Medical _ Stus | Kolyze

MEDICAL STUS

خوبیا برمیگرده

اشتراک

مدیکال پلاس

تمام آموزش‌های مدیکال، در **یک اشتراک!**

اشتراک MEDICAL PLUS فقط شامل محصولات آموزشی زیر است

73 CORE

- آموزش پربازده کنکور
- به جای اتلاف وقت، برو سر اصل مطلب!
- جزوات هدفمند و به‌روز
- تدریس اسکرین رکورد
- تمرکز بر تیپ تست‌های پرتکرار

جاده نهایی

- روزی فقط ۱ ساعت برای ۲۰ نهایی
- برنامه تا خود امتحانات
- جزوه کامل و به‌روز
- فیلم آموزشی متناسب با جزوه
- تمرین + نمونه سوال + آزمون

صد فرهنگیان

- ۲۵ ساعت آموزش کامل اختصاصی فرهنگیان
- هوش + تعلیم و تربیت + دین و رندگی
- جزوه و تدریس کامل (حدود ۲۵ ساعت)
- جزوه کامل مصاحبه (۱۰۰) صفحه)
- دسترسی به گروه VIP آزمون

مزایای اشتراک مدیکال پلاس

- ضمانت عودت وجه تا ۱۴ روز
- پشتیبانی شروع کار (ویژه اشتراک ۳ ساله)
- دسترسی دائمی و نامحدود
- آپدیت مداوم محتوا
- دسترسی کامل به سه محصول برتر آموزشی

با یک اشتراک، **سه محصول** قدرتمند آموزشی را در اختیار شماست!

MEDICAL STUS

خوبیا برمیگرده

طرح‌های مشاوره

۳ سطح پشتیبانی، متناسب با نیاز تو

MENTORING

برای دانش‌آموزان
خودران و مستقل

- بدون برنامه‌ریزی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- گزارش شبانه
- تماس هفتگی

اگه خودت برنامه می‌ریزی و فقط به همراه مطمئنم لازم داری تا ادامه بدی و بهتر بشی، این طرح برای تونه!

TASK PLAN

برای دانش‌آموزان
نیازمند برنامه کامل

- برنامه‌ریزی شخصی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- گزارش شبانه
- تماس هفتگی

اگه می‌خوای از صفر تا صد، با یه برنامه شخصی دقیق و منظم جلو بری و هیچ چیزی رو از دست ندی!

TASK PLAN PRO

برای دانش‌آموزان
با نیاز به پشتیبانی بالا

- برنامه‌ریزی شخصی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- ۲ گزارش در روز
- ۲ تماس در هفته

اگه می‌خوای پیشترین پیگیری و همراهی رو داشته باشی و با قدرت و تمرکز کامل به هدفت برسی!

- **پشتیبانی واقعی**
  در کنار تو هستیم تا به هدفت برسی
- **سیستم آزمونی مداوم با سوالات به روز**
  سوالات مداوم و به‌روز متناسب با سطح و برنامه‌ات
- **امکان خروج در صورت کم‌کاری مشاور**
  اگه عملکرد مشاور رضایت‌بخش نبود، می‌تونی خارج بشی
- **امکان تغییر مشاور**
  تغییر مشاور در صورت نیاز، سریع و راحت

با هر طرح مشاوره، اشتراک MEDICAL PLUS با تخفیف ویژه در دسترسه!

@medical_stus | medicalstus.ir

۱ مقدار m را چنان تعیین کنید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+۱ & ۲ \\ m & ۳ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۲ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی هستند، مقدارهای x، y و z را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۳ با فرض $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$، حاصل عبارت $A^۲ + ۲I$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۴ دستگاه $\begin{cases} x - ۲y = ۴ \\ ۳x + y = ۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۵ حاصل هر یک از عبارت‌های ستون A را از ستون B انتخاب کنید. (یکی از اعداد ستون B اضافه است.)

A	B
الف) مقدار عددی $\lvert ۲A \rvert$ در صورتی‌که $\lvert A_{۲\times۲} \rvert = ۱$	۲
ب) مقدار عددی درایهٔ $b_{۱۳}$ در ماتریس $B = [۲j + i]_{۳\times۳}$	۴
پ) مقدار عددی $\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}$	۵
	۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۶ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) هر ماتریس مربعی یک ماتریس اسکالر است.

ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر شود، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

پ) برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، تساوی $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ همواره برقرار است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۷ دترمینان ماتریس مقابل را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید. $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۸ دستگاه $\begin{cases} ۳x - y = -۶ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۹ اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل عبارت $\mathrm{AB} + ۲I$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۰ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} a & a-۴ \\ ۰ & a+۱ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری است، در این صورت مقدار a برابر ..... می‌باشد.

ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۱$، در این صورت $|-۲A|$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) برای هر دو ماتریس دلخواه A و B، تساوی $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ برقرار می‌باشد.

ب) اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}, a_{ij} = ۲i - j^۲$، در این صورت درایهٔ $a_{۲۳}$ برابر ۵− است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۲ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x & ۶ \\ x+y & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = ۲B$، در این صورت x و y را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۳ دترمینان ماتریس مقابل را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۴ دستگاه $\begin{cases} ۳x - y = -۶ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۵ اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل عبارت $\mathrm{AB} + ۲I$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۶ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x & ۶ \\ x+y & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = ۲B$، در این صورت x و y را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۷ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} a & a-۴ \\ ۰ & a+۱ \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری است، در این صورت مقدار a برابر ..... می‌باشد.

ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۱$، در این صورت $|-۲A|$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۸ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) برای هر دو ماتریس دلخواه A و B، تساوی $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ برقرار می‌باشد.

ب) اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}, a_{ij} = ۲i - j^۲$، در این صورت درایهٔ $a_{۲۳}$ برابر ۵− است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۹ دستگاه $\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۰ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{bmatrix}$، (k عددی حقیقی است) را درنظر بگیرید. با محاسبه $|A|$ و $|B|$ نشان دهید که: $|B| = k|A|$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۱ اگر A ماتریس ۲×۲ و اسکالر باشد و $a_{۲۲} = ۳$ در این صورت A و $|A|$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۲ با فرض $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، ماتریس $A^۵$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۳ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} -۱ & m \\ -۲ & m \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ چنان هستند که $C = ۳A + ۲B$ ماتریس قطری است. مقدار m و مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۴ درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) برای هر دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه A و B، در حالت کلی رابطه $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$ برقرار است.

ب) وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۵ ماتریس ضرایب و $A = \begin{bmatrix} m-۱ & ۱ \\ ۲ & m \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات یک دستگاه خطی هستند. دستگاه معادلات $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ را تشکیل دهید و مقدار m را طوری تعیین کنید که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۲۶ نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} |۲A| & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۲۷ دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ -۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$ را بر حسب ستون اول به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۲۸ با فرض $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۴۹}$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۲۹ گزینه درست را انتخاب کنید.

مقدار عددی $a_{۲۳}$ در ماتریس $A=[i-j]_{۳\times ۳}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۰ جاهای خالی زیر را کامل کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} m & ۲-m \\ ۰ & n \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است. مقدار عددی n برابر ..... می‌باشد.

ب) دترمینان ماتریس مربعی A برابر ۲ می‌باشد. در این صورت مقدار $\left|A^{-۱}\right|$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

اگر در ماتریس A تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر باشد، ماتریس A را مربعی می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۲ به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -۴x+(m-۳)y=۳ \\ ۲x-\frac{m-۳}{۲}y=۱ \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۳ دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x+۷y=-۴ \\ -۵x+۲y=-۷ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۴ اگر $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ و $\left|A^{۳}\right|=-۸$ باشد، حاصل $\frac{\left|A^{-۱}\right|}{|۳A|}$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۵ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} -۱ & |i-j|>۱ \\ ۰ & |i-j|=۱ \\ ۱ & |i-j|<۱ \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^{۲}-۲I$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۶ جاهای خالی را پر کنید.

الف) دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ برابر ..... است.

ب) از تساوی ماتریسی $A\times B=A\times C$ که در آن A یک ماتریس مربعی است، با شرط ..... نتیجه می‌شود $B=C$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۷ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A ماتریس اسکالر و B ماتریس هم‌مرتبه A باشد، آنگاه حاصلضرب آنها تعویض‌پذیر است.

ب) اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۱۰ & -۴ \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^{۱۴۰۳}=I$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۸ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-y & ۵ \\ z & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $x^۲-۲y+z$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۳۹ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A|=-۲$، حاصل $|۲A|+\left|A^{-۱}\right|^۳$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۰ دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ ۲y-x=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۱ ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} j-۱ & i>j \\ i^۲-j & i=j \\ ۱-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند.

الف) حاصل $A\times B$ را به دست آورید.

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید. (با روش دلخواه)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $A_{n\times n}$ ماتریس دلخواه I_n ماتریس همانی و $A^۲-A=I$ باشد، وارون ماتریس A، برابر $(I-A)$ است.

ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره $C'(O,۲r)$ است.

پ) بردار $\overrightarrow{a}=\left(۰,\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)$، یک بردار یکه است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۳ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۲k-۱ & ۲ \end{bmatrix}$، مقدار k برابر ..... است.

ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل ..... است.

پ) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد $\overrightarrow{i}$ و $\overrightarrow{j}$ و $\overrightarrow{k}$ بنا می‌شود، برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۴ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۹y=m+۱ \\ ۴x+my=-۴ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۵ اگر $۳A=\begin{bmatrix} |A| & -۵ \\ ۱ & ۴|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left|A^{-۱}\right|$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۶ در تساوی $\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}[x\ \ ۱]=۰$، مقدار x را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۷ ماتریس $A=[a_{ij}]_{۲\times ۲}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^۲-j & i>j \\ i+j & i\le j \end{cases}$ داده شده است، ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
هر ماتریس مربعی وارون‌پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۹ جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.
اگر $A = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۰ جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.
اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس ..... می‌نامند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۱ اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & ۰ & ۱ \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۲ در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}$، ماتریس A را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۳ ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $|kA| = ۶۲۵k$ برقرار باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۴ ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+۱ & y+۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ را درنظر بگیرید، اگر $A + B = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۸ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۵ با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطه زیر را ثابت کنید:
$$(A - ۳I)^۲ = A^۲ - ۶A + ۹I$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۵۶ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، حاصل $\left| -\frac{۱}{۲} A^۴ \right|$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۵۷ اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$، نشان دهید: $(۵A)^{-۱} = \frac{۱}{۵} A^{-۱}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۵۸ ماتریس $(B^۲ + ۲I)$ را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه سه است.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۵۹ اگر $A=\begin{bmatrix} m & ۰ \\ m-۲ & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد مقادیر m و n را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۰ اگر $b_{ij}=\begin{cases} i+۱ & i=j \\ j-۲ & i<j \\ ۱ & i>j \end{cases}$، $B=[b_{ij}]_{۳\times۳}$، ماتریس B را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۱ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A|\,A||$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۲ در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'x=c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (درست - نادرست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۳ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-۲I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۴ اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(A-B)^{۲}=A^{۲}-۲AB+B^{۲}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۵ اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A=[۳i-۲j]_{۳\times۳}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند:

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) ماتریس $B^{۲}$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۷ اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲x-۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۸ دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۶۹ ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i+j & i=j \\ j & i>j \\ ۰ & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد:

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۰ اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۱ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.

- اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۵$ باشد آنگاه $|۲A|=۴۰$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۲ عبارت زیر را کامل کنید.

- اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+r$ برابر با ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۳ اگر A ماتریس ۳×۳ باشد، $|A|=۴$ باشد، آن‌گاه حاصل $|A|\,|A|$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۷۴ اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی درنظر بگیریم، از تساوی $AX=B$ ماتریس X را به دست آورید. $\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -۴x+۳y=۲ \end{cases}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۷۵ اگر $A=[۲i-۳j]_{۳\times۲}$ و $B_{۲\times۳}=\begin{cases} -۱ & i\neq j \\ ۰ & i=j \end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۷۶ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حال $x+۲y+۳z$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۷۷ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می‌شود.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.

ت) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$، در این صورت زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۷۸ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند آن‌گاه: $|AB| = |A|\,|B|$

ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

پ) در حالتی‌که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

ت) نقطه با مختصات $(-۴, ۳, -۲)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۷۹ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x + my = ۱ \\ (m-۱)x + y = ۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۰ ماتریس $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ مفروض است، ماتریس A را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۱ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ درنظر بگیرید.

الف) آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟

ب) حاصل $|A \times B|$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۲ اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۳ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند آن‌گاه عبارت $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ همواره برقرار است.

ب) اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

پ) نقطه $(۳, -۲)$ روی دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۰$ قرار دارد.

ت) برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در $R^۳$، داریم: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۴ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطراصلی آن صفر باشند را ماتریس ..... گویند.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) در حالتی که $\frac{c}{a} = ۱$ بیضی به یک ..... تبدیل می‌شود.

ت) بردار $\vec{a} = ۲\vec{j} - \vec{k}$ در فضا سه بعدی بر صفحه‌ی مختصات سه بعدی ..... منطبق است.

(xoz, yoz, xoy)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۵ جواب دستگاه مقابل را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید. $\begin{cases} ۳x - ۴y = ۷ \\ ۲x + y = ۱ \end{cases}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۸۶ اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & -۴\\ ۱ & |A|\end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $\left|A^{-۱}\right|$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۸۷ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ n+۱ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۸۸ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $\mathrm{rA}=\mathrm{rB}$ آن‌گاه داریم: $A=B$.

ب) مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.

پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

ت) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۸۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix}۲ & ۰ & f\\ ۰ & a & ۰\\ e & c & b\end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است.

ب) اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.

پ) در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a}=۰$ بیضی به ..... تبدیل می‌شود.

ت) در فضای $R^{۳}$، نقطه $(-۳,۲,-۵)$ در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۰ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ و $I_{۳}$ ماتریس همانی ۳×۳ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|A\times B|+\left|۲I_{۳}\right|$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۹۱ دستگاه مقابل را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

$$\begin{cases}۳x-۵y=-۱\\ ۲x+y=۸\end{cases}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۹۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۹۳ مقادیر x و y را از معادله مقابل به دست آورید.

$$[x\ \ ۲]\times\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=[۴\ \ y-۲]$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۹۴ اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ ۲ & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$ باشد، درایه‌های $a_{۳۳}$ ، $a_{۳۱}$ ، $a_{۱۲}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۹۵ دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ ۲x+۶y=-۴ \end{cases}$ را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۹۶ به ازای چه مقداری از m دستگاه معادله $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ \mathrm{mx}+۶y=-۴ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۹۷ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطه‌ی $A^{۳}=\mathrm{mA}+\mathrm{nI}_{۲}$ برقرار باشد. ($I_{۲}$ ماتریس همانی است.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۹۸ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A|+\left|B^{۲}\right|$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۹۹ معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}=۰$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۰۰ اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند مقدار $x+y+z$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۰۱ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در دستگاه $\begin{cases} \mathrm{ax}+\mathrm{by}=c \\ a'x+\mathrm{by}=c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) هرگاه صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

ت) رابطه $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۴y+۱۰=۰$ معادله‌ی یک دایره است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۰۲ جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر ..... است.

ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۵$ باشد آن‌گاه $\left|\frac{۱}{۲}A\right|$ برابر ..... است.

پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر ..... است.

ت) سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۰۳ الف) حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx + ۳y = ۱ \\ ۲x - y = ۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصر به فرد باشد.

ب) جواب دستگاه مذکور را به ازای $m = ۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۰۴ در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۱ & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ مقدار x را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۰۵ الف) اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & ۸ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۰۶ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & m-۲ \\ n+۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|A| + |B|$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۰۷ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در حالت کلی حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.

ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۲$ باشد آن‌گاه $|۲A| = ۱۶$ است.

پ) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره $C'(O, ۲r)$ است.

ت) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۰۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۸ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مقدار a برابر ..... است.

ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن‌را یک ماتریس ..... می‌نامیم.

پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.

