n}{k}$$

۱ اگر k مهره را با هم خارج کنیم:

۲ اگر k مهره را یکی یکی و بدون جای گذاری خارج کنیم، در هر بار خارج کردن یک مهره، فضای نمونه‌ای کاهش می‌یابد:

$$n(S) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

$$n(S) = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_k = n^k$$

۳ اگر k مهره را یکی یکی و با جای گذاری خارج کنیم:

نکته اگر تعدادی مهره را از یک جعبه خارج و بدون دیدن کنار بگذاریم، هیچ تاثیری روی فضای نمونه‌ای نمی‌گذارد و برای حل مسأله مطرح شده، فرض می‌کنیم که آن مهره‌ها هنوز در جعبه هستند.

قوانین احتمال

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند:

$$1 \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2 \quad P(S) = 1$$

$$3 \quad P(\emptyset) = 0$$

$$4 \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال این که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهند.

$$5 \quad P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

(احتمال این که A رخ دهد ولی B رخ ندهد)

$$6 \quad P(A) = 1 - P(A') \quad \text{یا} \quad P(A') = 1 - P(A)$$

احتمال این که A رخ ندهد



دو پیشامد مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل گویند هرگاه وقوع یکی در وقوع دیگری بی‌تاثیر باشد و A و B مستقل‌اند، هرگاه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ و برعکس.

احتمال شرطی

فرض کنیم A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت، احتمال وقوع A به شرط این که B رخ داده باشد را با نماد $P(A|B)$ نشان داده و از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

توجه وقتی یک شرط روی فضای نمونه‌ای S اعمال می‌شود، در واقع تعداد اعضای S کاهش پیدا می‌کند، مثلاً می‌دانیم تعداد اعضای S برای تولد سه فرزند برابر است با: $n(S) = 2^3 = 8$ اما اگر در صورت مسأله، گفته شود که می‌دانیم یکی از این سه فرزند حتماً پسر است، در واقع یک شرط روی فضای نمونه‌ای گذاشته است و حالت هر سه فرزند دختر حذف شده و $n(S) = 7$ است. یا مثلاً اگر بدانیم در پرتاب یک تاس عدد رو شده فرد است، در واقع فضای نمونه‌ای کاهش یافته به صورت $S = \{1, 3, 5\}$ است.

توجه اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، در این صورت:

۱ $P(A|B) = P(A)$

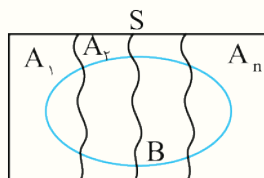
۲ $P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B)$ یعنی: A' و B مستقل‌اند، یعنی:

۳ $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$ یعنی: A' و B' مستقل‌اند، یعنی:

قانون احتمال کل

فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی باشند که فضای نمونه‌ای S را افراز می‌کنند، با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه B داریم:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \dots + P(A_n)P(B|A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$



البته در مسائل احتمال کل (مسائلی که چند تصادف پشت سر هم رخ داده‌اند) بهتر است مسأله را با نمودار درختی حل کنیم. و استفاده از فرمول توصیه نمی‌شود، به این صورت که احتمال‌ها را در شاخه‌های متوالی در هم ضرب کرده و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.



مقدمه ای بر علم آمار

متغیر و انواع آن

شاخص توده بدن

جامعه و نمونه

تعاریف

تعاریف

همین اول کار بریم چند تا تعریف ساده رو با هم مرور کنیم ...

آمار: مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: به مجموعه روش هایی گفته می شود که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود. به عبارت دیگر مراحل علم آمار عبارتست از:



حالا بیا دو تا سؤال مهم ازت بپرسم بینم چقدر مفهومی خوندي ()

اولین قدم در استفاده از علم آمار چیه؟ آفرین! جمع آوری اعداد و ارقام (داده ها)

هدف (نتیجه) استفاده از علم آمار چیه؟ براوو! نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی برای آینده (خوب بله یا ناخوب ...)

جامعه و نمونه

جامعه (جمعیت): به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن ها تحقیق می کنیم، جامعه یا جمعیت گفته می شود و به هر یک از این افراد یا اشیاء، عضو جامعه می گوئیم.

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه را اندازه یا حجم جامعه می نامیم.

نمونه: بخشی (زیرمجموعه ای) از جامعه را که برای مطالعه انتخاب می شود، نمونه می گوئیم و هر یک از افراد یا اشیاء انتخاب شده را عضو نمونه می نامیم.

اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه یا حجم نمونه می گوئیم.

نکته: اندازه نمونه همواره کوچک تر یا مساوی اندازه جامعه است.

نکته: اگر اندازه نمونه با اندازه جامعه برابر باشد، می گوئیم سرشماری انجام داده ایم.

شاخص توده بدن (BMI)

برای این که میزان چاقی یک فرد را بسنجیم، از معیاری به نام **شاخص توده بدن** استفاده می کنیم که به صورت زیر تعریف می شود:

$$BMI = \frac{W}{H^2}$$

BMI: شاخص توده بدن

W: وزن افراد بر حسب کیلوگرم

H: قد افراد بر حسب متر

تست: قد شخصی ۱۷۳ سانتی متر و شاخص توده بدن او ۲۸/۴ است. وزن این شخص حدوداً چند کیلوگرم است؟

۸۶ (۴)

۸۵ (۳)

۸۴ (۲)

۸۳ (۱)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{شاخص توده بدن} = 28/4 \\ \text{قد شخص} = 173 \text{ cm} = 1/73 \text{ m} \end{array} \right. \Rightarrow BMI = \frac{W}{H^2} \Rightarrow 28/4 = \frac{W}{(1/73)^2} \Rightarrow W = (1/73)^2 \times 28/4 \approx 85$$

پاسخ:

بنابراین گزینه ۳ صحیح است. ✓

متغیر و انواع آن

متغیر: به ویژگی خاصی از اعضای جامعه آماری که مورد بررسی و مطالعه قرار می گیرد، متغیر می گوئیم. متغیرها معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کنند. به عنوان مثال: سن، قد، رنگ مو ... افراد، یک متغیر است که معمولاً از یک فرد به فرد دیگر تغییر می کند.

مقدار متغیر: به عددی که به ویژگی یک عضو از جامعه نسبت داده می شود، مقدار متغیر می گوئیم.



انواع متغیرها:

۱ متغیرهای کمی ۲ متغیرهای کیفی

متغیرهای کمی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری باشند، متغیرهای کمی می‌نامیم. به عبارت دیگر متغیرهای کمی، متغیرهایی هستند که مقادیر عددی می‌گیرند و برای آن‌ها عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و ... قابل انجام است. مانند: وزن افراد، تعداد ساکنین یک شهر و ...

متغیرهای کیفی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نباشند و صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌روند، متغیرهای کیفی می‌نامیم. متغیرهای کیفی لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرند. مانند: گروه خونی افراد، جنسیت افراد، رنگ چشم افراد و ...
حالا وقتشه که انواع متغیرهای کمی و کیفی رو هم بشناسیم ...

انواع متغیرهای کمی:

متغیر کمی پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین a و b را نیز بتواند به خود بگیرد. مثلاً قد یک فرد می‌تواند $۱/۶$ متر، $۱/۷$ متر و یا هر عددی بین این دو رقم باشد.

مثال: سرعت خودرو، وزن افراد، شاخص توده بدن، دمای هوا در قله کوه و ...

متغیر کمی گسسته: متغیری است که پیوسته نباشد (نه بابا!! عجب نکته خفنی)

مثال: تعداد دانش آموزان یک مدرسه، تعداد سؤالات کنکور و ...

انواع متغیرهای کیفی:

متغیر کیفی ترتیبی: متغیری است که نوعی ترتیب طبیعی دارد. **مثال:**

- سطح تحصیلات یک فرد (دیپلم، فوق دیپلم، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

- مراحل رشد انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میانسال، کهن سال)

- میزان هوش یک فرد (زیاد، متوسط، کم)

- مقام یک ورزشکار در مسابقه (اول، دوم، سوم و ...)

متغیر کیفی اسمی: به متغیر کیفی که ترتیبی نباشد، متغیر کیفی اسمی می‌گوییم.

مثال: جنسیت افراد (زن و مرد)، انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی و برفی)

نکته: بعضی وقتا شناسایی نوع متغیر کمی پیچیده می‌شه و برای تشخیص اون باید به نوع بیان اون متغیر دقت کنیم. مثلاً در مورد بارندگی می‌تونیم متغیرهای پایین رو تعریف کنیم:

میزان بارندگی: یک متغیر کمی پیوسته است، چراکه میزان بارندگی همواره به صورت عددی بیان شده و می‌تواند هر مقداری را داشته باشد.