ت) هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از ..... خواهد گذشت.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱ $|A| = ۰ \Rightarrow ۳(m+۱) - ۲m = ۰ \Rightarrow ۳m + ۳ - ۲m = ۰ \Rightarrow m = -۳$

۲ $\begin{cases} x - y = ۳ \\ x + y = ۹ \\ z - ۱ = ۵ \end{cases} \Rightarrow x = ۶, y = ۳, z = ۶$

۳ $A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۸ & ۹ \end{bmatrix}$

$A^۲ + ۲I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۸ & ۹ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۸ & ۱۱ \end{bmatrix}$

۴ نوشتار اول: $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۷$

$A^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} \\ \frac{-۳}{۷} & \frac{۱}{۷} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} \\ \frac{-۳}{۷} & \frac{۱}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۱ \end{cases}$

نوشتار دوم: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۱۴ \\ -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۱ \end{cases}$

۵ الف) ۴ ب) ۷ پ) ۲

۶ الف) نادرست ب) درست پ) نادرست

۷ $\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{matrix} \Rightarrow |A| = (۴ - ۹ - ۸) - (-۸ - ۱۲ + ۳) = -۱۳ + ۱۷ = ۴$

۸ نوشتار اول: $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۷$

$A^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۷} & \frac{۱}{۷} \\ \frac{-۱}{۷} & \frac{۳}{۷} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۷} & \frac{۱}{۷} \\ \frac{-۱}{۷} & \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۶ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ y = ۳ \end{cases}$

نوشتار دوم: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۶ \\ ۵ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} -۷ \\ ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ y = ۳ \end{cases}$

۹ نوشتار اول:

$\mathrm{AB} + ۲I = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۹ & -۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۹ & -۳ \end{bmatrix}$

نوشتار دوم: $\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۹ & -۵ \end{bmatrix}, ۲I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \mathrm{AB} + ۲I = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۹ & -۳ \end{bmatrix}$

۱۰ الف) ۴ ب) -۸

۱۱ الف) نادرست ب) درست

۱۲

$$\begin{bmatrix} ۲x & ۶ \\ x+y & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲y+۴ & ۶ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲y+۴ \\ x+y = ۰ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x-y = ۲ \\ x+y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ \end{cases}$$

۱۳

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{matrix} \Rightarrow |A| = (۴-۹-۸) - (-۸-۱۲+۳) = -۱۳+۱۷ = ۴$$

۱۴ نوشتار اول:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۷$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۷} & \frac{۱}{۷} \\ \frac{-۱}{۷} & \frac{۳}{۷} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲}{۷} & \frac{۱}{۷} \\ \frac{-۱}{۷} & \frac{۳}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۶ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ y = ۳ \end{cases}$$

نوشتار دوم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۶ \\ ۵ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} -۷ \\ ۲۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ y = ۳ \end{cases}$$

۱۵ نوشتار اول:

$$\mathrm{AB} + ۲I = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۹ & -۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۹ & -۳ \end{bmatrix}$$

نوشتار دوم:

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۹ & -۵ \end{bmatrix}, ۲I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, \mathrm{AB} + ۲I = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۹ & -۳ \end{bmatrix}$$

۱۶

$$\begin{bmatrix} ۲x & ۶ \\ x+y & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲y+۴ & ۶ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲y+۴ \\ x+y = ۰ \end{cases} \text{یا} \begin{cases} x-y = ۲ \\ x+y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ \end{cases}$$

۱۷ الف) ۴ — ب) -۸

۱۸ الف) نادرست — ب) درست

۱۹

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۶-۴ = ۲, A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

نگارشی دیگر:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۶-۴ = ۲, A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

۲۰

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ ۰ & d \\ e & ۰ \end{matrix} \Rightarrow |A| = (\mathrm{adf}+۰+۰) - (\mathrm{edc}+۰+۰) = \mathrm{adf} - \mathrm{edc}$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{ka} & \mathrm{kb} & \mathrm{kc} \\ ۰ & d & ۰ \\ e & ۰ & f \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathrm{ka} & \mathrm{kb} \\ ۰ & d \\ e & ۰ \end{matrix} \Rightarrow |B| = \mathrm{kadf} - \mathrm{kedc} = k(\mathrm{adf} - \mathrm{edc}) = k|A|$$

۲۱ $A=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۹$

۲۲ روش اول:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=۲I\Rightarrow A^۴=A^۲\times A^۲=(۲I)\times(۲I)=۴I^۲=۴I$$
$$\Rightarrow A^۵=A\times A^۴=A\times(۴I)=۴A \text{ یا } A^۵=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۴ & -۴\end{bmatrix}$$

روش دوم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}=۲I\Rightarrow A^۳=A\times A^۲=A\times(۲I)=۲A$$
$$\Rightarrow A^۵=A^۲\times A^۳=(۲I)\times(۲A)=۴A \text{ یا } A^۵=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۴ & -۴\end{bmatrix}$$

روش سوم:

$$A^۲=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow A^۳=A\times A^۲=\begin{bmatrix}۲ & ۲\\ ۲ & -۲\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A^۴=A\times A^۳=\begin{bmatrix}۴ & ۰\\ ۰ & ۴\end{bmatrix}\Rightarrow A^۵=A\times A^۴=\begin{bmatrix}۴ & ۴\\ ۴ & -۴\end{bmatrix}$$

۲۳
$$C=۳A+۲B=\begin{bmatrix}-۳ & ۳m\\ -۶ & ۳m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴ & -۶\\ ۶ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۳m-۶\\ ۰ & ۳m+۲\end{bmatrix}$$
$۳m-۶=۰\Rightarrow ۳m=۶\Rightarrow m=۲\Rightarrow C=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۸\end{bmatrix}\Rightarrow$ مجموع درایه‌های قطر اصلی = ۹

۲۴ الف) نادرست ب) درست

۲۵ روش اول:

$$AX=B\Rightarrow\begin{bmatrix}m-۱ & ۱\\ ۲ & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\ ۴\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}(m-۱)x+y=۲\\ ۲x+my=۴\end{cases}\Rightarrow\frac{m-۱}{۲}=\frac{۱}{m}=\frac{۲}{۴}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}۲m=۴\Rightarrow m=۲\\ ۴m-۴=۴\Rightarrow m=۲\end{cases}$$

روش دوم:

$$\frac{m-۱}{۲}=\frac{۱}{m}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\Rightarrow\frac{-۲}{۲}=\frac{۱}{-۱}\neq\frac{۲}{۴}\\ m=۲\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۴}\end{cases}$$

$m=۲$ قابل قبول است.

۲۶ $|A|=|۲A|\times۱-(۰\times۱)\Rightarrow|A|=|۲A|\Rightarrow|A|=۴|A|\Rightarrow|A|=۰$

در نتیجه A وارون‌پذیر نیست.

۲۷
$$A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & -۲\\ ۰ & ۰ & ۴\\ -۳ & ۴ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=-۱\times۲\times\begin{vmatrix}۰ & ۴\\ ۴ & ۱\end{vmatrix}+-۱\times۰\times\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ ۴ & ۱\end{vmatrix}+-۱\times(-۳)\times\begin{vmatrix}-۱ & -۲\\ ۰ & ۴\end{vmatrix}$$
$$=(-۳۲)+۰+۱۲=-۲۰$$

۲۸ $A^{۲}=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}=-I$

$(A^{۲})^{۲۴}=(-I)^{۲۴}\Rightarrow A^{۴۸}=I^{۲۴}=I\Rightarrow A^{۴۹}=A^{۴۸}\times A=I\times A=A$

۲۹ گزینه ۱

۳۰ الف) ۲ ب) $\frac{۱}{۲}$

۳۱ درست

۳۲ روش اول: به ازای هیچ مقدار m $\frac{-۴}{۲}\neq\frac{m-۳}{-\frac{(m-۳)}{۲}}\Rightarrow -۲\neq -۲$

روش دوم: به ازای هیچ mای دترمینان زیر مخالف صفر نمی‌شود.

$\begin{vmatrix}-۴ & m-۳\\ ۲ & -\frac{m-۳}{۲}\end{vmatrix}=-۴\left(-\frac{m-۳}{۲}\right)-۲(m-۳)=۰$

۳۳ $X=A^{-۱}B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۴۱}\begin{bmatrix}۲ & -۷\\ ۵ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۴\\ -۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}$

۳۴ $\left|A^{۳}\right|=|A|^{۳}=-۸\Rightarrow|A|=-۲,\ \frac{\left|A^{-۱}\right|}{|۳A|}=\frac{\frac{۱}{|A|}}{۳^{۲}|A|}=\frac{۱}{۳۶}$

۳۵ $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix},A^{۲}-۲I=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۱ & ۰\\ -۲ & ۰ & ۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & -۲\\ ۰ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$

۳۶ الف) ۱۴ ب) وارون‌پذیری A یا $|A|\neq ۰$

۳۷ الف) درست ب) نادرست

۳۸ $z=-۳$ (ص ۲۰)

$\begin{cases}۲x-y=۳\\ ۲x+y=۵\end{cases}\Rightarrow x=۲,y=۱\Rightarrow x^{۲}-۲y+z=-۱$

۳۹ $|۲A|+\left|A^{-۱}\right|^{۳}=۲^{۳}|A|+\frac{۱}{|A|^{۳}}=۸(-۲)+\frac{۱}{-۸}=\frac{-۱۲۹}{۸}$ (ص ۳۱)

۴۰ $A=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$ (ص ۲۴)

$A^{-۱}=\frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix}۲ & ۴\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}$

۴۱ $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۶ \end{bmatrix}$ (ص ۲۱ و ۲۸)

الف) $A\times B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ -۵ & -۴ & ۳ \\ ۴ & ۱۱ & -۵ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}\begin{matrix} -۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{matrix}$

$|B|=(-۱+۱-۸)-(-۲-۲+۲)=-۶$

۴۲ الف) نادرست (ص ۲۲) ب) درست (ص ۳۹) پ) درست (ص ۷۵)

۴۳ الف) $k=\frac{۱}{۲}$ (ص ۱۲)

ب) دو خط متقاطع (ص ۳۹)

پ) یک (ص ۸۲ و ۸۳)

۴۴ $\frac{m}{۴}=\frac{۹}{m}\neq\frac{m+۱}{-۴}\Rightarrow m^۲=۳۶\Rightarrow\begin{cases} m=۶ \\ m=-۶ \end{cases}$ (ص ۲۶ و ۳۱) هر دو جواب قابل قبول

۴۵ $|۳A|=۴|A|^۲+۵\Rightarrow ۴|A|^۲-۹|A|+۵=۰\Rightarrow\begin{cases} |A|=۱\Rightarrow |A^{-۱}|=۱ \\ |A|=\frac{۵}{۴}\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۴}{۵} \end{cases}$ (ص ۳۰ و ۳۱)

۴۶ $[x-۲\ \ -۳]\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}=۰\Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases} x=-۱ \\ x=۳ \end{cases}$ (ص ۱۷)

۴۷ $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-۱$

$A^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ (ص ۲۱ و ۲۳)

۴۸ نادرست (ص ۲۳)

۴۹ ۱- (ص ۲۸)

۵۰ اسکالر (ص ۱۲)

۵۱ $|A|=|A|\,(|A|-۲)+۱(۲)\Rightarrow |A|^۲-۳|A|+۲=۰\Rightarrow\begin{cases} |A|=۱ \\ |A|=۲ \end{cases}$ (ص ۲۸ و ۳۰)

۵۲ $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۵-۱۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۷ & ۴ \\ ۱۷ & -۹ \end{bmatrix}$

(ص ۲۵)

۵۳ $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۱$

$k\,|\mathrm{kA}|=k(k^{۳}\,|A|\,)=k^{۴}\times ۱=۶۲۵\Rightarrow k=\pm ۵$ (ص ۳۱)

۵۴ $x=۲\ ,y=-۱$ (ص ۱۳)

۵۵ $(A-۳I)^{۲}=(A-۳I)(A-۳I)=A^{۲}-۳\mathrm{AI}-۳\mathrm{IA}+۹I^{۲}\xrightarrow[I^{۲}=I]{\mathrm{AI}=\mathrm{IA}=A}A^{۲}-۶A+۹I$

(ص ۱۹ و ۳۱)

۵۶ $|A|=۲,\left|-\frac{۱}{۲}A^{۴}\right|=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳}|A|^{۴}=-۲$ (ص ۲۸ و ۳۱)

۵۷ $A^{-۱}=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}-۱&۱\\-۱&۳\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{۱}{۵}A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۰}&-\frac{۱}{۱۰}\\\frac{۱}{۱۰}&-\frac{۳}{۱۰}\end{bmatrix}$ (ص ۲۳ و ۳۱)

$۵A=\begin{bmatrix}۱۵&-۵\\۵&-۵\end{bmatrix}\Rightarrow(۵A)^{-۱}=\frac{۱}{-۵۰}\begin{bmatrix}-۵&۵\\-۵&۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۰}&-\frac{۱}{۱۰}\\\frac{۱}{۱۰}&-\frac{۳}{۱۰}\end{bmatrix}$

۵۸ $(B^{۲}+۲I)=\begin{bmatrix}۵&۱&۶\\۶&۱۰&۸\\۷&۷&۱۸\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۱&۶\\۶&۱۲&۸\\۷&۷&۲۰\end{bmatrix}$ (ص ۲۰ و ۱۹)

۵۹ $m-۲=۰\Rightarrow m=۲n=m=۲$ (ص ۱۲)

۶۰ $B=\begin{bmatrix}۲&۰&۱\\۱&۳&۱\\۱&۱&۴\end{bmatrix}$ (ص ۲۱)

۶۱ $|A|=۲$ (ص ۲۹ و ۳۱)

$||A|\,A|=|A|^{۳}\,|A|=|A|^{۴}=۱۶$

۶۲ نادرست (ص ۲۶)

۶۳ $A-۲I=\begin{bmatrix}۴&۱\\۰&۳\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۰&۱\end{bmatrix}$

$|A-۲I|=۲\Rightarrow(A-۲I)^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱&-۱\\۰&۲\end{bmatrix}$ (ص ۲۳)

۶۴ $(A-B)^{۲}=(A-B)(A-B)=A^{۲}-\mathrm{AB}-\mathrm{BA}+B^{۲}\xrightarrow{\mathrm{AB}=\mathrm{BA}}A^{۲}-۲\mathrm{AB}+B^{۲}$

(ص ۲۱)

۶۵ الف) $A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۷ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$

ب) $B^۲=B\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۶\\ -۳ & ۷ & ۶\\ -۲ & ۲ & ۷\end{bmatrix}$ (ص ۲۱)

۶۶ $\begin{cases}m+۱=۰\\ ۲n+۴=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ n=-۲\end{cases}$

$A+I=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۰ & ۶\end{bmatrix}$ (ص ۲۱ و ۱۹)

۶۷ $۲x-۱=۵\Rightarrow x=۳$ (ص ۱۳)

۶۸ $X=A^{-۱}\times B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}\ x=۱۰.\ y=۲$ (ص ۲۴)

۶۹ الف) $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۴ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۶\end{bmatrix}$ (ص ۲۱ و ۲۸)

ب) $|B|=۳۹$

۷۰ $A\times B=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲\alpha\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۲a-۸=۰\Rightarrow a=۴\\ b-۳=۰\Rightarrow b=۳\end{cases}$ (ص ۲۱)

۷۱ درست (ص ۳۱)

۷۲ دو (ص ۱۲)

۷۳ $|A\,|A||=|۴A|=۴^۳\,|A|=۴^۴$

۷۴ $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۴ & ۳\end{bmatrix},X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-۱}B=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۴ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\ ۱۰\end{bmatrix}$

۷۵ $B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$

$\mathrm{AB}=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۳ & -۳\end{bmatrix}\Rightarrow|\mathrm{AB}|=۴(۶)-۱(-۶)+۵(-۶)=۰$

۷۶ $A=B \rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۳ \\ ۲x+y=۵ \\ z=-۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳}{۲} \\ y=۲ \end{cases}$

$\Rightarrow x+۲y+۳z=\frac{-۱}{۲}$

۷۷ الف) ماتریس ب) مشترک پ) خارج ت) صفر

۷۸ الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست

۷۹ $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{۲}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۱}{۳} \Rightarrow m(m-۱)=۲ \Rightarrow \begin{cases} m=-۱ \\ m=۲ \end{cases}$ (ص ۲۶)

۸۰ $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow |A^{-۱}|=۸, A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ (ص ۲۳)

۸۱ الف) خیر - زیرا دو ماتریس هم مرتبه نیستند. (ص ۱۳)

ب) $A\times B=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ & -۲ \\ -۴ & ۶ & -۴ \\ -۸ & ۱۱ & -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow |A\times B|=۰$ (ص ۳۰)

۸۲ $A\times B=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -۸+۲a=۰ \rightarrow a=۴ \\ b-۳=۰ \rightarrow b=۳ \end{cases}$ (ص ۲۱)

۸۳ الف) نادرست (ص ۲۱) ب) نادرست (ص ۳۹) پ) نادرست (ص ۴۲) ت) درست (ص ۸۱)

۸۴ الف) قطری (ص ۱۲) ب) مشترک (ص ۳۶) پ) پاره‌خط (ص ۴۹) ت) yoz (ص ۷۳)

۸۵ $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۳+۸}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$

۸۶ $|۲A|=(|A|^{۲}+۴) \Rightarrow (|A|-۲)^{۲}=۰ \Rightarrow |A|=۲$

$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۲}$

۸۷ $\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ n=-۱ \end{cases}$

$AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$

۸۸ الف) درست ب) نادرست پ) درست ت) نادرست

۸۹) الف) ۸ ب) خط پ) دایره ت) ۶

۹۰) $|A| = (۴ - ۹ - ۴) - (-۴ - ۱۲ + ۳) = -۹ + ۱۳ = ۴, |B| = -۶$

$|A \times B| + |۲I_۳| = |A| \times |B| + ۸|I| = -۲۴ + ۸ = -۱۶$

۹۱) $A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}, |A| = ۳ + ۱۰ = ۱۳ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-۱} \times B = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} -۱ + ۴۰ \\ ۲ + ۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۳, y = ۲$

۹۲) $A \times B = \begin{bmatrix} ۴ + ۳a & -۸ + ۲a \\ b - ۳ & -۲b - ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲a - ۸ = ۰ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴ \\ b - ۳ = ۰ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$

۹۳) $[۲x \quad ۴x - ۲] = [۴ \quad y - ۲] \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \\ ۴x - ۲ = y - ۲ \Rightarrow y = ۸ \end{cases}$

۹۴) $a_{۳۳} = ۲, a_{۳۱} = ۳ + ۱ = ۴, a_{۱۲} = ۱ - ۲ = -۱$

۹۵) $\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۶ \end{vmatrix} = ۱۰ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۱, y = -۱$

۹۶) $\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ m & ۶ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow ۶ + ۲m = ۰ \Rightarrow m = -۳$

۹۷) $\left.\begin{aligned} A^۲ &= \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۴ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix} \\ \mathrm{mA} + \mathrm{nI} &= \begin{bmatrix} ۰ & ۴\mathrm{m} \\ ۲\mathrm{m} & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & ۰ \\ ۰ & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & ۴\mathrm{m} \\ ۲\mathrm{m} & m + n \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = ۸, m = ۱$

۹۸) دترمینان ماتریس A را برحسب ستون اول به دست می‌آوریم.

$|A| = ۲\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۲ \times ۱۰ = ۲۰, |B| = -۶ \Rightarrow |B^۲| = ۳۶$

$|A| + |B^۲| = ۵۶$

۹۹) $[x \quad ۳]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = [x - ۳ \quad ۱۲]\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = [۳x - ۲۱] = ۰ \Rightarrow x = ۷$

۱۰۰) $\begin{cases} x - ۱ = y + ۱ \\ x - ۲ = ۸ \\ z + ۱ = ۴ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۰, y = ۸, z = ۳ \Rightarrow x + y + z = ۲۱$

۱۰۱) الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) نادرست

۱۰۲ الف) $m = ۱$ ب) $\frac{۵}{۸}$ پ) $\frac{۱}{۲}$ ت) نقطه

۱۰۳ الف) $\frac{۲m}{۲} \neq \frac{۳}{-۱} \Rightarrow m \neq -۳$

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -۱۰ \neq ۰, A^{-۱} = \frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

ب) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{-۱۰}\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ \end{cases}$

۱۰۴ $\begin{bmatrix} ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲+x & ۴+۲x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۲x+۴+۲x \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow x = -۲$

۱۰۵ الف) $|A| = ۵|A| - ۲۴ \Rightarrow |A| = ۶$

ب) ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با: $A^{-۱} = \frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۸ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}$

۱۰۶ $\begin{cases} m - ۲ = ۰ \to m = ۲ \\ n + ۱ = ۰ \to n = -۱ \end{cases}$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \to |B| = ۲(-۱) - ۱(۷) + ۱(-۲) = -۱۱, |A| = ۲$$

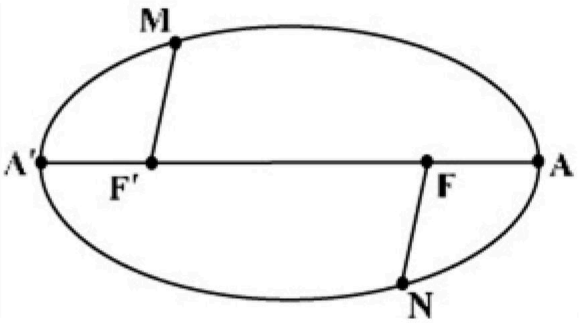
$$|A| + |B| = ۲ + (-۱۱) = -۹$$

۱۰۷ الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) نادرست

۱۰۸ الف) ۶- ب) اسکالر پ) بیرون ت) کانون سهمی

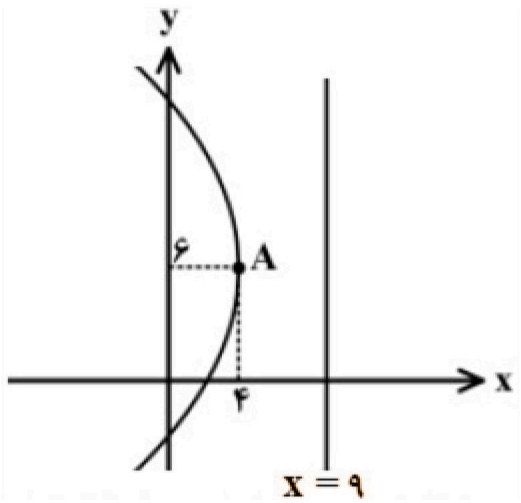
Medical _ Stus | Kolyze

۱ در شکل مقابل دو نقطهٔ M و N روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. با فرض $MF' = NF$، نشان دهید MF موازی NF' است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۲ در شکل زیر نمودار یک سهمی و خط هادی آن رسم شده است. مختصات کانون و معادلهٔ سهمی را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۳ وضعیت دو دایرهٔ $C: x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + ۱ = ۰$ و $C': (x+۳)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-۱, ۲)$ مرکز آن بوده و بر خط $۴x - ۳y + ۵ = ۰$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۵ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۶ معادلهٔ محور سهمی $(x-۲)^۲ = ۴(y+۲)$ کدام است؟

۱) $x = ۲$ ۲) $y = ۲$ ۳) $x = -۲$ ۴) $y = -۲$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۷ در یک بیضی با طول قطرهای ۶ و ۸ سانتی‌متر، فاصلهٔ کانونی چند سانتی‌متر است؟

۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۷}$ ۴) $۴\sqrt{۷}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۸ پاسخ صحیح را از میان کلمات داخل پرانتز انتخاب کنید و بنویسید.

الف) اگر صفحه‌ای موازی با مولد یک سطح مخروطی، از رأس آن عبور نکند، آنگاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک ..... است. (هذلولی - سهمی)

ب) دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ..... هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۰$. (بر هم عمود - با هم موازی)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۹ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) هر ماتریس مربعی یک ماتریس اسکالر است.

ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر شود، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

پ) برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، تساوی $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ همواره برقرار است.

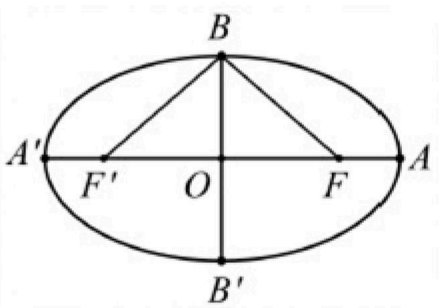
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۱۰ مختصات کانون و معادلهٔ سهمی به رأس $A(-۲, ۵)$ و خط هادی $x = ۳$ را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۱ در بیضی مقابل با کانون‌های F, F'، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است.

اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{OFB}$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۱, ۳), B(۳, -۱)$ دو سر قطر آن باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۳ در نقطهٔ $A(-۱, ۰)$ روی دایرهٔ $(x-۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲۰$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۴ دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۵ مختصات کانون و معادلهٔ سهمی به رأس $A(-۲,۵)$ و خط هادی $x = ۳$ را بنویسید.

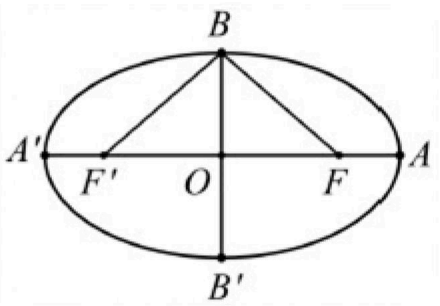
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۶ پاسخ هر یک از عبارت‌های ستون A را از ستون B انتخاب کنید (یکی از اعداد ستون B اضافه است).

B	A
۳	الف) مقدار m در دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - my = ۳$ در صورتی‌که مرکز دایره $(۱ , ۰)$ باشد.
۲	ب) مقدار فاصلهٔ کانونی یک بیضی با قطر کانونی ۶ که دارای خروج از مرکز $\frac{۱}{۲}$ است.
۱	

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۷ در بیضی مقابل با کانون‌های F', F، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است.
اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{OFB}$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۱,۳), B(۳,-۱)$ دو سر قطر آن باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۹ در نقطهٔ $A(-۱,۰)$ روی دایرهٔ $(x-۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲۰$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۲۰ دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۲۱ پاسخ هر یک از عبارت‌های ستون A را از ستون B انتخاب کنید (یکی از اعداد ستون B اضافه است).

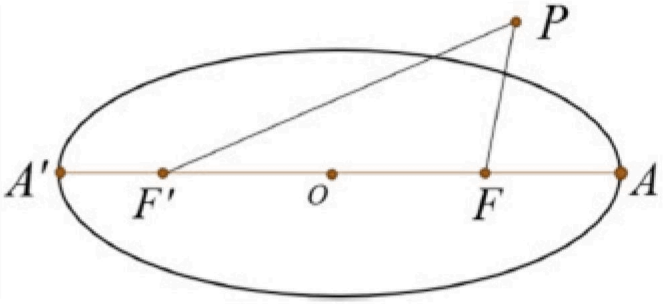
B	A
۳	
۲	
۱	

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۲۲ سهمی به معادله $y^۲ - ۴x = ۴y$ داده شده است. مختصات رأس و کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۳ نقطه P بیرون بیضی با قطر بزرگ $AA' = ۲a$ و کانون‌های F و F' مفروض است.
ثابت کنید: $PF + PF' > ۲a$ (رسم شکل در پاسخبرگ الزامی است.)



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۴ خروج از مرکز یک بیضی با اندازه قطرهای ۴ و ۶ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(۱, -۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $۴x - ۳y = ۲$ وتری به طول ۶ جدا کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۶ مقدار m را چنان تعیین کنید که دایره به معادله $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y + m = ۰$ با دایره به مرکز $O(۲, -۳)$ و شعاع ۳ مماس بیرون باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۷ نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. (درباره تعداد جواب‌های مسأله بحث کنید.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۸ برای هریک از عبارت‌های الف و ب مورد مناسب را از بین کلمات (سهمی - بیضی - نقطه) انتخاب کرده و بنویسید. (یک مورد اضافی است).
الف) فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی در حالتی‌که صفحه بر محور سطح مخروطی عمود بوده و از رأس آن بگذرد.
ب) مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۹ نقطه دلخواه M روی سهمی مفروض است. ثابت کنید هر دایره به مرکز M که از کانون سهمی بگذرد، بر خط هادی سهمی مماس است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۰ سهمی به معادله $y^۲ = -۲x - ۴y$ مفروض است.
الف) معادله متعارف (استاندارد) سهمی را بنویسید.
ب) مختصات رأس و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

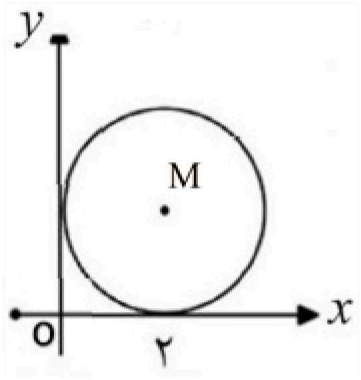
۳۱ در بیضی فاصله یک کانون از نزدیک‌ترین رأس برابر ۲ و اندازه قطر کوچک بیضی برابر ۸ است. مقدار خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۲ وضعیت خط به معادله $x+y=۴$ و دایره به معادله $x^۲+y^۲=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۳ در شکل زیر، دایره $C(M,R)$ بر محورهای مختصات مماس است.



مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را بیابید و سپس معادله ضمنی دایره را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۴ نقاط A و B و C در یک صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از نقاط A و B به یک فاصله بوده و از نقطه C به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد (در مورد تعداد جواب‌های ممکن بحث کنید.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
نقطه دلخواه M در صفحه بیضی مفروض است. اگر مجموع فاصله‌های نقطه مورد نظر از دو کانون بیضی، بیشتر از اندازه قطر بزرگ بیضی باشد، آنگاه نقطه M در درون بیضی قرار دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۶ جای خالی را کامل کنید.
هر گاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح ..... می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

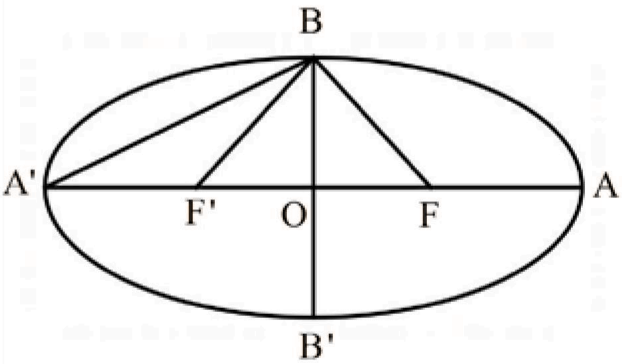
۳۷ یک شعاع نورانی در امتداد خط $x=۴$ بر سهمی $x^۲=۸y$ می‌تابد. معادله خط بازتاب را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۸ معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن $y=-۲$ و کانون آن $F(۱,-۴)$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۹ یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر $S_{\triangle FBF'}=۴S_{\triangle BA'O}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۴۰ نقاط $B(-۱,۲)$ و $B'(-۱,-۴)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله کانونی $۲\sqrt{۳}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۴۱ معادله دایره‌ای را بنویسید که خط‌های $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن باشند و روی خط به معادله $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ ایجاد می‌کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۴۲ وضعیت دایره به معادله $x^۲+y^۲-۶x+۱۲y+۲۰=۰$، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۴۳ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروضند، نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

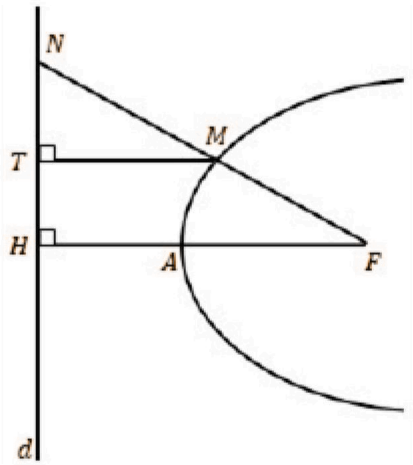
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۴۴ دایره‌هایی که مرکز آنها روی سهمی به معادله $(y-۱)^۲=-۸(x+۱)$ واقع است و از کانون سهمی می‌گذرند، بر خط به معادله ..... مماس هستند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

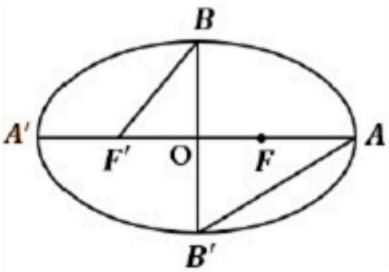
۴۵ در شکل مقابل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطه N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید: $\frac{FN}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۶ در بیضی مقابل، خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۷ وضعیت خط $x+y=۳$ و دایره $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایره $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶$ مماس داخل باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۹ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر و از d به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۵۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

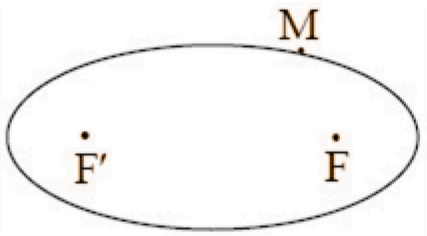
الف) اگر $A_{n\times n}$ ماتریس دلخواه I_n ماتریس همانی و $A^۲-A=I$ باشد، وارون ماتریس A، برابر $(I-A)$ است.

ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره $C'(O,۲r)$ است.

پ) بردار $\vec{a}=\left(۰,\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)$، یک بردار یکه است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۵۱ در شکل مقابل، نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده است. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF'=MF'$.

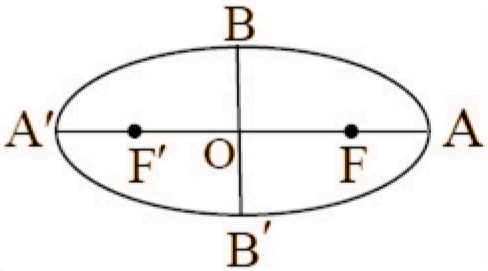


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۲ معادله سهمی با کانون $F(۱,۲)$ و خط هادی $x=-۳$ را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۳ در یک بیضی با کانون‌های F و F'، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازه زاویه $F\widehat{B}F'$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۴ وضعیت دو دایره به معادلات $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+۶x+۲y-۶=۰$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه راه‌حل)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و روی خط $۳x+۴y+۶=۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۵}$ جدا کند.
سپس محل تلاقی آن دایره با محور yها را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۶ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
در هر سهمی، هر شعاع نوری که از کانون آن به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن موازی با محور سهمی باز خواهد گشت.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۵۸ جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.
اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آنگاه سطح مقطع حاصل یک ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

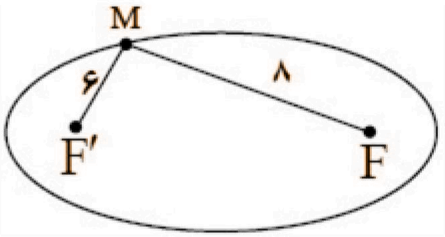
۵۹ اگر اندازه گودی (عمق) یک دیش مخابراتی دو برابر شود، فاصله کانونی این دیش چه تغییری می‌کند؟ (با ارائه راه‌حل)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۶۰ سهمی با رأس $A(۱,۲)$ و کانون $F(۱,-۲)$ مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید.

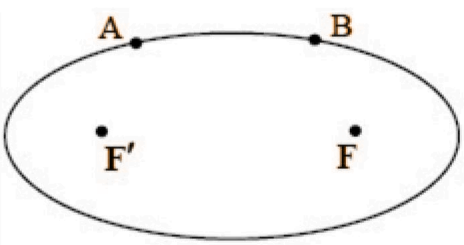
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۶۱ در شکل روبه‌رو نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارد، به طوری که $MF=۸$ و $MF'=۶$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۶}{۷}$ باشد، اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۶۲ در شکل روبه‌رو دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. اگر $AF'=BF$ و همچنین BF' و AF یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید: مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۶۳ مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y+c=۰$ بر دایره $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ مماس بیرون باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۶۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۱,۰)$ مرکز آن بوده و بر خط $x = -۳$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۶۵ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۶۶ مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، ..... آن زاویه است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۶۷ مختصات نقاط برخورد سهمی $y^۲ + ۷x + ۵ = ۰$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۸ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(-۳,۲)$ مختصات کانون و معادله خط هادی آن $x = ۱$ باشد.