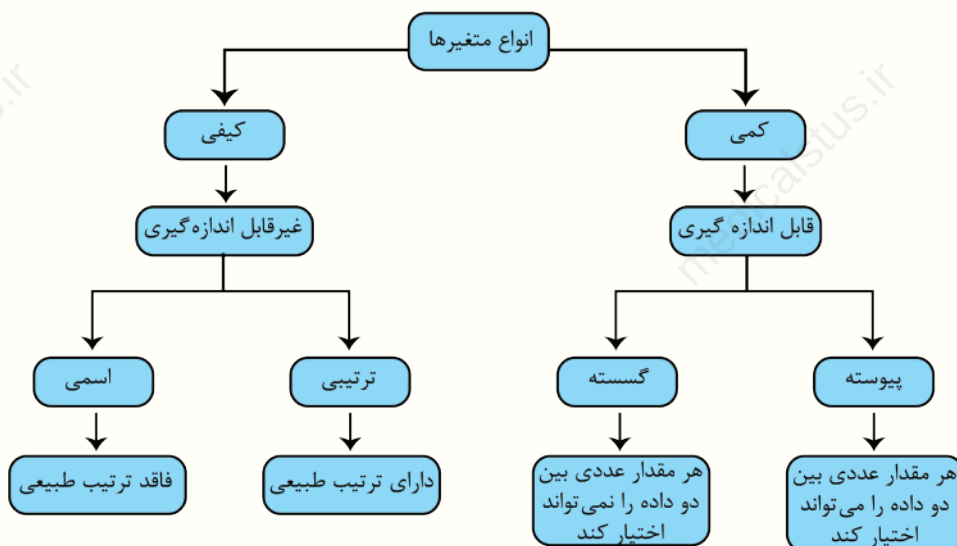
شدت بارندگی: یک متغیر کیفی ترتیبی است، چراکه شدت بارندگی می‌تواند به صورت کم، متوسط و زیاد بیان شود.

نوع بارندگی: یک متغیر کیفی اسمی است، چراکه نوع بارندگی می‌تواند به صورت باران، برف و ... باشد.

حالا به کمک چیزایی که گفتیم، به نظرت میزان آلودگی، شدت آلودگی و نوع آلودگی چه متغیرهایی هستن؟!



اگر پایه باشی به جمع بندی از این قسمت کنیم تا مطالب تو مغز مون بهتر دسته بندی بشن!





معیارهای گرایش به مرکز



تعریف میانگین

اگر n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را در اختیار داشته باشیم، میانگین (متوسط یا مرکز ثقل) داده ها را با نماد $\bar{x}$ نشان می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

توجه اگر میانگین n داده $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد، در این صورت مجموع داده ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow \text{مجموع داده ها: } x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n\bar{x}$$

روش های سریع برای محاسبه میانگین

- اگر داده های آماری، اعداد داشته باشند، برای محاسبه میانگین به صورت زیر عمل می کنیم:
 - ابتدا قسمت های اعشاری را با هم و قسمت های صحیح را با هم جمع می کنیم.
 - سپس حاصل به دست آمده را بر تعداد داده ها تقسیم کرده و میانگین را به دست می آوریم.
- اگر مقادیر داده های آماری بزرگ باشند، برای محاسبه میانگین به صورت زیر عمل می کنیم:
 - ابتدا یک عدد فرضی را حدس می زنیم (عددی که به داده ها نزدیک باشد)
 - سپس از تمامی داده ها عدد فرضی را کم می کنیم و داده های جدیدی را به دست می آوریم (به منفی یا مثبت بودن داده های جدید دقت شود).
 - میانگین داده های جدید را محاسبه کرده و نهایتاً میانگین جدید را با عدد فرض شده جمع می کنیم تا میانگین داده ها به دست آید.

ویژگی های میانگین

- میانگین چند داده آماری، همواره بین کوچک ترین و بزرگ ترین داده قرار دارد. به عنوان مثال؛ اگر کم ترین داده برابر ۱۰ و بیشترین داده برابر ۱۸ باشد، در این صورت میانگین داده ها بین ۱۰ و ۱۸ قرار دارد. یعنی: $10 < \bar{x} < 18$
- اگر همه داده ها با هم برابر باشند، میانگین داده ها نیز با آن ها برابر است. مثلاً اگر داده های آماری به صورت ۲، ۲، ۲، ...، ۲ باشد، میانگین داده ها نیز برابر ۲ است.
- اگر هر یک از داده های آماری را با مقدار ثابتی جمع یا تفریق کنیم، میانگین آن ها نیز با همان مقدار ثابت، جمع یا تفریق می گردد.
- اگر هر یک از داده های آماری را در مقدار ثابتی ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، میانگین آن ها نیز در همان عدد ضرب یا بر آن عدد تقسیم خواهد شد.
- در حالت کلی اگر $\bar{x}$ ، میانگین داده های آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ باشد، در این صورت میانگین داده های آماری $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ به صورت $a\bar{x} + b$ خواهد بود.
- میانگین داده ها، تحت تأثیر داده های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک که در آمار به آن ها **داده های دور افتاده (داده های پرت)** می گوئیم، قرار می گیرد. بنابراین اگر در بین داده های آماری، داده های دور افتاده وجود داشته باشد، برای ارزیابی بهتر داده ها، بهتر است که از میانگین استفاده نکنیم.