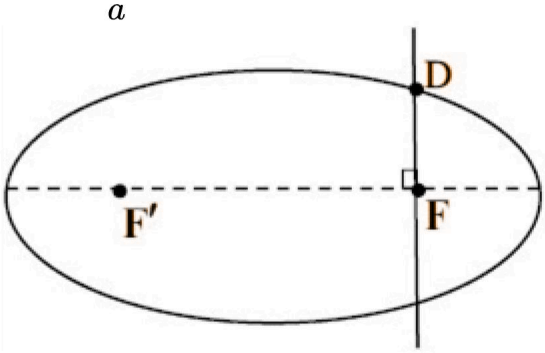
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۹ در یک بیضی مختصات کانون‌ها $F(۴,۰)$ و $F'(-۲,۰)$ و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطه $P(۱,m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۷۰ بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه D قطع کند، ثابت کنید:

$$DF = \frac{b^۲}{a}$$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۷۱ در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۷۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۲,-۱)$ مرکز آن بوده و از خط $۳x - ۴y + ۱۰ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۷۳ مکان هندسی مرکز همه دایره‌های با شعاع ثابت یک، که بر دایره $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱۶$ مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۷۴ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحهٔ P بر خط l عمود باشد، سطح مقطع صفحهٔ P و سطح ایجاد شده بیضی است. (درست - نادرست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۷۵ الف) معادله سهمی را بنویسید که $A(۲, ۳)$ رأس آن بوده و معادله خط هادی آن $x = ۳$ باشد.
ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.
پ) مختصات نقطه برخورد سهمی با محور طولها را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۷۶ اگر در یک بیضی طول AA' (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{۳}{۴}$ باشد، فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

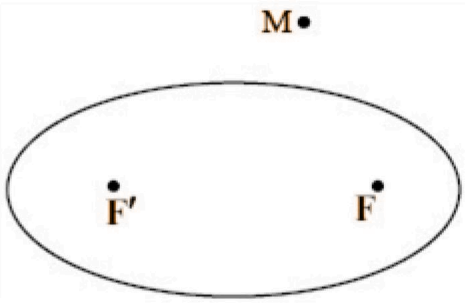
۷۷ وضعیت خط $x + y = ۱$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y - ۲ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۷۸ حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + a = ۰$ معادله یک دایره باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۷۹ اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه M از کانونهای F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۸۰ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۸۱ سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست - نادرست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

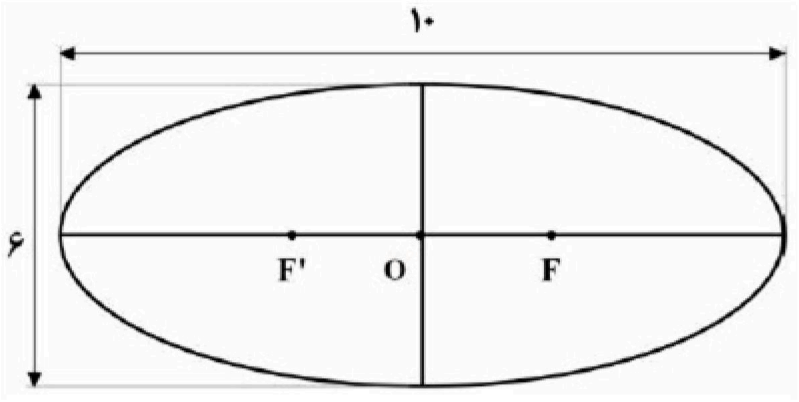
۸۲ اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۸۳ معادله گسترده دایرهٔ $C(O, R)$ به شکل $x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x - ۴ = ۰$ است.
الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.
ب) آیا نقطه $A(۰, ۳)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۸۴ در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)

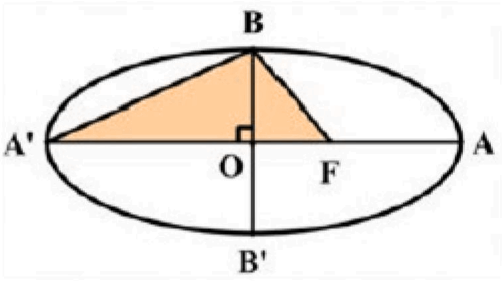


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۸۵ معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(۱, ۴)$ و بر خط $۳x + ۴y = -۱$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۸۶ اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به‌ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:
الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)
ب) مساحت مثلث هاشورخورده $(\overset{\triangle}{BFA'})$ چقدر است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۸۷ کدام‌یک از نقاط زیر روی محیط دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ قرار دارد؟

۱) $(۰, ۰)$ ۲) $(۱, ۰)$ ۳) $(۰, -۱)$ ۴) $(-۱, ۰)$

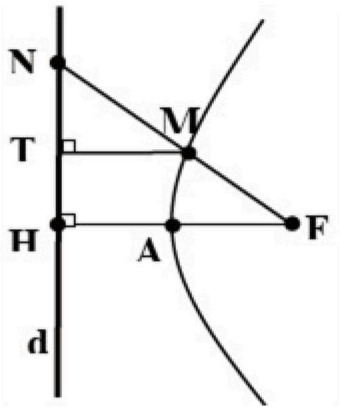
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۸۸ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۸۹ در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۹۰ الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y - ۸x + ۹ = ۰$ را بیابید.

ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۹۱ در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است،

الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.

ب) مختصات کانون‌ها (F', F)، مختصات دوسر قطر بزرگ (A', A) و دوسر قطر کوچک (B', B) را به دست آورید.

پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۹۲ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(۱, -۱)$ و بر خط $۳x - ۴y + ۳ = ۰$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۹۳ نقاط A, B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

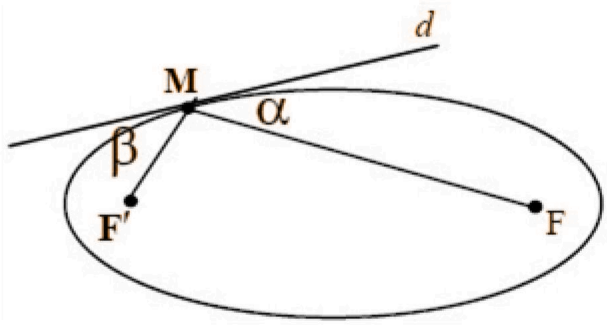
۹۴ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.

- اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۹۵ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.

- در شکل روبرو اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد، زاویه $F\widehat{M}F'$ باشد آنگاه اندازه زاویه $\alpha = \beta = ۶۰^\circ$ است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۹۶ عبارت زیر را کامل کنید.

- نقطه $A(۱,-۲)$ در ..... دایره به معادله $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۹۷ عبارت زیر را کامل کنید.

- اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به ..... نزدیکتر می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۹۸ معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(۰,۳)$ و بر خط $۳x-۴y=۳$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

۹۹ سهمی $y^۲=۲x+۴y$ را درنظر بگیرید.

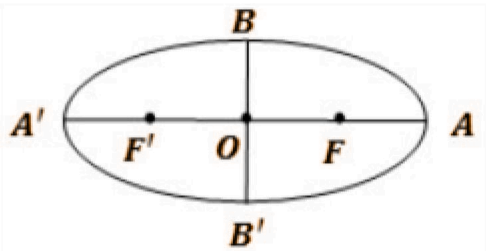
الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب) نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

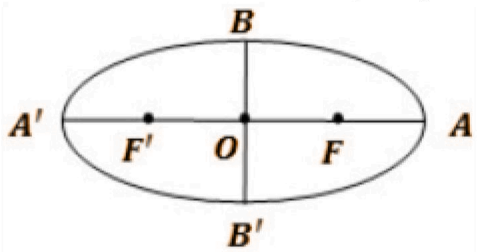
۱۰۰ در بیضی روبه‌رو: $OF=OF'=c, OB=OB'=b, OA=OA'=a$

ثابت کنید: $b^۲+c^۲=a^۲$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

۱۰۱ اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

۱۰۲ در نقطه $A(۲,۳)$ روی دایره به معادله $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

۱۰۳ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,۳)$ بوده و $M(۱,۱)$ یک نقطه از آن باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

۱۰۴ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می‌شود.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.

ت) اگر برای دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ داشته باشیم: $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|$، در این صورت زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۱۰۵ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند آن‌گاه: $|AB| = |A||B|$

ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

پ) در حالتی‌که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

ت) نقطه با مختصات $(-۲, ۳, -۴)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۱۰۶ وضعیت خط $x + y = ۳$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۰۷ در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۴, ۵)$ باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

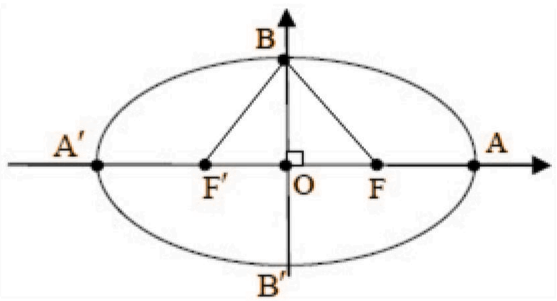
۱۰۸ سهمی به معادله‌ی $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را درنظر بگیرید:

الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب) نمودار سهمی را رسم کنید.

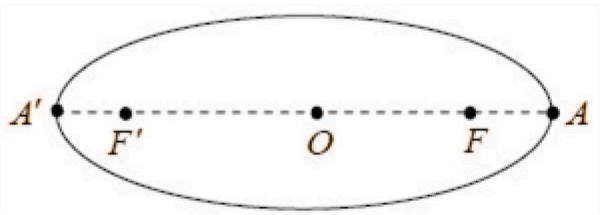
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۰۹ در بیضی مقابل، طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول قطر بزرگ است. اندازه زاویه $F'BF$ را به دست آورید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۱۰ در بیضی روبه‌رو نقاط A', A دو سر قطر بزرگ و نقاط F', F کانون‌های بیضی هستند ثابت کنید: $A'F' = AF$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۱۱ در نقطه $A(۲, ۳)$ روی دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۱۲ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(۰, ۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x + y = ۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۱۳ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند آن‌گاه عبارت $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ همواره برقرار است.

ب) اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

پ) نقطه $(۳, -۲)$ روی دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۰$ قرار دارد.

ت) برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در $R^۳$، داریم: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۱۴ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطراصلی آن صفر باشند را ماتریس ..... گویند.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) در حالتی که $\frac{c}{a} = ۱$ بیضی به یک ..... تبدیل می‌شود.

ت) بردار $\vec{a} = ۲\vec{j} - \vec{k}$ در فضا سه بعدی بر صفحه‌ی مختصات سه بعدی ..... منطبق است.

$(\text{xoz}, \text{yoz}, \text{xoy})$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۱۱۵ در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۱۶ اگر نقطه ی $A(۲, ۳)$ رأس سهمی و $y = ۷$ معادله‌ی خط هادی سهمی باشد:

الف) معادله سهمی را به دست آورید.

ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.

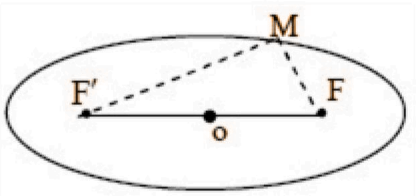
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۱۷ نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب) طول MF را به دست آورید.

(F, F' کانون‌های بیضی هستند و $\text{MF} < \text{MF}'$).



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

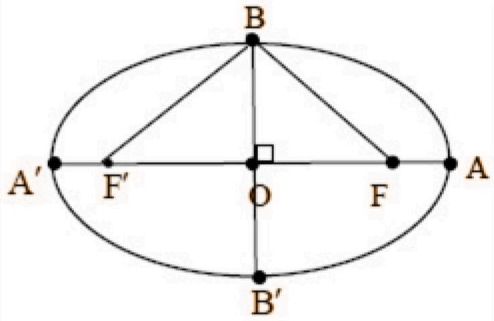
۱۱۸ وضعیت دایره $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰$ با دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۱۹ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲,۱)$ بوده و بر خط $۳x + ۴y = -۵$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۲۰ در شکل مقابل اگر $\mathrm{OF} = c, \mathrm{OB} = b, \mathrm{OA} = a$ باشد، ثابت کنید: $a^۲ = b^۲ + c$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۲۱ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $\mathrm{rA} = \mathrm{rB}$ آن‌گاه داریم: $A = B$.

ب) مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.

پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

ت) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۲۲ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است.

ب) اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.

پ) در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a} = ۰$ بیضی به ..... تبدیل می‌شود.

ت) در فضای $R^۳$، نقطه $(-۳, ۲, -۵)$ در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۲۳ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۳, ۱)$ و $(-۵, ۱)$ است.

الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است.)

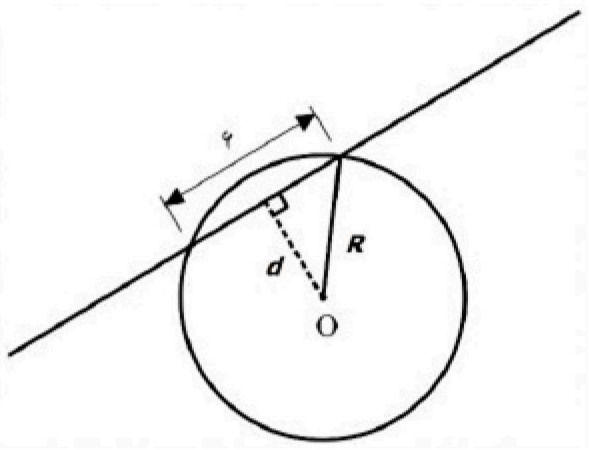
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۲۴ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

- شعاع دایره‌ای به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۲۵ مرکز دایره‌ای، نقطه $O(۲, -۳)$ است. این دایره روی خط $۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله دایره را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

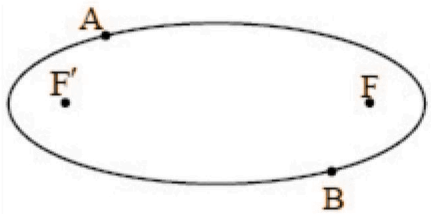
۱۲۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
- هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۲۷ معادله سهمی را بنویسید که $A(۱, ۲)$ رأس و $F(۱, -۲)$ کانون آن باشد، و سپس معادله خط هادی آن‌را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۲۸ دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند اگر $AF' = BF$ باشد ثابت کنید دو پاره‌خط AF و BF' موازی‌اند.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۲۹ وضعیت دو دایره $(x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱$ و $x^۲ + (y - ۱)^۲ = ۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۳۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x + ۳y = -۵$ بر آن مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۳۱ نقطه A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد. بحث کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۳۲ اگر معادله دایره به شکل $(x + ۱)^۲ + y^۲ = ۴$ باشد:
الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.
ب) مختصات تقاطع دایره با محور xها را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۳۳ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴, -۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۳۴ عبارت مناسب را انتخاب کنید.

اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل ..... نزدیک خواهد شد. (پاره‌خط - دایره - نقطه)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۳۵ معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۳x + ۴y = ۱$ مماس بوده و مرکز آن $(۱, ۲)$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۳۶ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۲, ۵)$ و $(۲, -۳)$ و $a = ۵$ است. مختصات مرکز و اندازه‌ی قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۳۷ عبارت مناسب را انتخاب کنید.

اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی ..... خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۳۸ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰, ۱)$ باشد و با دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۸x + ۴y + ۱۶ = ۰$ مماس داخل باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۳۹ معادله‌ی سهمی را بنویسید که $A(۴, ۶)$ رأس و $y = ۳$ معادله خط هادی آن باشد.

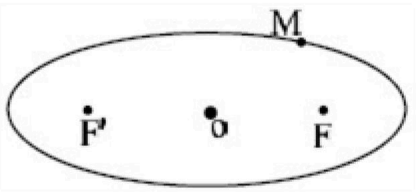
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۴۰ مختصات کانون، رأس و معادله‌ی خط هادی سهمی به معادله $y^۲ - ۶y + ۱۶x + ۲۵ = ۰$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

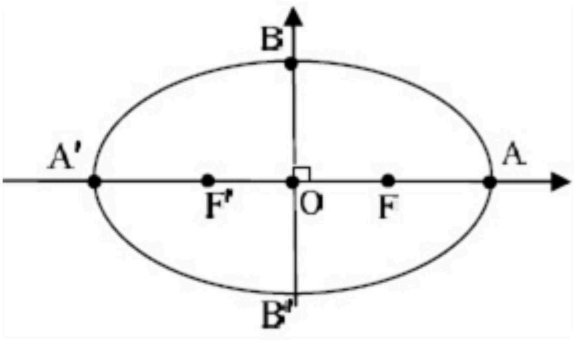
۱۴۱ در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه‌ی F' خط موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند.

ثابت کنید: $NF' = MF'$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۴۲ مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۴۳ وضعیت خط $x - y - ۱ = ۰$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۳ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۴۴ معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $O(۳,۱)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $۴x + ۳y + ۵ = ۰$ مماس باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۴۵ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + by = c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) هرگاه صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

ت) رابطه $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۴y + ۱۰ = ۰$ معادله‌ی یک دایره است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۴۶ جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

الف) در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ m-۱ & ۴ \end{bmatrix}$ مقدار m برابر ..... است.

ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۵$ باشد آن‌گاه $\left|\frac{۱}{۲}A\right|$ برابر ..... است.

پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر ..... است.

ت) سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۴۷ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است.

الف) فاصله‌ی کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = ۵$ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

۱۴۸ سهمی $y^۲ = ۴x$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

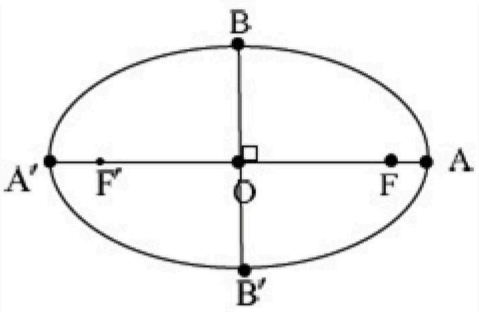
۱۴۹ الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^۲ - ۴y + ۸x = ۰$ را به دست آورید.
ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۵۰ اگر در یک بیضی طول قطر کوچک ۲۴ و فاصله کانون تا مرکز آن برابر ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.

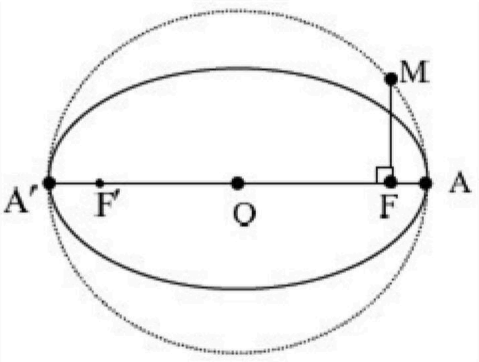
سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۵۱ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه‌ی $F\widehat{B}F'$ چند درجه است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۵۲ قطر دایره C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۵۳ وضعیت نقطه $A(۱, -۲)$ نسبت به دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰$ را تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۵۴ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-۱, -۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x + y = ۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۵۵ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله واز C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۵۶ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) در حالت کلی حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی دارد.
ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۲$ باشد آن‌گاه $|۲A| = ۱۶$ است.
پ) مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره‌ی $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره $C'(O, ۲r)$ است.
ت) در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد بیضی تبدیل به یک دایره می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۵۷ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر $A = \begin{bmatrix} a & ۸ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، مقدار a برابر ..... است.

ب) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند آن‌را یک ماتریس ..... می‌نامیم.

پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.

ت) هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از ..... خواهد گذشت.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۹۹

۱ M روی بیضی است، پس داریم: $MF + MF' = ۲a$

N روی بیضی است، پس داریم: $NF + NF' = ۲a$

پس: $MF + MF' = NF + NF' \xrightarrow{MF'=NF} MF = NF'$

بنابراین چهارضلعی $MFNF'$ متوازی‌الاضلاع است لذا $MF \parallel NF'$

۲ $F(-۱, ۶) \qquad (y-۶)^۲ = -۲۰(x-۴)$

توجه: در صورتی که فقط $a = ۵$ (فاصله کانونی سهمی) نوشته شده باشد منظور گردد.

۳ $\left.\begin{matrix} O(۱,-۱) & O'(-۳,۲) \Rightarrow OO' = ۵ \\ r = ۱ & r' = ۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{OO'>r+r'}$ دو دایره متخارج هستند.

توجه: به جای «دو دایره متخارج هستند»، نوشتن جملهٔ «نقطهٔ برخورد ندارند» نیز قابل قبول است.