میانگین دو گروه داده آماری

فرض کنید، n داده آماری را با میانگین $\bar{x}_1$ در اختیار داریم و می‌خواهیم m داده آماری دیگر با میانگین $\bar{x}_2$ را به n داده اولیه اضافه، یا از میان آن‌ها حذف کنیم و داده‌های جدیدی را تشکیل دهیم. برای این منظور با حالت‌های زیر مواجه می‌شویم:

حالت ۱) اگر میانگین m داده اضافه شده یا حذف شده ($\bar{x}_2$)، با میانگین n داده اولیه ($\bar{x}_1$) برابر باشد، در این صورت میانگین داده‌های جدید، تغییر نمی‌کند. یعنی:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \bar{x}_1 = \bar{x}_2$$

حالت ۲) اگر میانگین m داده اضافه شده یا حذف شده ($\bar{x}_2$)، با میانگین n داده اولیه ($\bar{x}_1$) برابر نباشد، در این صورت برای به دست آوردن میانگین داده‌های جدید، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{n\bar{x}_1 \pm m\bar{x}_2}{n \pm m}$$

$n\bar{x}_1$: مجموع n داده اولیه

$m\bar{x}_2$: مجموع m داده اضافه شده یا حذف شده

توجه: در رابطه فوق، اگر m داده را به n داده اولیه اضافه کنیم، از علامت (+) و اگر m داده را از n داده اولیه حذف کنیم، از علامت (-) استفاده می‌کنیم.

اختلاف داده‌ها از میانگین (انحراف از میانگین)

فرض کنید میانگین داده‌های آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد. اگر از داده‌ای میانگین را کم کنیم، حاصل آن را انحراف از میانگین آن داده می‌نامیم. به عبارت دیگر اگر میانگین را از داده x_i کم کنیم، عبارت $(x_i - \bar{x})$ به دست می‌آید که به آن انحراف از میانگین داده x_i می‌گوییم. (i = شماره داده) حال اگر انحراف از میانگین تمام داده‌های آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را به دست آورده و با هم جمع کنیم، حاصل آن صفر خواهد بود، به عبارت دیگر همواره مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است، یعنی:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$$

تعریف میانه

میانه، عددی است که تعداد داده‌های قبل از آن با تعداد داده‌های بعد از آن برابر است و آن را با Q_2 نشان می‌دهیم و برای پیدا کردن میانه، ابتدا n داده آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را از کوچک به بزرگ مرتب کرده و داریم:

الف) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد:

عددی که در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد، میانه است.

عددی که در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد، $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ اُمین داده است.

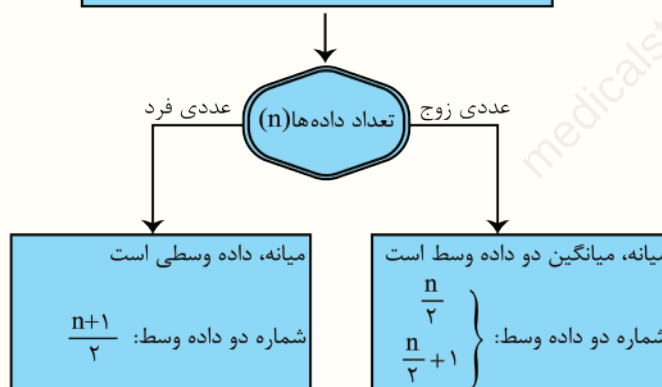
ب) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد:

میانگین دو عددی که در وسط داده‌ها قرار می‌گیرند، میانه است.

دو عددی که در وسط داده‌ها قرار می‌گیرند به ترتیب $\left(\frac{n}{2}\right)$ اُمین داده و $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ اُمین داده هستند.

بیان به جمع بندی کنیم:

داده‌های آماری را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم





ویژگی‌های میانه

- ۱ اگر هر یک از داده‌های آماری را با مقدار ثابتی جمع یا تفریق کنیم، میانه آن‌ها نیز با همان مقدار ثابت، جمع یا تفریق می‌گردد.
- ۲ اگر هر یک از داده‌های آماری را در مقدار ثابتی ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، میانه آن‌ها نیز در همان عدد ضرب یا بر آن تقسیم خواهد شد.
- ۳ در حالت کلی، اگر Q_2 میانه داده‌های آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ باشد، در این صورت میانه داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ به صورت $aQ_2 + b$ خواهد بود.

درک‌گوشی: پس تا این‌جا می‌تونیم بگیم هر بلایی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) که سر داده‌ها بیاریم، همون بلا عیناً سر میانگین و میانه هم می‌اد!