۴ شعاع : $r = \frac{|-۴-۶+۵|}{\sqrt{۱۶+۹}} = ۱$ معادله دایره : $(x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱$

۵ مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آنها از نقاط A و B به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف AB قرار دارند.

مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آنها از نقاط C و D به یک فاصله باشند، روی عمودمنصف CD قرار دارند.

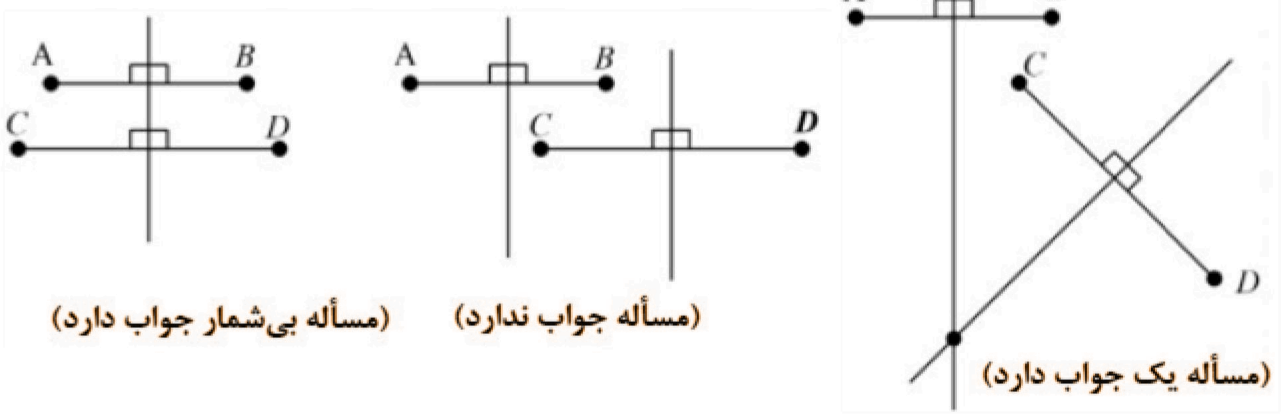
محل برخورد دو عمودمنصف جواب مسأله است.

بحث: حالت اول: اگر دو عمودمنصف موازی باشند، مسأله جواب ندارد.

حالت دوم: اگر دو عمودمنصف بر هم منطبق باشند، مسأله بی‌شمار جواب دارد.

حالت سوم: اگر دو عمودمنصف متقاطع باشند، مسأله یک جواب دارد.

توجه: در صورت پاسخگویی ترسیمی و بیان حالات بحث (به صورت رسم شکل) نمره کامل منظور گردد.



۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۸ الف) سهمی ب) بر هم عمود

۹ الف) نادرست ب) درست پ) نادرست

۱۰ $a = ۵ \qquad F(-۷, ۵) \qquad (y-۵)^۲ = -۲۰(x+۲)$

۱۱ راه‌حل اول:

$$a=۲b\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۳}b,\tan(\widehat{OFB})=\frac{OB}{OF}=\frac{b}{\sqrt{۳}b}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \widehat{OFB}=۳۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

$$a=۲b\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۳}b,\tan(\widehat{OBF})=\frac{OF}{OB}=\frac{\sqrt{۳}b}{b}=\sqrt{۳}\Rightarrow \widehat{OBF}=۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OFB}=۳۰^\circ$$

راه‌حل سوم:

$$a=۲b,\mathrm{Cos}(\widehat{OBF})=\frac{OB}{BF}=\frac{b}{a}=\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \widehat{OBF}=۶۰^\circ\Rightarrow \widehat{OFB}=۳۰^\circ$$

راه‌حل چهارم:

$$a=۲b,\mathrm{Sin}(\widehat{OFB})=\frac{OB}{BF}=\frac{b}{a}=\frac{b}{۲b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \widehat{OFB}=۳۰^\circ$$

۱۲ روش اول:

$$\left.\begin{matrix}O=(۲,۱)\\ r=\sqrt{۵}\end{matrix}\right\}\Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۵$$

روش دوم:

$$O(۲,۱)\Rightarrow \frac{-a}{۲}=۲,\frac{-b}{۲}=۱\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۲y+c=۰\xrightarrow{A(۱,۳)}$$

$$۱^۲+۳^۲-۴(۱)-۲(۳)+c=۰\Rightarrow c=۰$$

$$x^۲+y^۲-۴x-۲y=۰$$

۱۳

$$O(۱,۴)\qquad m_{OA}=۲\Rightarrow m'=-\frac{۱}{۲}$$

$$y-۰=-\frac{۱}{۲}(x+۱)\ \text{یا}\ y=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ x+۲y=-۱$$

۱۴ روش اول: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B فاصله برابر دارند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

مکان هندی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن است.

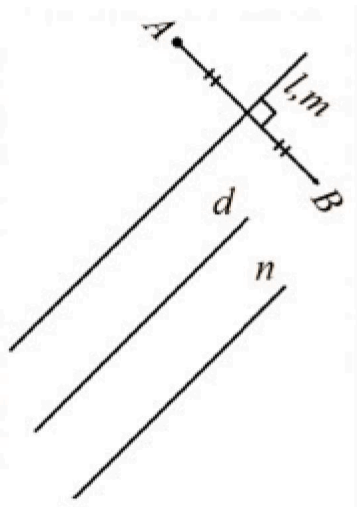
نقاط برخورد عمودمنصف با دو خط موازی جواب مسئله است.

بحث: حالت اول: اگر خط عمودمنصف، هر دو خط موازی را قطع کند، مسئله دارای دو جواب است.

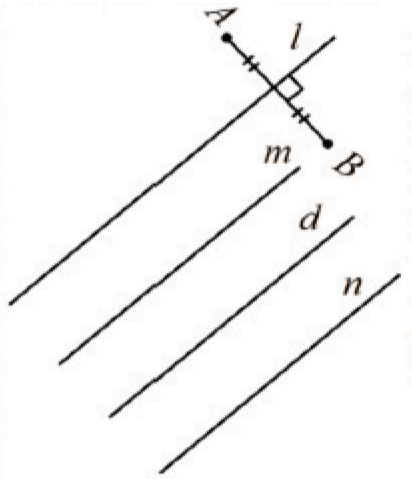
حالت دوم: اگر خط عمودمنصف، دو خط موازی را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.

حالت سوم: اگر خط عمودمنصف، منطبق بر یکی از دو خط موازی باشد، مسئله دارای بی‌شمار جواب است.

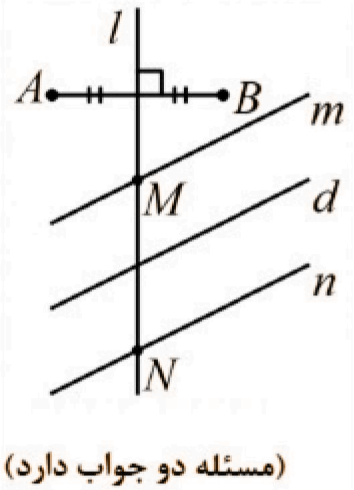
روش دوم:



(مسئله بی شمار جواب دارد)



(مسئله جواب ندارد)



(مسئله دو جواب دارد)

۱۵ $a = ۵ \qquad F(-۷, ۵) \qquad (y-۵)^۲ = -۲۰(x+۲)$

۱۶ الف) ۲ ب) ۳

۱۷ راه‌حل اول:

$$a=۲b\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۳}b,\tan(\widehat{OFB})=\frac{OB}{OF}=\frac{b}{\sqrt{۳}b}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \widehat{OFB}=۳۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

$$a=۲b\Rightarrow a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow c=\sqrt{۳}b,\tan(\widehat{OBF})=\frac{OF}{OB}=\frac{\sqrt{۳}b}{b}=\sqrt{۳}\Rightarrow \widehat{OBF}=۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{OFB}=۳۰^\circ$$

راه‌حل سوم:

$$a=۲b,\mathrm{Cos}(\widehat{OBF})=\frac{OB}{BF}=\frac{b}{a}=\frac{b}{۲a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \widehat{OBF}=۶۰^\circ\Rightarrow \widehat{OFB}=۳۰^\circ$$

$$a=۲b,\mathrm{Sin}(\widehat{OFB})=\frac{OB}{BF}=\frac{b}{a}=\frac{b}{۲b}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \widehat{OFB}=۳۰^\circ$$

راه‌حل چهارم:

۱۸ روش اول:

$$\left.\begin{matrix}O=(۲,۱)\\ r=\sqrt{۵}\end{matrix}\right\}\Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۵$$

روش دوم:

$$O(۲,۱)\Rightarrow \frac{-a}{۲}=۲,\frac{-b}{۲}=۱\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۲y+c=۰\xrightarrow{A(۱,۳)}$$

$$۱^۲+۳^۲-۴(۱)-۲(۳)+c=۰\Rightarrow c=۰$$

$$x^۲+y^۲-۴x-۲y=۰$$

۱۹

$$O(۱,۴)\qquad m_{OA}=۲\Rightarrow m'=-\frac{۱}{۲}$$

$$y-۰=-\frac{۱}{۲}(x+۱)\ \text{یا}\ y=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\ \text{یا}\ x+۲y=-۱$$

۲۰ روش اول: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B فاصله برابر دارند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

مکان هندی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن است.

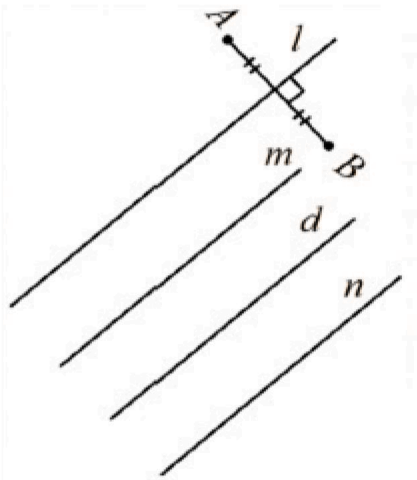
نقاط برخورد عمودمنصف با دو خط موازی جواب مسئله است.

بحث: حالت اول: اگر خط عمودمنصف، هر دو خط موازی را قطع کند، مسئله دارای دو جواب است.

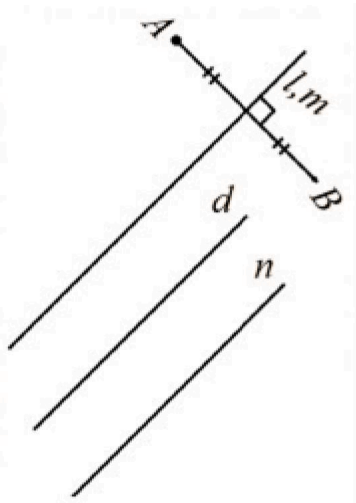
حالت دوم: اگر خط عمودمنصف، دو خط موازی را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.

حالت سوم: اگر خط عمودمنصف، منطبق بر یکی از دو خط موازی باشد، مسئله دارای بی‌شمار جواب است.

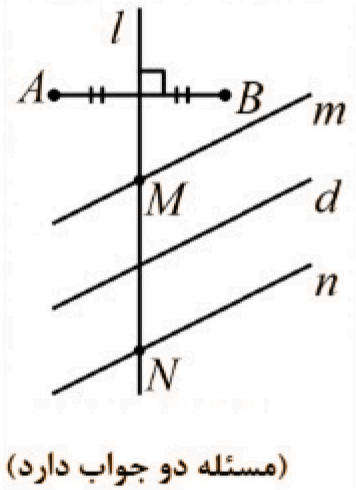
روش دوم:



(مسئله جواب ندارد)



(مسئله بی شمار جواب دارد)



(مسئله دو جواب دارد)

۲۱ الف) ۲ ب) ۳

۲۲ $y^۲ - ۴y = ۴x \Rightarrow y^۲ - ۴y + ۴ = ۴x + ۴ \Rightarrow (y-۲)^۲ = ۴(x+۱)$

لذا سهمی فوق یک سهمی افقی رو به راست می‌باشد و در آن داریم:

$$\begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ y-۲=۰ \Rightarrow y=۲ \end{cases} \Rightarrow S(-۱,۲) \text{ راس سهمی}, \; ۴a=۴ \Rightarrow a=۱$$

$F(۰,۲)$ کانون , $x=-۲$ خط هادی

۲۳ محل تلاقی PF' با بیضی را M می‌نامیم (یا مشخص کردن M روی شکل).

در مثلث PMF بنابر قضیه نامساوی مثلث داریم:

$$PF + MP > MF$$

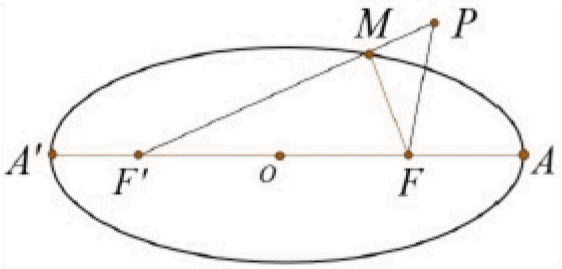
پس با افزودن MF' به طرفین نامساوی خواهیم داشت:

$$PF + MP + MF' > MF + MF' \Rightarrow PF + PF' > ۲a$$

نگارشی دیگر:

محل تلاقی PF' با بیضی را M می‌نامیم (یا مشخص کردن M روی شکل).

$$PF + PF' = PF + \overbrace{PM + MF'}^{PF'} > MF + MF' = ۲a$$



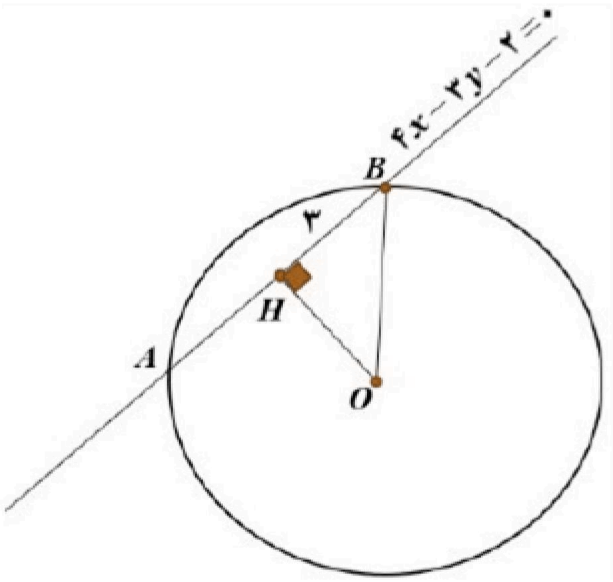
۲۴ روش اول:

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \end{cases}, a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۹ = ۴ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۵} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \end{cases}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^۲ - b^۲}}{a} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{۴}{۹}} = \sqrt{\frac{۵}{۹}} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

۲۵ شعاع عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند، لذا $HB = ۳$. (یا تعیین HB روی شکل)



$$OH = \frac{|۴ + ۳ - ۲|}{\sqrt{۱۶ + ۹}} = \frac{۵}{۵} = ۱ \Rightarrow r^۲ = OH^۲ + HB^۲ = ۱ + ۹ = ۱۰$$

معادلهٔ دایره: $(x - ۱)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۱۰$

۲۶ $O(۲,-۳), r=۳$

$O'(-۱,۱), r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸-۴m}=\sqrt{۲-m}$

$d=OO'=\sqrt{۹+۱۶}=۵, r+r'=d \Rightarrow ۳+\sqrt{۲-m}=۵ \Rightarrow \sqrt{۲-m}=۲$

$\Rightarrow ۲-m=۴ \Rightarrow m=-۲$

۲۷ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه A به فاصله ۲ cm باشند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۲ cm می‌باشد و مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۳ cm باشند، دو خط L و L' موازی با d و به فاصله ۳ cm از آن هستند.
نقطه برخورد آن دایره با این دو خط موازی (L و L')، جواب مسأله است.
بحث در وجود جواب:
حالت اول: دایره یکی از خطوط L یا L' را در دو نقطه قطع می‌کند. در این حالت مسأله دو جواب دارد.
حالت دوم: دایره بر یکی از خطوط L یا L' مماس است. در این حال مسأله یک جواب دارد.
حالت سوم: دایره هیچ یک از خطوط L یا L' را قطع نمی‌کند. در این حالت مسأله فاقد جواب است.

۲۸ الف) نقطه ب) سهمی

۲۹ از آنجایی که M نقطه‌ای روی سهمی است، در نتیجه فاصله M از کانون و خط هادی برابر است.
پس هر دایره که مرکز آن نقطه M بوده و از کانون بگذرد شعاعی برابر MF خواهد داشت. و بنابراین دایره به مرکز M و شعاع MF بر خط هادی سهمی مماس است.

۳۰ الف) $y^۲=-۲x-۴y \Rightarrow y^۲+۴y+۴=-۲x+۴ \Rightarrow (y+۲)^۲=-۲(x-۲)$

ب) $\begin{cases} A(۲,-۲) \\ ۴a=۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \end{cases} \quad x=\frac{۵}{۲}$

۳۱ $a-c=۲$

$a^۲-c^۲=b^۲ \Rightarrow a^۲-c^۲=۱۶ \Rightarrow (a-c)(a+c)=۱۶ \Rightarrow a+c=۸$

$\begin{cases} a-c=۲ \\ a+c=۸ \end{cases} \Rightarrow a=۵, c=۳ \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$

۳۲ روش اول: $O(۰,۰) \qquad R=۲$

فاصله مرکز دایره از خط مورد نظر $OH=\frac{|x+y-۴|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{|۰+۰-۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$

چون $OH > R$، بنابراین خط دایره را قطع نمی‌کند.
روش دوم:

$x^۲+y^۲=۴ \Rightarrow x^۲+(۴-x)^۲=۴ \Rightarrow ۲x^۲-۸x+۱۲=۰ \Rightarrow \Delta=-۳۲<۰$

معادله جواب ندارد. در نتیجه خط و دایره هیچ نقطه برخوردی ندارند.

۳۳ چون دایره بر محورهای مختصات مماس است، پس: $R=۲$. $M(۲,۲)$

$(x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۴ \Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۴y+۴=۰$

۳۴ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۲ cm باشند، دایره‌ای به مرکز نقطه C و شعاع ۲ cm است.

فصل مشترک دو مکان هندسی مورد نظر جواب مسأله است.

الف) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB دایره به مرکز C و شعاع ۲ cm را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

ب) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB دایره به مرکز C و شعاع ۲ cm مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

پ) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB دایره به مرکز C و شعاع ۲ cm را قطع نکند، مسأله فاقد جواب است.

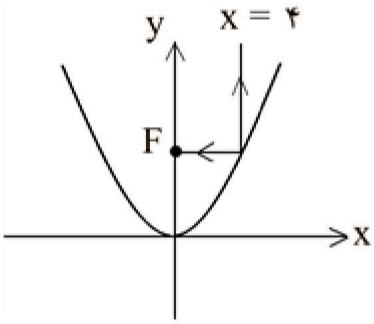
۳۵ نادرست

۳۶ استوانه‌ای

۳۷

$(x = ۴ \Rightarrow y = ۲) \Rightarrow A(۳, ۲)$

$(۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲) \Rightarrow F(۰, ۲) \Rightarrow y = ۲$ خط بازتاب از کانون می‌گذرد.



۳۸

$S = (۱, -۳)\,, a = ۱ \Rightarrow (x - ۱)^{۲} = -۴(y + ۳)$

۳۹

$$\frac{S_{\mathrm{FBF'}}}{S_{\mathrm{BA'O}}} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۲c \times b}{\frac{۱}{۲} \times a \times b} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۸}$$

۴۰

$\mathrm{BB'} = ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳\,, ۲c = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow c = \sqrt{۳}$

$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} = ۳^{۲} + (\sqrt{۳})^{۲} = ۱۲ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow \mathrm{AA'} = ۲a = ۴\sqrt{۳}$

۴۱

$$\begin{cases} x + y = ۱ \\ x - y = ۳ \end{cases} \Rightarrow O(۲, -۱) \Rightarrow \mathrm{OH} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,, r^{۲} = \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲} + (\sqrt{۲})^{۲} = \frac{۵}{۲}$$

$$(x - ۲)^{۲} + (y + ۱)^{۲} = \frac{۵}{۲}$$

۴۲

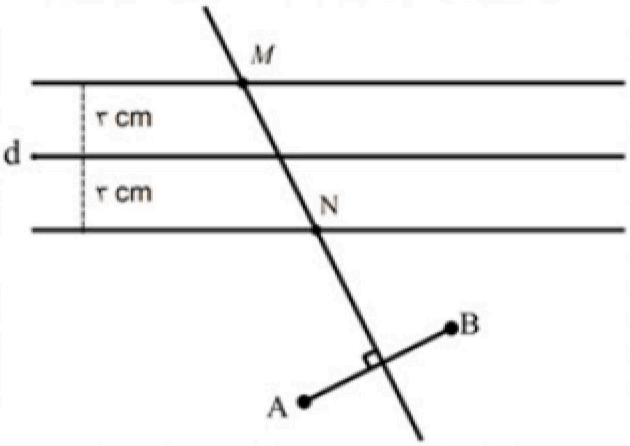
$O(۳, -۶)\,, R = ۵$

$O'(۰, ۰)\,, R' = ۳$

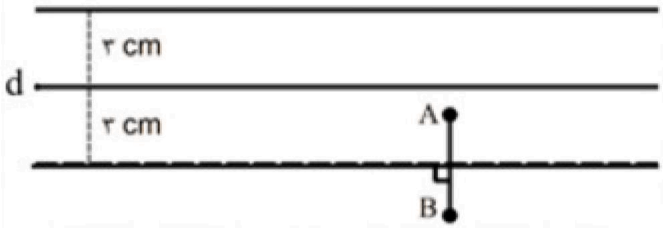
$\mathrm{OO'} = ۳\sqrt{۵}\,, |R - R'| < \mathrm{OO'} < R + R' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند

۴۳ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ cm باشد، دو خط موازی به فاصله ۳ cm از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد عمودمنصف AB و دو خط موازی d، جواب مسئله است.

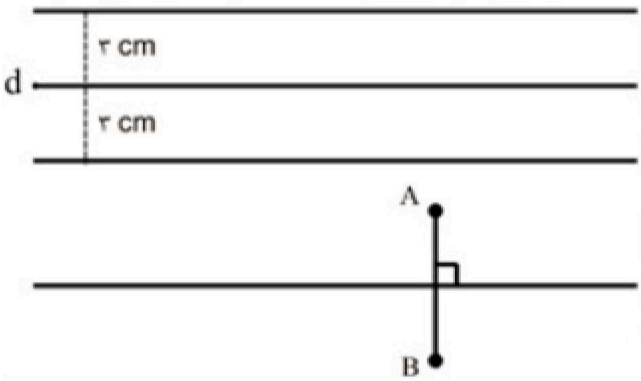
مساله دو جواب دارد.



مساله بی شمار جواب دارد.



مساله فاقد جواب است.

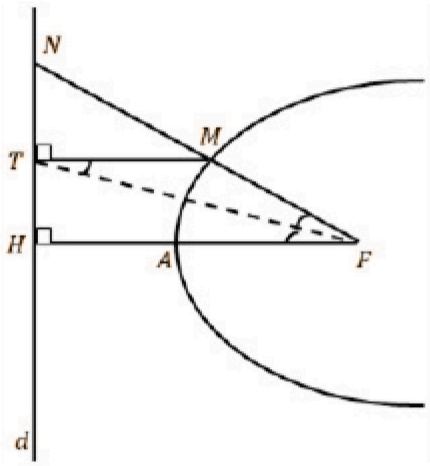


۴۴ $x = ۱$

۴۵ بنا به تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی‌الساقین است پس $\widehat{MFT} = \widehat{MFT}$ از طرفی $FH \parallel MT$ و FT خط مورب می‌باشد پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\widehat{MTF} = \widehat{TFH}$ از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که TF نیمساز زاویهٔ $\widehat{NFH}$ می‌باشد.

با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NH}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$



۴۶

$$\frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

$$\frac{S_{\Delta OBF'}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{\frac{۱}{۲}OB \times OF'}{\frac{۱}{۲}OB \times OA} = \frac{\frac{۱}{۲}bc}{\frac{۱}{۲}ba} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

۴۷ روش اول:

$x + y = ۳ \Rightarrow y = ۳ - x$ (ص ۴۵)

$$x^۲ + y^۲ - ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ + (۳ - x)^۲ - ۲(۳ - x) - ۳ = ۰$$

$$۲x^۲ - ۴x = ۰$$

دلتای معادلهٔ اخیر مثبت است بنابراین دو ریشه متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطع‌اند.

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} x^۲ + y^۲ - y - ۳ = ۰ \Rightarrow O(۰, ۱)\ ,\ r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۱۲} = ۲ \\ OH = \frac{|۰ + ۱ - ۳|}{\sqrt{۱ + ۱}} = \sqrt{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{۲} < ۲ \Rightarrow OH < r$$

پس خط و دایره متقاطعند.

۴۸

$(x - ۲)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۱۶ \Rightarrow O'(۲, ۳), r' = ۴$ (ص ۴۴)

$$d = OO' = \sqrt{(۰ - ۲)^۲ + (۱ - ۳)^۲} = \sqrt{۸}$$

$$|r - r'| = d \Rightarrow |r - ۴| = \sqrt{۸} \Rightarrow r = ۴ \pm ۲\sqrt{۲}$$

$$(x - ۰)^۲ + (y - ۱)^۲ = (۴ \pm ۲\sqrt{۲})^۲$$

۴۹ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و در طرفین خط d است. اشتراک این دو مکان هندسی را درنظر می‌گیریم.

اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت.

اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد.

اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت. (ص ۳۹)

۵۰ الف) نادرست (ص ۲۲) ب) درست (ص ۳۹) پ) درست (ص ۷۵)

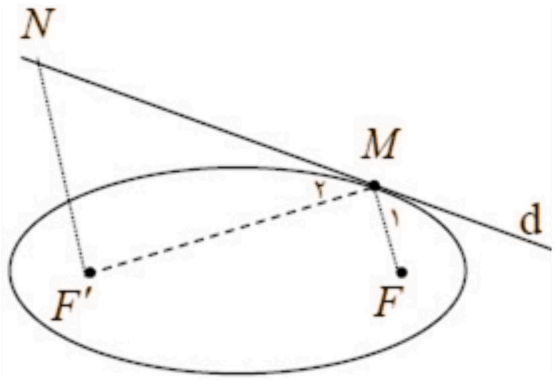
۵۱ مجموع $MF + MF'$ کم‌ترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های $\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲$

از طرفی: $MF \parallel NF'$ و d مورب، در نتیجه $\widehat{N} = \widehat{M}_۱$

نتیجه می‌شود $\widehat{N} = \widehat{M}_۲$

مثلث MNF' متساوی‌الساقین است.

یعنی $MF' = NF'$. (ص ۵۷)



۵۲ $F(\alpha + a, \beta) = (۱, ۲) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + a = ۱ \\ \beta = ۲ \end{cases}$ (ص ۵۲ و ۵۸)

$$\left.\begin{matrix} x = \alpha - a \\ x = -۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha - a = -۳ \xrightarrow{\alpha + a = ۱} \begin{cases} a = ۲ \\ \alpha = -۱ \end{cases}$$

$$(y-۲)^۲ = ۸(x+۱)$$

روش دوم: برای حل مسأله با استفاده از شکل، نمره لحاظ گردد.

۵۳ $$BB' = \frac{۱}{۲}AA' \Rightarrow ۲b = \frac{۱}{۲}(۲a) \Rightarrow a = ۲b$$

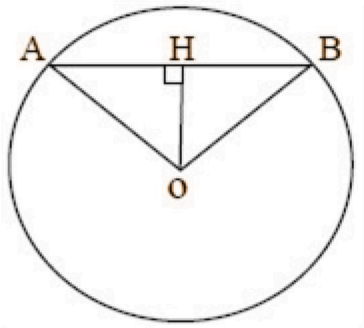
$$\text{Cos}\, F'\widehat{B}O = \frac{BO}{BF'} = \frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow F'\widehat{B}O = ۶۰^\circ \Rightarrow F'\widehat{B}F = ۱۲۰^\circ$$

روش دوم: برای حل مسأله با استفاده از تانژانت زاویه $F'\widehat{B}O$ نمره لحاظ گردد. (ص ۵۸)

۵۴ $$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱ \Rightarrow O(۱, -۲), R = ۱$$

$$x^۲ + y^۲ + ۶x + ۲y - ۶ = ۰ \Rightarrow O'(-۳, -۱), R' = ۴, d = OO' = \sqrt{۱۷}$$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند. $۳ < \sqrt{۱۷} < ۵$ (ص ۴۶)



۵۵ $\mathrm{OH}=\frac{|۳(۰)+۴(۱)+۶|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۲$

$\mathrm{AB}=۲\sqrt{۵}\Rightarrow \mathrm{AH}=\sqrt{۵}\Rightarrow R=۳$

$(x-۰)^{۲}+(y-۱)^{۲}=۹$

$x=۰\Rightarrow \begin{cases} y=۴\Rightarrow (۰,۴) \\ y=-۲\Rightarrow (۰,-۲) \end{cases}$ (ص ۴۴)

۵۶ مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط AB است.
مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط CD است.
محل برخورد دو عمودمنصف، جواب مسأله است.
حالت‌های ممکن: یک جواب، بدون جواب، بی‌شمار جواب. (ص ۳۹)

۵۷ درست (ص ۵۶)

۵۸ بیضی (ص ۳۵)

۵۹ نصف می‌شود. (ص ۵۹) $\frac{a'}{a}=\frac{\frac{b^{۲}}{۴(۲h)}}{\frac{b^{۲}}{۴h}}=\frac{۱}{۲}$

۶۰ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی قائم و دهانه آن به سمت پایین می‌باشد.
فاصله کانونی سهمی برابر با $a=\mathrm{AF}=۴$ است.
معادله آن برابر است با: $(x-۱)^{۲}=-۱۶(y-۲)$
معادله خط هادی سهمی $y=۶$ است. (ص ۵۸)

۶۱ نقطه M روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

$\mathrm{MF}+\mathrm{MF}'=۲a=۱۴\Rightarrow a=۷$

$\frac{c}{a}=\frac{۶}{۷}\xrightarrow{a=۷} c=۶$

$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow b=۴\sqrt{۱۳}$ (ص ۵۸)

۶۲ نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، با توجه به تعریف بیضی:

$\mathrm{AF}+\mathrm{AF}'=۲a=\mathrm{BF}+\mathrm{BF}'\xrightarrow{\mathrm{AF}'=\mathrm{BF}}\mathrm{AF}=\mathrm{BF}'$

دو مثلث AFF' و BFF' بنا به حالت $(\mathrm{AF}=\mathrm{BF}', \mathrm{AF}'=\mathrm{BF}, \mathrm{FF}'=\mathrm{FF}')$ برابری سه ضلع همنهشت هستند، نتیجه دو زاویه $A\widehat{F}F'=B\widehat{F}'\mathrm{F}$، مثلث MFF' متساوی‌الساقین است و $\mathrm{MF}=\mathrm{MF}'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره‌خط AFF' (قطر کوچک بیضی) است.

۶۳ $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲\Rightarrow O'(-۱,۱), r'=\sqrt{۲}$

$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۲-c\Rightarrow O(۱,-۱), r=\sqrt{۲-c}$

$OO'=۲\sqrt{۲}$

$OO'=r+r'\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۲-c}\Rightarrow c=۰$ (ص ۴۳)

۶۴ $OH=\dfrac{|۱+۳|}{\sqrt{۱^۲+۰^۲}}=۴, OH=R, (x-۱)^۲+y^۲=۱۶$ روش اول:

روش دوم: با استفاده از رسم شکل و پیدا کردن شعاع و نوشتن معادله دایره (ص ۴۳)

۶۵ نادرست (ص ۵۱)

۶۶ نیمساز (ص ۳۹)

۶۷ $\begin{cases} y^۲+۷x+۵=۰ \\ x^۲+y^۲=۲۵ \end{cases}\Rightarrow x^۲+(-۷x-۵)=۲۵\Rightarrow x^۲-۷x-۳۰=۰$

$x=-۳, x=۱۰$ (ص ۵۸)

$\begin{cases} x=-۳\Rightarrow y^۲=۱۶\Rightarrow y=\pm ۴\Rightarrow (-۳,۴), (-۳,-۴) \\ x=۱۰\Rightarrow y^۲=-۷۵ \end{cases}$

۶۸ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

مختصات رأس سهمی $A(-۱,۲)$، در این سهمی $a=AF=۲$

معادله آن برابر است با: $(y-۲)^۲=-۸(x+۱)$

(ص ۵۸)

۶۹ $PF+PF'=۲a\Rightarrow \sqrt{۹+m^۲}+\sqrt{۹+m^۲}=۱۰\Rightarrow m=\pm ۴$ (ص ۴۸)

۷۰ نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF+DF'=۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیه فیثاغورث داریم:

$DF^۲+FF'^۲=DF'^۲\Rightarrow DF^۲+(۲c)^۲=(۲a-DF)^۲$

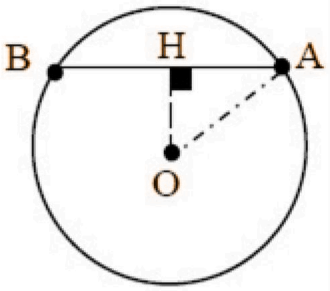
$DF=\dfrac{a^۲-c^۲}{a}\xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} DF=\dfrac{b^۲}{a}$

۷۱ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰\Rightarrow \left(x^۲+ax+\dfrac{a^۲}{۴}\right)+\left(y^۲+by+\dfrac{b^۲}{۴}\right)=-c+\dfrac{a^۲}{۴}+\dfrac{b^۲}{۴}$

$\left(x+\dfrac{a}{۲}\right)^۲+\left(y+\dfrac{b}{۲}\right)^۲=\dfrac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}\Rightarrow r^۲=\dfrac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$

(ص ۴۱)

۷۲ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$AH = \frac{۱}{۲}AB = ۳$$

$$OH = \frac{|۳(۲)-۴(-۱)+۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۴$$

$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow r^۲ = (۴)^۲ + (۳)^۲ = ۲۵, (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲۵$$

۷۳ ۵ (ص ۳۹)

۷۴ نادرست (ص ۳۹)

۷۵ الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

در این سهمی $a = ۱$ و معادله آن برابر است با: $(y-۳)^۲ = -۴(x-۲)$

ب) مختصات کانون سهمی $F(-a+h, k) = (-۱+۲, ۳) = (۱, ۳)$

پ) مختصات محل برخورد با محور طول‌ها برابر است با:

$$y = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۴}, \left(\frac{-۱}{۴}, ۰\right)$$ (ص ۵۸ و ۵۴)

۷۶ $$\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{a=۸} c = ۶ \Rightarrow AF = a - c = ۲$$ (ص ۴۹)

۷۷ $$(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴, O = (۱, ۱), r = ۲, d = \frac{|۱+۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

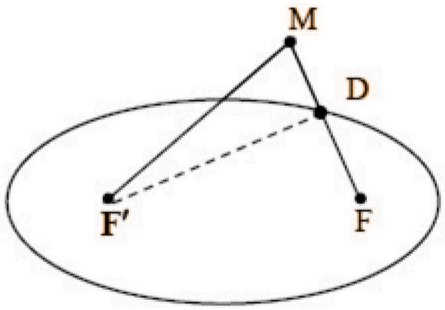
$$d < r$$

خط و دایره در دو نقطه متقاطع هستند.

۷۸ $$a^۲ + b^۲ > ۴c \Rightarrow ۱۶ + ۳۶ > ۴a \Rightarrow a < ۱۳$$ (ص ۴۶)

۷۹ از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد بنا بر تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:



$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF}$$

$$DF + MD + MF' > DF + DF'$$

$$\Rightarrow MF + MF' > ۲a$$

(ص ۴۷)

۸۰ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d', d'' می‌باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط d', d'' با خط l جواب مساله است.

الف - اگر خط l دو خط d', d'' را قطع کند مسئله دو جواب دارد.

ب - اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.