مثال: اگر میانه داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ برابر ۳ باشد، در این صورت میانه داده‌های $\frac{x_1}{2} + 1, \frac{x_2}{2} + 1, \dots, \frac{x_n}{2} + 1$ چقدر است؟

با توجه به داده‌های $\frac{x_1}{2} + 1, \frac{x_2}{2} + 1, \dots, \frac{x_n}{2} + 1$ می‌توان نتیجه گرفت که هر یک از داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ بر عدد ۲ تقسیم شده و سپس یک واحد به هر کدام اضافه شده است. بنابراین برای پیدا کردن میانه داده‌های جدید، باید میانه داده‌های اولیه را بر ۲ تقسیم کرده و یک واحد به آن اضافه کنیم، یعنی:

$$\text{میانه جدید} = \frac{\text{میانه اولیه}}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

۳ میانه داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دورافتاده (داده‌های پرت) قرار نمی‌گیرد، بنابراین اگر در بین داده‌های آماری، داده‌های دورافتاده وجود داشته باشد، برای ارزیابی بهتر داده‌ها می‌توان از میانه کمک گرفت.

فلسف بک: توی بحث میانگین گفتیم که اگر داده‌های دورافتاده داشتیم، بهتره که از میانگین استفاده نکنیم و حالا این‌جا یاد گرفتیم که توی این شرایط می‌تونیم از میانه استفاده کنیم.

مثال: در مورد داده‌های مقابل، داریم:

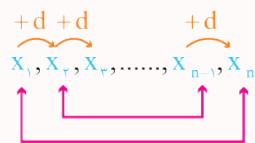
$$1, 6, 15, 21, 24, 31, 2023 \Rightarrow \begin{cases} \text{میانگین} = \frac{1+6+15+21+24+31+2023}{7} = 303 \\ \text{میانه} = Q_2 = 21 \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید، میانه داده‌ها تحت تأثیر داده ۲۰۲۳ قرار نمی‌گیرد. درحالی‌که میانگین، از این داده دورافتاده تأثیر می‌پذیرد و اگر به جای داده ۲۰۲۳ یک داده نزدیک به داده‌های دیگر (مثلاً ۲۸) قرار دهیم، میانه تغییری نمی‌کند ولی میانگین داده‌ها تغییر خواهد کرد. ببینید:

$$1, 6, 15, 21, 24, 28, 31 \Rightarrow \begin{cases} \text{میانگین} = \frac{1+6+15+21+24+28+31}{7} = 18 \\ \text{میانه} = Q_2 = 21 \end{cases}$$

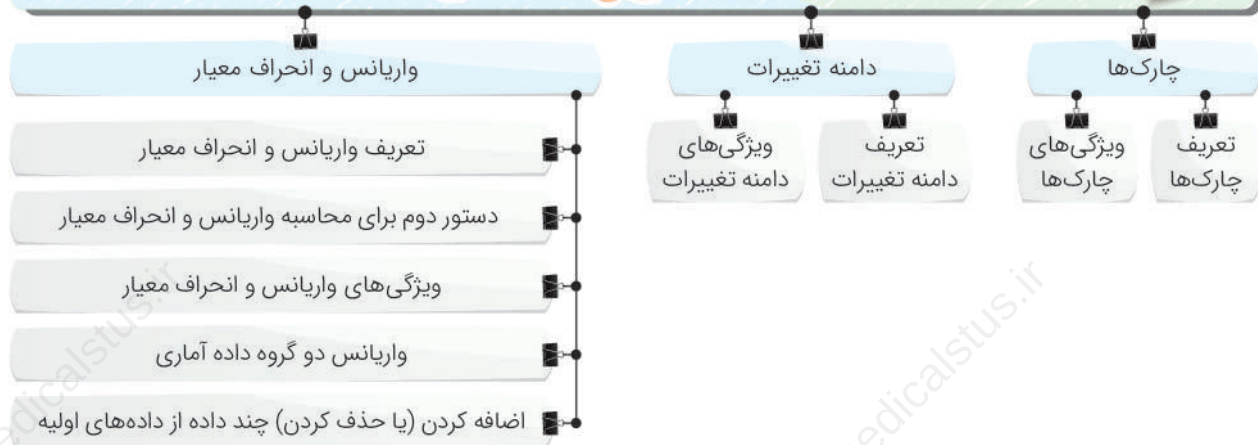
پس نتیجه می‌گیریم که اگر در بین داده‌های آماری، داده دور افتاده نداشته باشیم، میانه و میانگین داده‌ها به هم نزدیک هستند.

نکته: اگر داده‌های آماری تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، در این صورت میانه و میانگین داده‌ها با هم مساوی بوده و برابر است با:



$$\bar{x} = Q_2 = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{x_2 + x_{n-1}}{2} = \dots$$

معیارهای پراکندگی



تعریف چارک‌ها

چارک‌ها مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

انواع چارک‌ها:

- ۱ چارک اول: میانه داده‌های قبل از میانه است و آن را با Q_1 نشان می‌دهیم.
- ۲ چارک دوم: همان میانه است و آن را با Q_2 نشان می‌دهیم.
- ۳ چارک سوم: میانه داده‌های بعد از میانه است و آن را با Q_3 نشان می‌دهیم.