پ - اگر خط l هیچ‌یک از دو خط d', d'' را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

رسم یک مورد شکل برای مسأله الزامی است. (ص ۳۸)

۸۱ درست (ص ۵۱)

۸۲ بیضی (ص ۳۵)

۸۳ الف) $O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = (۲, -۱), R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = ۳$

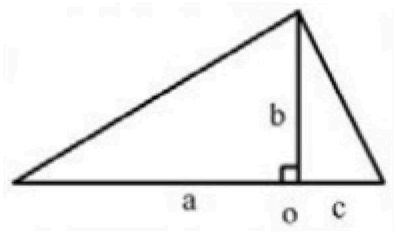
ب) خیر زیرا: $(۰)^۲ + (۳)^۲ + ۲(۳) - ۴(۰) - ۴ \neq ۰$

۸۴ $a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{a=۵\,,\,b=۳} c = ۴ \Rightarrow \mathrm{FF}' = ۸$

۸۵ $r = \frac{|۳\times۱ + ۴(۴) + ۱|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = ۴ \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۴)^۲ = ۱۶$

۸۶ الف) $\begin{matrix} a = ۵ \\ b = ۴ \end{matrix} \Rightarrow c^۲ = ۲۵ - ۱۶ \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow A'F = ۸$

ب)



$S_\Delta = \frac{۱}{۲}(۵ + ۳)\times۴ = ۱۶$

۸۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$O\begin{vmatrix} ۱ \\ -۲ \end{vmatrix}, R = \sqrt{۱ + ۴ - ۱} = \sqrt{۴} = ۲$

گزینه ۲) $A\begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \end{vmatrix} \Rightarrow \mathrm{OA} = \sqrt{(۱-۱)^۲ + (۰+۲)^۲} = ۲ \Rightarrow \mathrm{OA} = R$

۸۸ $\frac{۳}{۴}$

۸۹ روش اول:

بنا به تعریف سهمی $\mathrm{MF}=\mathrm{MT}$ مثلث MFT متساوی‌الساقین است. $M\hat{T}F=T\hat{F}M(۱)$

از طرفی بنا به خطوط موازی $\mathrm{FH}\parallel\mathrm{MT}$ و مورب FT نتیجه می‌شود $M\hat{T}F=T\hat{F}H(۲)$

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{FH}}=\frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}}\xrightarrow{\mathrm{FH}=۲\mathrm{FA}}\frac{\mathrm{NF}}{۲\mathrm{FA}}=\frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}}\xrightarrow{\times ۲}\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{FA}}=\frac{۲\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}}$$ (ص ۵۸)

روش دوم:

$\mathrm{FH}\parallel\mathrm{MT}$ با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{MF}}=\frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}}\\ \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{FH}}=\frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NF}}\xrightarrow{\mathrm{MT}=\mathrm{MF}}\cancel{\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{FH}}=\frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{MF}}}\end{array}\right\}\xrightarrow{\mathrm{FH}=۲\mathrm{FA}}\frac{\mathrm{NF}}{۲\mathrm{FA}}=\frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}}$$
$$\xrightarrow{\times ۲}\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{FA}}=\frac{۲\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}}$$

۹۰ الف) معادله متعارف سهمی $(y-۱)^{۲}=۸(x-۱)$ و فاصله کانونی $a=۲$

ب) رأس سهمی $(۱,۱)$ معادله خط هادی $x=-۱$ و مختصات کانون آن $(۳,۱)$ (ص ۵۵)

۹۱ الف) $\begin{cases}۲a=۱۰\Rightarrow a=۵\\ ۲b=۶\Rightarrow b=۳\end{cases}\Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow c=۲$

$$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

ب) $A(۵,۰),A'(-۵,۰)$

$F(۴,۰),F'(-۴,۰)$

$B(۰,۳),B'(۰,-۳)$

پ) رسم بیضی (ص ۴۹)

۹۲
$$d=\frac{|۳(۱)-۴(-۱)+۳|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

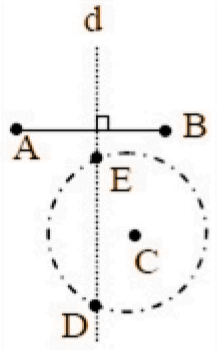
$(x-۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴$ (ص ۴۳)

۹۳ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف d و دایره جواب مسئله است. (نقاط D و E)

الف) اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد. (ص ۳۹)

ب) اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد.

پ) در صورتی‌که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.



۹۴ درست (ص ۳۵)

۹۵ نادرست، $\alpha = \beta = ۶۵^\circ$ (ص ۵۰)

۹۶ داخل (ص ۴۶)

۹۷ دایره (ص ۴۹)

۹۸ $$r = \frac{|۳\times ۰ - ۴\times ۳ - ۳|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = ۳ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹$$

۹۹ $$y^۲ = ۲x + ۴y \Rightarrow (y-۲)^۲ = ۲(x+۲)$$

نوع افقی رو به راست رأس سهمی نقطه $(-۲, ۲)$ پارامتر سهمی $a = \frac{۱}{۲}$ مختصات کانون سهمی برابر با $\left(-\frac{۳}{۲}, ۲\right)$

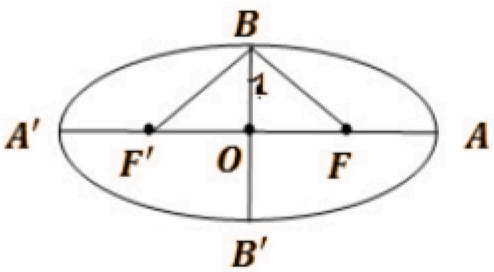
معادله خط هادی برابر است با $x = \frac{-۵}{۲}$ است و مختصات نقاط برخورد با محور yها برابر است با $(۰, ۰)$ و $(۰, ۴)$ و محور xها $(۰, ۰)$

۱۰۰ نقطه B روی بیضی است $BF + BF' = ۲a$

از طرفی نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد $BF = BF'$ بنابراین $BF = BF' = a$

در مثلث قائم‌الزاویه OFB داریم: $OB^۲ + OF^۲ = BF^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ = a^۲$

۱۰۱



$$a = ۲b \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴b^۲ - b^۲ = ۳b^۲$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{۳}b$$
$$\text{tg}\, B_۱ = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow B_۱ = ۶۰^\circ$$
$$F\hat{B}F' = ۲\times ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

۱۰۲ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵ \Rightarrow O=(۱,۱)$

$m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$ شیب خط مماس $m'=\frac{۱}{m}=\frac{-۱}{۲}$ است، پس معادله خط مماس به صورت زیر است.

$$y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۴$$

۱۰۳ $R=OM=\sqrt{(۱-۲)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۵}$

$(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۵$

۱۰۴ الف) ماتریس ب) مشترک پ) خارج ت) صفر

۱۰۵ الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست

۱۰۶ $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰+۱۲}=۲, O(۱,۰)$

$OH=\frac{|۱\times ۱+۰\times ۱-۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\sqrt{۲} \Rightarrow OH<R$

خط و دایره متقاطع‌اند.

۱۰۷ الف) $c^۲=a^۲-b^۲=۹-۴=۵ \Rightarrow c=\sqrt{۵} \Rightarrow FF'=۲\sqrt{۵}$

ب) $A(۴+۳,۵), A'(۴-۳,۵)$

۱۰۸ الف) $y^۲-۲y+۱=-۸x-۹+۱ \Rightarrow (y-۱)^۲=-۸(x+۱) \Rightarrow A=(-۱,۱), a=۲$

$F(-۳,۱), x=۱$

ب) رسم سهمی (ص ۵۵)

۱۰۹ در مثلث BOF داریم:

$$\cos O\hat{B}F=\frac{BO}{BF} \xrightarrow{BF=a\,,\,BO=b} \cos O\hat{B}F=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow O\hat{B}F=۳۰^\circ$$

$\Rightarrow F'\hat{B}F=۲O\hat{B}F=۶۰^\circ$ (ص ۵۸)

۱۱۰ نقطه A', A روی بیضی قرار دارند بنا به تعریف بیضی داریم $A'F'+A'F=۲a$ و $AF'+AF=۲a$. نتیجه می‌گیریم: (ص ۴۸)

$$A'F'+A'F=AF'+AF \Rightarrow A'F'+(A'F'+FF')=AF+(AF+FF') \Rightarrow AF=A'F'$$

۱۱۱ مرکز دایره برابر است با $O(۱,۱)$ شیب خط عمود بر دایره در نقطه $A(۲,۳)$ برابر است با:

$$m_{AO}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$$

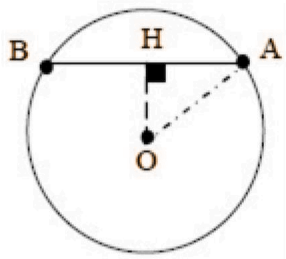
شیب خط مماس بر دایره در نقطه $A(۲,۳)$ قرینه و برعکس شیب خط عمود است:

$$m'=-\frac{۱}{m_{OA}}=-\frac{۱}{۲}$$

معادله خط مماس بر دایره برابر است با: $y-۳=\frac{-۱}{۲}(x-۲)$

(ص ۴۵)

۱۱۲ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند. (ص ۴۳)



$$OH=\frac{|x+y-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow OA^۲=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲+(\sqrt{۲})^۲=\frac{۱۰}{۴}=R^۲$$

معادله دایره $(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۱۰}{۴}$

۱۱۳ الف) نادرست (ص ۲۱) ب) نادرست (ص ۳۹) پ) نادرست (ص ۴۲) ت) درست (ص ۸۱)

۱۱۴ الف) قطری (ص ۱۲) ب) مشترک (ص ۳۶) پ) پاره‌خط (ص ۴۹) ت) yoz (ص ۷۳)

۱۱۵ اگر قطر دهانه دیش را با $۲r$ و گودی را با h نمایش دهیم. فاصله کانونی برابر $a=\frac{۴r^۲}{۱۶h}$ است.

$۹=h, ۶۰=۲r$ با جایگذاری در رابطه فوق داریم: $a=\frac{(۲r)(۲r)}{۱۶h}=\frac{۶۰\times۶۰}{۱۶(۹)}=۲۵$

(اگر رابطه فوق به صورت $a=\frac{r^۲}{۴h}=\frac{(۳۰)^۲}{۴(۹)}=۲۵$ نوشته شود درست است.)

۱۱۶ الف) با استفاده از جایگاه رأس و خط هادی سهمی قائم در دستگاه مختصات خواهیم داشت: $a=۴$

دهانه سهمی رو به پایین است و معادله آن برابر است با: $(x-۲)^۲=-۴(۴)(y-۳)$

ب) مختصات کانون سهمی برابر است با: $F=(۲,-۱)$

۱۱۷ الف) $\begin{cases} ۲a = ۱۰ \to a = ۵ \\ ۲b = ۶ \to b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = ۴$

در مثلث MFF' میانه وارد بر یک ضلع ۴ $MO = \frac{۱}{۲}FF' = ۴$ نصف ضلع روبه‌رو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب) $MF + MF' = ۲a = ۱۰ \Rightarrow MF' = ۱۰ - MF$

$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \Rightarrow MF^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲ \Rightarrow MF = ۵ - \sqrt{۷}$

۱۱۸ مرکز و شعاع دایره $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰ \Rightarrow (x-۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ برابر است با:

$O' = (۳, ۱), r' = ۱$

فاصله دو مرکز برابر $d = oo' = \sqrt{(۳)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۱۰}$ و $r + r' = ۲$ دو دایره بیرون یک‌دیگرند (متخارجند). $d > r + r'$

۱۱۹ فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است:

$$r = \frac{|۳(۲) + ۴(۱) + ۵|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

معادله دایره‌ای برابر است با: $(x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$

۱۲۰ نقطه B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد در نتیجه: $BF = BF' \quad (۱)$

فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{(۱)} BF = BF' = a$

بنا به رابطه فیثاغورث در مثلث BOF داریم: $OF^۲ + OB^۲ = BF^۲ \Rightarrow c^۲ + b^۲ = a^۲$

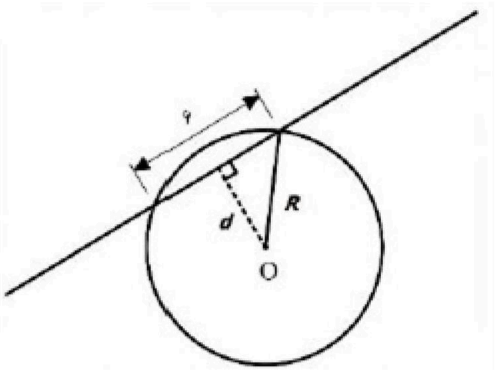
۱۲۱ الف) درست ب) نادرست پ) درست ت) نادرست

۱۲۲ الف) ۸ ب) خط پ) دایره ت) ۶

۱۲۳ الف) $O\left|\begin{matrix} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{matrix}\right.$ مرکز $FF' = |۳ - (-۵)| = ۸ = ۲C \Rightarrow C = ۴$

ب) $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow b = \sqrt{۲۰} \Rightarrow BB' = ۲\sqrt{۲۰}$

۱۲۴ ۲



۱۲۵

$$d = \frac{|۳\times۲-۴(-۳)+۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}} = ۴$$

$$R = \sqrt{۳^۲+۴^۲} = ۵ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۳)^۲ = ۲۵$$

۱۲۶ درست

۱۲۷ با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

سهمی رو به پایین و $a = ۴$

معادله سهمی: $(x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$

معادله خط هادی: $y = ۶$

۱۲۸ نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم. نقطه A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی

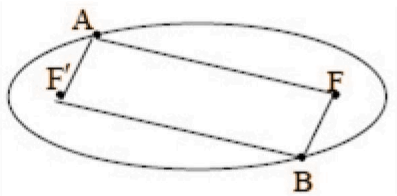
$$AF + AF' = ۲a \quad (۱)$$

نقطه B روی بیضی قرار دارد.

$$BF + BF' = ۲a \quad (۲)$$

از ۱ و ۲ و فرض ($AF' = BF$) نتیجه می‌شود: $AF = BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو موازی‌اند. $AF \parallel BF'$



۱۲۹ مرکز و شعاع دایره $(x-۱)^۲+y^۲ = ۱$ برابر است با: $O(۱,۰), r = ۱$

و مرکز و شعاع دایره $x^۲+(y-۱)^۲ = ۱$ برابر $O' = (۰,۱), r' = ۱$

فاصله دو مرکز برابر $OO' = \sqrt{۲}$ و $r+r' = ۲$ و $r-r' = ۰$

$$|r-r'| < OO' < r+r'$$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

۱۳۰

$$\begin{cases} x+y = ۱ \\ x-y = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۱ \end{cases}, r = \frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

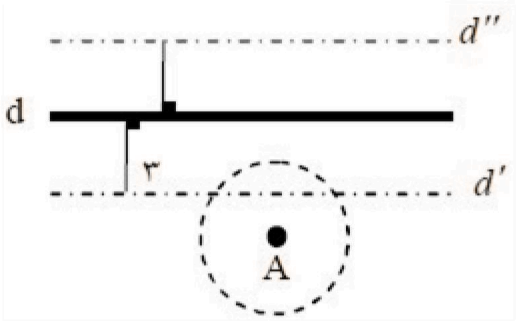
مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع آن برابر $r = ۲$ است. معادله دایره برابر با: $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲ = ۴$ است.

۱۳۱ مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است این دایره را رسم می‌کنیم. نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد دو خط d', d'' در طرفین خط d و به موازات d است این دو خط را رسم می‌کنیم محل برخورد دو خط d', d'' با دایره مطابق شکل جواب مسأله است.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند مساله ۲ جواب دارد.

اگر یکی از دو خط d' یا d'' بر دایره مماس باشد مساله ۱ جواب دارد.

اگر هیچ‌یک از دو خط d' یا d'' دایره را قطع نکند مساله جواب ندارد.



۱۳۲ الف) $O(-۱,۰), R=۲$

ب) $(۱,۰), (-۳,۰)$

۱۳۳ الف) $c=\frac{۴}{۵}a \Rightarrow ۹+\frac{۱۶}{۲۵}a^۲=a^۲ \Rightarrow a=۵, c=۴ \Rightarrow \mathrm{FF'}=۸, \mathrm{AA'}=۱۰$

ب) $A(۱,-۱), A'(-۹,-۱)$

۱۳۴ دایره

۱۳۵ $R=\frac{|۳\times۱+۴\times۲-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۲, (x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$

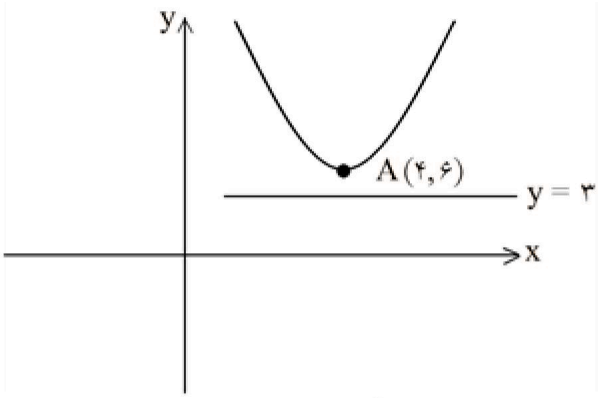
۱۳۶ $O(۲,۱), c=۴ \Rightarrow ۲۵=b^۲+۱۶ \Rightarrow ۲b=۶$

۱۳۷ بیضی

۱۳۸ $(x-۴)^۲+(y+۲)^۲=۴ \Rightarrow O'(۴,-۲), r'=۲$

$\mathrm{OO'}=\sqrt{۴^۲+۳^۲}=۵$

$|r-r'|=\mathrm{OO'} \Rightarrow |r-۲|=۵ \Rightarrow \begin{cases} r=۷ \\ r=-۳ \text{ غ ق ق} \end{cases} \Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۴۹$



۱۳۹ با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، سهمی قائم و دهانه سهمی رو به بالا است و $a = ۳$

فرم استاندارد سهمی به صورت: $(x-h)^۲ = ۴a(y-k) \Rightarrow (x-۴)^۲ = ۱۲(y-۶)$

۱۴۰ فرم استاندارد سهمی به صورت $(y-۳)^۲ = -۱۶(x+۱)$ است. سهمی افقی و دهانه سهمی به سمت چپ باز می‌شود. راس سهمی نقطه $A(-۱,۳)$ است. و $a = ۴$ مختصات کانون آن نقطه $F(-a+h,k) = (-۵,۳)$ است.