مراحل محاسبه چارک‌ها:

- ۱ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.
- ۲ سپس میانه داده‌ها (Q_2) را به دست می‌آوریم.
- ۳ برای داده‌های قبل از میانه، یک میانه به دست آورده و آن را چارک اول (Q_1) می‌نامیم.
- ۴ برای داده‌های بعد از میانه، یک میانه به دست آورده و آن را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم.

ویژگی‌های چارک‌ها

- ۱ اگر هر یک از داده‌های آماری را با مقدار ثابتی جمع یا تفریق می‌گردند.
 - ۲ اگر هر یک از داده‌های آماری را در مقدار ثابتی ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، چارک‌ها نیز در همان عدد ضرب یا بر آن عدد تقسیم می‌شوند.
 - ۳ اگر n داده آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ را در اختیار داشته باشیم، در این صورت می‌توان گفت که $\left[\frac{n}{4}\right]$ داده‌ها، قبل از چارک اول و $\left[\frac{n}{4}\right]$ داده‌ها بعد از چارک سوم و بقیه داده‌ها نیز بین چارک اول و چارک سوم قرار دارد. ([] نماد جزء صحیح است)
- به عنوان مثال، اگر ۴۷ داده آماری در اختیار داشته باشیم می‌توان گفت که:

$$\begin{cases} \left[\frac{n}{4}\right] = \left[\frac{47}{4}\right] = [11.75] = 11 & \text{داده‌های قبل از چارک اول} \\ \left[\frac{n}{4}\right] = \left[\frac{47}{4}\right] = [11.75] = 11 & \text{داده‌های بعد از چارک سوم} \\ 47 - 11 - 11 = 25 & \text{داده‌های بین چارک اول و سوم} \end{cases}$$

تعریف دامنه تغییرات

دامنه تغییرات، ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده را نشان می‌دهد و آن را با نماد R نمایش می‌دهیم:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

به عنوان مثال، دامنه تغییرات داده‌های ۱۱، ۲۵، ۱۷، ۹، ۱۵، ۱۸، ۲۱ برابر است با:

$$\begin{cases} x_{\max} = 25 & \text{بزرگترین داده} \\ x_{\min} = 9 & \text{کوچکترین داده} \end{cases} \Rightarrow R = x_{\max} - x_{\min} = 25 - 9 = 16$$



توجه کنید که دامنه تغییرات فقط به بزرگ ترین و کوچک ترین داده بستگی دارد و با تغییر تعداد و مقدار داده های میانی، مقدار آن تغییر نمی کند. به عنوان مثال، اگر به داده های بالا، اعداد ۱۰، ۱۴، ۲۳، ۱۹ را نیز اضافه کنیم، دامنه تغییرات عوض نمی شود، لذا نتیجه می گیریم که دامنه تغییرات، شاخص مناسبی برای نشان دادن پراکندگی داده ها نمی باشد.

ویژگی های دامنه تغییرات

- اگر هر یک از داده های آماری را با مقدار ثابتی **جمع** یا **تفریق** کنیم، دامنه تغییرات، تغییر نمی کند.
- اگر هر یک از داده های آماری را در مقدار ثابتی **a**، **ضرب** یا بر آن **تقسیم** کنیم، دامنه تغییرات در **|a|** ضرب یا بر آن تقسیم می شود.
- در حالت کلی، اگر **R** دامنه تغییرات داده های آماری $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ باشد، در این صورت دامنه تغییرات داده های آماری $ax_1 + b, ax_2 + b, ax_3 + b, \dots, ax_n + b$ به صورت $R(ax+b) = |a|R$ خواهد بود.
- اگر همه داده ها با هم برابر باشند، در این صورت دامنه تغییرات برابر صفر است و بالعکس. یعنی اگر دامنه تغییرات برابر صفر باشد، نتیجه می گیریم که تمامی داده ها با هم برابر هستند.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n \Leftrightarrow R = 0$$

تعریف واریانس و انحراف معیار

از شاخص های دیگر پراکندگی، واریانس و انحراف معیار است. از این شاخص ها برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده ها نسبت به میانگین استفاده می کنیم، به طوری که هر چقدر این شاخص ها **عددی کوچک و نزدیک به صفر** باشند، در این صورت، پراکندگی داده ها حول میانگینشان **کم** بوده و داده ها **به هم نزدیک تر** هستند و اگر این شاخص ها **عدد بزرگ تر** باشند، به این معناست که پراکندگی داده ها حول میانگینشان **زیاد** بوده و داده ها **از هم دور تر** هستند.

تعریف واریانس: اگر داده های آماری به صورت $x_1, x_2, \dots, x_n$ و میانگین آن ها برابر $\bar{x}$ باشد، در این صورت میانگین مجذور اختلاف داده ها از میانگین را واریانس داده ها می گوئیم و آن را با نماد σ^2 نشان می دهیم.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

واریانس داده ها

تعریف انحراف معیار: جذر مثبت واریانس را انحراف معیار داده ها می گوئیم و آن را با نماد σ نشان می دهیم.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

انحراف معیار داده ها

دستور دوم برای محاسبه واریانس و انحراف معیار

اگر مجموع مربعات (مجموع مجذورات) داده ها و میانگین آن ها را در اختیار داشته باشیم با استفاده از روابط زیر می توانیم واریانس و انحراف معیار داده ها را محاسبه کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

واریانس داده ها

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

انحراف معیار داده ها

بهتره که چند تا اصطلاح مهم رو هم بلد باشیم...

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2$: مجموع مربعات (مجموع مجذورات) داده ها
- $\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}$: میانگین مربعات (میانگین مجذورات) داده ها
- $(\bar{x})^2$: مربع (مجذور) میانگین داده ها

ویژگی های واریانس و انحراف معیار

- اگر هر یک از داده های آماری را با مقدار ثابتی **جمع** یا **تفریق** کنیم، واریانس و انحراف معیار داده ها تغییر نمی کند.
- اگر هر یک از داده های آماری را در عدد ثابت **a** **ضرب** و یا بر آن **تقسیم** کنیم، واریانس داده ها در **a^2** و انحراف معیار آن ها در **|a|** ضرب یا تقسیم می شود.
- در حالت کلی، اگر واریانس داده ها برابر σ^2 و انحراف معیار آن ها برابر σ باشد، در این صورت، واریانس و



و انحراف معیار داده‌های آماری $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر است با: $\sigma_{(ax+b)}^2 = a^2 \times \sigma^2$ واریانس داده‌های جدید
 $\sigma_{(ax+b)} = |a| \times \sigma$ انحراف معیار داده‌های جدید

۳ اگر همه داده‌ها با هم برابر باشند در این صورت واریانس و انحراف معیار داده‌ها برابر صفر است و بالعکس. یعنی اگر واریانس و یا انحراف معیار داده‌ها برابر صفر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که همه داده‌ها با هم برابر هستند.

واریانس دو گروه داده آماری

فرض کنید می‌خواهیم n داده آماری با میانگین $\bar{x}$ و واریانس σ_x^2 را با m داده آماری با میانگین $\bar{y}$ و واریانس σ_y^2 ترکیب کنیم، در این صورت:
 ۱ اگر میانگین این دو گروه از داده‌ها با هم برابر باشد، در این صورت، واریانس کل داده‌ها ($m + n$ داده) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{m+n}$$

۲ اگر میانگین این دو گروه از داده‌ها با هم برابر نباشد، در این صورت، برای به دست آوردن واریانس کل داده‌ها ($m + n$ داده) مراحل زیر را انجام می‌دهیم:
مرحله ۱: ابتدا میانگین کل داده‌ها را از رابطه $\bar{x} = \frac{n\bar{x} + m\bar{y}}{m+n}$ به دست می‌آوریم.

مرحله ۲: سپس با استفاده از رابطه دوم واریانس، یعنی $\sigma_x^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$ و $\sigma_y^2 = \frac{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2}{m} - (\bar{y})^2$ مجموع مجزورات داده‌ها را برای گروه اول و دوم، یعنی $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ و $(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2)$ را محاسبه می‌کنیم.

مرحله ۳: در نهایت واریانس کل داده‌ها را به کمک رابطه $\sigma^2 = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_m^2)}{m+n} - (\bar{x})^2$ به دست می‌آوریم.

اضافه کردن (یا حذف کردن) چند داده از داده‌های اولیه

فرض کنید n داده با میانگین $\bar{x}$ و واریانس σ^2 را در اختیار داشته باشیم و بخواهیم چند داده را به داده‌های اولیه اضافه کرده و یا از میان آن‌ها حذف کنیم و داده‌های جدیدی را تشکیل دهیم، در این صورت:

۱ اگر میانگین داده‌های اضافه شده یا حذف شده با میانگین داده‌های اولیه برابر باشد، در این صورت برای به دست آوردن واریانس داده‌های جدید مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله ۱: ابتدا مجموع مجزورات انحراف از میانگین را برای داده‌های اولیه و با استفاده از رابطه $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 = n\sigma^2$ به دست می‌آوریم.

مرحله ۲: سپس مجموع مجزورات انحراف از میانگین داده‌های اضافه شده و یا حذف شده را محاسبه کرده و آن را به حاصل فوق اضافه کرده و یا از آن کم می‌کنیم.

مرحله ۳: در نهایت برای به دست آوردن واریانس داده‌های جدید، عدد به دست آمده از مرحله قبل را بر تعداد داده‌های جدید تقسیم می‌کنیم.

۲ اگر میانگین داده‌های اضافه شده و یا حذف شده با میانگین داده‌های اولیه برابر نباشد، در این صورت برای به دست آوردن واریانس داده‌های جدید مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحله ۱: ابتدا مجموع داده‌های اولیه را با کمک رابطه $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\bar{x}$ به دست می‌آوریم.

مرحله ۲: سپس داده‌های گفته شده را به حاصل فوق اضافه کرده و یا از آن کم می‌کنیم و سپس میانگین داده‌های جدید را نیز به دست می‌آوریم.

مرحله ۳: حال با استفاده از رابطه دوم واریانس، یعنی $\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$ ، حاصل مجموع مجزورات داده‌های اولیه یعنی $(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ را محاسبه می‌کنیم.

مرحله ۴: در این مرحله، مجموع مجزورات داده‌های اضافه شده و یا حذف شده را به دست آورده و آن را به حاصل مرحله قبل اضافه کرده و یا از آن کم می‌کنیم تا مجموع مجزورات داده‌های جدید به دست بیاید.

مرحله ۵: در نهایت مجدداً به کمک رابطه دوم واریانس، واریانس داده‌های جدید را به دست می‌آوریم.



ضریب تغییرات



کاربردهای ضریب تغییرات

ویژگی‌های ضریب تغییرات

تعریف ضریب تغییرات (CV)

تعریف ضریب تغییرات (CV)

ضریب تغییرات، شاخصی است که از تقسیم **انحراف معیار داده‌ها** (σ) به **میانگین داده‌ها** ($\bar{x}$) به دست می‌آید و آن را با نماد **CV** نمایش می‌دهیم. چند تا مورد مهم...

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

✓ ضریب تغییرات شاخص بدون واحد است.

✓ از ضریب تغییرات فقط برای داده‌های مثبت استفاده می‌شود.

هر چقدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها نیز کمتر خواهد بود که این موضوع برای ما مطلوب است.

ویژگی‌های ضریب تغییرات

۱ اگر هر یک از داده‌های آماری را در یک **عدد مثبت** ضرب کنیم، ضریب تغییرات تغییری نمی‌کند.

۲ اگر به هر یک از داده‌های آماری یک **عدد مثبت** اضافه کنیم، در این صورت، ضریب تغییرات داده‌های جدید از ضریب تغییرات داده‌های اولیه **کمتر** خواهد شد.

$$\text{اولیه (CV)} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \xrightarrow{\text{داده‌ها از } x \text{ به } x+b \text{ تبدیل بشن } b>0} \text{جدید (CV)} = \frac{\sigma}{\bar{x}+b} \Rightarrow \text{جدید (CV)} < \text{اولیه (CV)}$$

۳ اگر از هر یک از داده‌های آماری، یک **عدد ثابت** را کم کنیم (به شرطی که هیچ کدام از داده‌ها منفی نشن)، در این صورت، ضریب تغییرات داده‌های جدید از ضریب تغییرات داده‌های اولیه **بیشتر** خواهد شد.

$$\text{اولیه (CV)} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \xrightarrow{\text{داده‌ها از } x \text{ به } x-b \text{ تبدیل بشن } x-b>0} \text{جدید (CV)} = \frac{\sigma}{\bar{x}-b} \Rightarrow \text{جدید (CV)} > \text{اولیه (CV)}$$

۴ در حالت کلی، اگر ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ باشد، ضریب تغییرات داده‌های آماری $ax_1 + b, ax_2 + b, ax_3 + b, \dots, ax_n + b$ (با فرض مثبت بودن داده‌ها) برابر است با:

$$\text{جدید (CV)} = \frac{|a|\sigma}{a\bar{x} + b} \xrightarrow{\text{داده‌ها از } x \text{ به } ax+b \text{ تبدیل بشن}} \text{اولیه (CV)} = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

۵ اگر همه داده‌ها با هم **برابر** باشند، ضریب تغییرات برابر **صفر** است و بالعکس. یعنی اگر ضریب تغییرات چند داده برابر **صفر** باشد، در این صورت تمامی داده‌ها با هم **برابر** هستند.

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n \Leftrightarrow CV = 0$$

کاربردهای ضریب تغییرات

۱ اگر در دو جامعه آماری، انحراف معیار با هم **برابر** بوده ولی میانگین آن‌ها با هم **متفاوت** باشد، در این صورت، برای سنجش پراکندگی داده‌ها در این دو جامعه، می‌توانیم ضریب تغییرات آن دو جامعه آماری را با هم مقایسه کنیم.

۲ اگر بخواهیم در دو جامعه آماری با واحد اندازه‌گیری متفاوت، میزان پراکندگی داده‌های آن‌ها را با هم مقایسه کنیم از ضریب تغییرات استفاده می‌کنیم، چرا که ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری داده‌ها بستگی ندارد و شاخص بدون واحد است. توجه کنید که در این حالت، با توجه به نوع جامعه، هر جامعه آماری که ضریب تغییرات **کمتری** داشته باشد **کیفیت و عملکرد بهتر** و با **دقت عمل بالاتری** خواهد داشت.