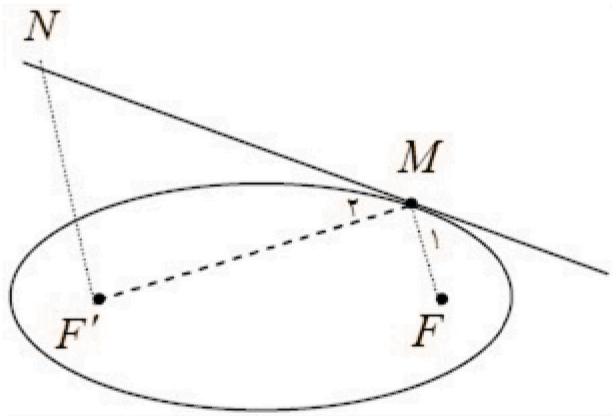
معادله خط هادی سهمی به صورت $x = a + h = -۱$ است.

۱۴۱ مجموع $MF + MF'$ کم‌ترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های $\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲$.

از طرفی: $MF \parallel NF'$ و d مورب، در نتیجه $\widehat{N}_۱ = \widehat{M}_۲$ نتیجه می‌شود $\widehat{N}$.

مثلث MNF' متساوی‌الساقین است.

یعنی $MF' = NF'$.



۱۴۲ $OF = c = ۴, OA = a = ۸ \Rightarrow b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸ \Rightarrow b = ۴\sqrt{۳}$

$\Rightarrow ۲b = ۸\sqrt{۳}$

۱۴۳ فاصله مرکز دایره تا خط $x - y - ۱ = ۰$ را به دست آورده با شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲ \Rightarrow O(۱,-۲), r = \sqrt{۲}$

$d = \frac{|۱+۲-۱|}{\sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$

چون فاصله O تا خط برابر شعاع دایره است پس خط بر دایره مماس است.

۱۴۴ $r = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱۲+۳+۵|}{\sqrt{۱۶+۹}} = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \Rightarrow (x-۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱۶$

۱۴۵ الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) نادرست

۱۴۶ الف) $m = ۱$ ب) $\frac{۵}{۸}$ پ) $\frac{۱}{۲}$ ت) نقطه

۱۴۷ الف) $FF' = |۳ - (-۵)| = ۸ = ۲c \Rightarrow c = ۴$ مرکز $O\left|\begin{matrix}\frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱\end{matrix}\right.$

و معادله قطر بزرگ: $x = ۱$

ب) $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۲۵ - ۱۶ = ۹ \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow BB' = ۲b = ۶, e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$

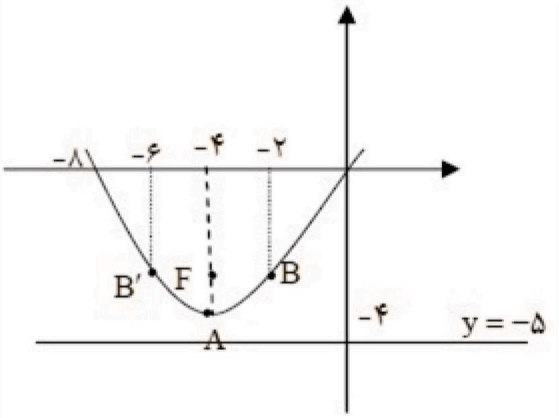
۱۴۸ $y^۲ = ۴(x-۱) \Rightarrow S(۱,۰), F(۲,۰)$

$$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۹, \begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ y^۲ = -x^۲ + ۴x + ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \text{ ق ق} \\ x = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$M(۳, ۲\sqrt{۲}), M'(۳, -۲\sqrt{۲})$

۱۴۹ الف) فرم استاندارد سهمی به صورت $(x+۴)^۲ = ۴(y+۴)$ است. سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا باز می‌شود. راس سهمی نقطه $A(-۴,-۴)$ است و $a = ۱$، مختصات کانون آن نقطه $F(-۴,-۴+۱) = (-۴,-۳)$ است. معادله خط هادی سهمی به صورت $y = -۴ - ۱ = -۵$ است.

ب) نقاط کمکی $B(-۲,-۳)$ و $B'(-۶,-۳)$

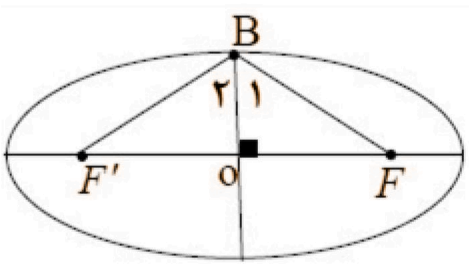


رسم سهمی با استفاده از نقاط کمکی

۱۵۰ در بیضی فاصله کانون تا مرکز آن برابر c است. پس $c = ۵$ و داریم:

$$۲b = ۲۴, b = ۱۲, c = ۵ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} a^۲ = ۱۲^۲ + ۵^۲ \Rightarrow a = ۱۳, \frac{c}{a} = \frac{۵}{۱۳}$$

۱۵۱ در بیضی $OB = b$ و $OF = c$ و $BF = a$ است. بنابر فرض سؤال داریم:



$$۲a = \sqrt{۲}(۲b) \Rightarrow a = b\sqrt{۲} \Rightarrow \text{Cos}\, B_۱ = \frac{OB}{BF}$$
$$= \frac{b}{b\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow B_۱ = ۴۵^\circ$$

پس $F\hat{B}F' = ۲ \times ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$.

۱۵۲ $OM = OA = a$

$\overset{\triangle}{OMF} : OF^۲ + MF^۲ = OM^۲ \Rightarrow c^۲ + MF^۲ = a^۲ \Rightarrow MF^۲ = a^۲ - c^۲ = b^۲ \Rightarrow MF = b$

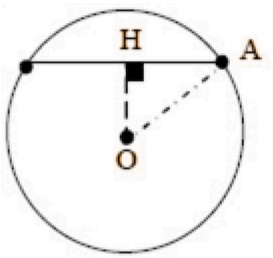
۱۵۳ مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰ \Rightarrow o(۱, -۱), r = \sqrt{۲}$

$OA = ۱ \Rightarrow OA < r$

نقطه داخل دایره قرار دارد.

۱۵۴



$OH = \frac{|۲(-۱)+۱(-۱)-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$

$\overset{\triangle}{AOH}(H = ۹۰) : OH^۲ + AH^۲ = OA^۲$

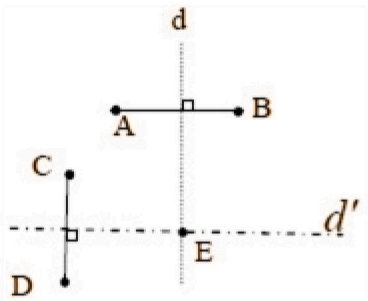
$\Rightarrow (\sqrt{۵})^۲ + ۲^۲ = r^۲ \Rightarrow r = ۳ \Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۹$

۱۵۵ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را d می‌نامیم و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است این خط را d' می‌نامیم. بنابراین نقطه برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه E)

اگرخطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

اگرخطوط d و d' منطبق باشند مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگرخطوط d و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد.



۱۵۶ الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) نادرست

۱۵۷ الف) ۶- ب) اسکالر پ) بیرون ت) کانون سهمی

Medical _ Stus | Kolyze

۱ مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec{a} = (-۲, ۱, ۰)$ و $\vec{b} = (۱, -۳, ۲)$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۲ با فرض اینکه $|\vec{a}| = |\vec{b}| = ۲$ و زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر ۶۰° باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\vec{a} . \vec{b}$ ب) $|\vec{a} \times \vec{b}|$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۳ تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۱, ۳, ۱)$ بر امتداد بردار $\vec{b} = (-۲, ۰, ۱)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۴ با فرض $\vec{a} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j} - \vec{k}$، $\vec{b} = (۳, ۱, ۱)$ و $r = -۲$، مختصات بردار $r\vec{a} + \vec{b}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۵ نقاط $A = (۱, ۲, ۱)$، $B = (-۱, ۰, -۵)$ و $C = (-۱, ۳, ۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. اگر نقطهٔ M وسط ضلع AB باشد، طول پاره‌خط CM (میانهٔ وارد بر ضلع AB) را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۶ پاسخ صحیح را از میان کلمات داخل پرانتز انتخاب کنید و بنویسید.

الف) اگر صفحه‌ای موازی با مولد یک سطح مخروطی، از رأس آن عبور نکند، آنگاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک ..... است. (هذلولی - سهمی)

ب) دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ..... هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} . \vec{b} = ۰$. (بر هم عمود - با هم موازی)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۷ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) هر ماتریس مربعی یک ماتریس اسکالر است.

ب) هر چه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر شود، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر می‌شود.

پ) برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، تساوی $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$ همواره برقرار است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۴

۸ اگر $\vec{a}=(m,۲,-۱)$، $\vec{b}=(m-۱,۱,-۱)$، $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۲}$ در این صورت مقدار m را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۹ کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(۱,۰,۱)$، $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۰ با فرض $\vec{a}=۲\vec{i}-۲\vec{j}$، $\vec{b}=(۳,-۱,۱)$، $r=۳, s=۲$، مختصات بردار $r\vec{a}-s\vec{b}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۱ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $R^۳$ را بنویسید که موازی صفحهٔ xy باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۲ اگر نقاط $A=(۳,-۱,۲)$، $B=(۱,-۱,۲)$ در دستگاه $R^۳$ باشند، معادلهٔ خط AB را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۳ اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد، حاصل $\left|\vec{a}'\right|$ کدام است؟

۱) $\dfrac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$ ۲) $\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ ۳) $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|$ ۴) $\dfrac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|^{۲}}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۴ اگر $\vec{a}$ یک بردار در فضای $R^۳$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $\vec{a}.\vec{a}=\vec{o}$ ۲) $\vec{a}\times\vec{a}=۰$ ۳) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$ ۴) $\vec{a}.\vec{a}=۰$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۵ اگر $\vec{a}=(m,۲,-۱)$، $\vec{b}=(m-۱,۱,-۱)$، $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۲}$ در این صورت مقدار m را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۶ کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(۱,۰,۱)$، $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۷ با فرض $\vec{a}=۲\vec{i}-۲\vec{j}$، $\vec{b}=(۳,-۱,۱)$، $r=۳, s=۲$، مختصات بردار $r\vec{a}-s\vec{b}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۸ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $R^۳$ را بنویسید که موازی صفحهٔ xy باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۱۹ اگر نقاط $A=(۳,-۱,۲), B=(۱,-۱,۲)$ در دستگاه $R^۳$ باشند، معادلهٔ خط AB را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۲۰ اگر $\vec{a}'$ تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ باشد، حاصل $|\vec{a}'|$ کدام است؟

۱) $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ ۲) $|\vec{a}||\vec{b}|$ ۳) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$ ۴) $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|^۲}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۲۱ اگر $\vec{a}$ یک بردار در فضای $R^۳$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{o}$ ۲) $\vec{a}\times\vec{a}=۰$ ۳) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$ ۴) $\vec{a}\cdot\vec{a}=۰$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۴

۲۲ حجم متوازی‌السطوح ایجاد شده توسط بردارهای $\vec{a}=(۰,-۱,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{c}=(۰,-۱,-۱)$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۳ نقاط $A(۱,۰,۰)$ و $B(۰,-۲,۰)$ و $C(۰,۰,۳)$ داده شده‌اند. ابتدا حاصل $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ را محاسبه کرده و سپس به کمک آن مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۴ فرض کنید $\vec{a}=\left(\frac{۳}{۲},-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right)$ و $\vec{b}=(۱,۰,۱)$، تصویر قائم بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۵ برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$. (منظور از $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$ قدرمطلق مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ می‌باشد.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۶ جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب کامل کنید.

الف) معادله صفحه گذرنده از نقطه $A(۲, ۳, -۱)$ و عمود بر محور xها به صورت ..... می‌باشد.

ب) اگر $A(-۱, ۰, ۳)$ و $B(۵, ۲, -۳)$ مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB به صورت ..... است.

پ) برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، حاصل $\vec{a} . (\vec{a} \times \vec{b})$ برابر ..... می‌باشد.

ت) حاصل $\vec{k} ۲ - (\vec{j} \times \vec{i})$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۳

۲۷ برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید. $|\vec{a} \times \vec{b}|^۲ + (\vec{a} . \vec{b})^۲ = |\vec{a}|^۲ |\vec{b}|^۲$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۲۸ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به اندازه‌های ۳ و ۴ با یکدیگر زاویهٔ ۳۰° می‌سازند.

مساحت مثلثی که توسط دو بردار $(-۲\vec{a})$ و $(-\vec{b})$ ساخته می‌شود را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۲۹ بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۱)$ و $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ مفروض‌اند.

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) مختصات بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۰ برای موارد الف و ب پاسخ صحیح را از گزینه‌های داده شده انتخاب کنید و بنویسید.

الف) رابطه مربوط به قسمت رنگی کدام است؟

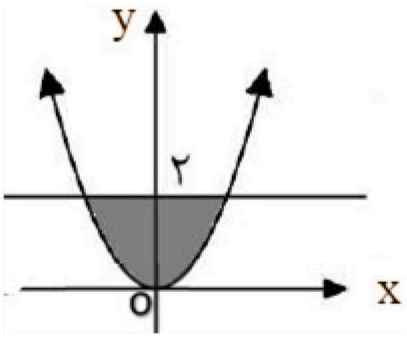
۱) $۲ \le y \le x^۲$

۲) $x^۲ \le y \le ۲$

ب) شرط هم‌صفحه بودن برای هر سه بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ کدام است؟

۱) $\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c}) = ۰$

۲) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{o}$



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۱ حاصل هر کدام از عبارات گروه A را از گروه B انتخاب کنید. (دو مورد از گروه B اضافی است)

گروه A		گروه B			
ب) $(\vec{k}.\vec{k})\vec{i}$		$\vec{i}$	$\vec{k}$	$\vec{j}$	$\vec{O}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۳

۳۲ دو بردار $\vec{a} = (-m, -۱, -۲)$ و $\vec{b} = (۰, -۳, m+۲)$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ ساخته می‌شود را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۳ اگر مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود $۶\sqrt{۳}$ باشد و $|\vec{a}| = ۴$ ، $|\vec{b}| = ۳$ ، حاصل $\vec{a}.(\vec{a} - \vec{b})$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۴ اگر $\vec{a} = -\vec{i} - \sqrt{۳}\vec{k}$ و $\vec{b} = (\sqrt{۳}, ۲, ۱)$ باشد. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ و اندازه بردار تصویر را به دست آورید.

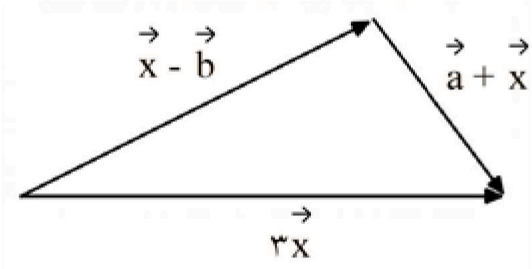
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۵ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) معادله صفحه‌ای که موازی yoz است و از نقطه $A(۲, -۱, ۳)$ می‌گذرد، برابر با ..... است.

ب) حاصل عبارت $\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k})$ برابر ..... است.

ج) در شکل مقابل بردار $\vec{x}$ برحسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ..... است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

خط به معادله $\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۳ \end{cases}$ بر صفحه xoz عمود است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۳

۳۷ فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $۲\vec{a}$ تولید می‌شود را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۳۸ اگر $\vec{a} = (۱, -۳, ۴)$ و $\vec{b} = ۳\vec{i} - ۴\vec{j} + ۲\vec{k}$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بر بردار $\vec{a} - \vec{b}$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۳۹ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (۳, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, ۲, -۱)$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۰ اگر $|\vec{a}| = ۱۰$ و $|\vec{b}| = ۲$ و $\vec{a} . \vec{b} = ۱۲$ باشند و زاویه بین دو بردار حاده باشد، مقدار $|\vec{a} \times \vec{b}|$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $A_{n\times n}$ ماتریس دلخواه I_n ماتریس همانی و $A^۲ - A = I$ باشد، وارون ماتریس A، برابر $(I - A)$ است.

ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره $C'(O, ۲r)$ است.

پ) بردار $\vec{a} = \left(۰, \frac{۱}{\sqrt{۵}}, \frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)$، یک بردار یکه است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۲ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) در ماتریس قطری $A = \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۲k - ۱ & ۲ \end{bmatrix}$، مقدار k برابر ..... است.

ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل ..... است.

پ) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنا می‌شود، برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۲

۴۳ اگر سه بردار $\vec{a} = (m, -۱, ۱)$، $\vec{b} = (۱, -۱, ۱)$ و $\vec{c} = (۱, m, -۱)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۴ اگر $\vec{a} = (-۲, ۰, ۱)$ و $\vec{b} = \vec{i} - ۲\vec{j}$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a} - \vec{j}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۵ اگر $\vec{a} = (۲, -۱, ۱)$، $\vec{b} = (-۱, ۲, ۰)$ و $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ باشد، تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ بر امتداد بردار $۲\vec{c} - \vec{b}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۶ مقدار m را طوری بیابید که زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (m, ۰, ۲)$ و $\vec{b} = (۲, -۲, ۰)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۷ جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.
حاصل $((\vec{i} \times \vec{k}) \times \vec{i}) . \vec{j}$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
نقطه $(-۱, ۳, -۲)$ در ناحیه ششم مختصاتی قرار دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۲

۴۹ بردار $\vec{a} = (۴, -۴, ۲)$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیرهم‌جهت با $\vec{a}$ و به طول ۱۲ را طوری بیابید که $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{۰}$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

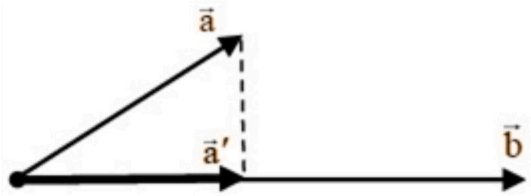
۵۰ زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۱ بردارهای $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ، $\vec{b} = (۰, ۱, ۱)$ و $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ بر سه یال یک متوازی‌السطوح منطبق هستند. اگر قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شود، اندازه ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۲ نشان دهید: تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\vec{a}' = \frac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{b}|^۲} \vec{b}$ است.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۳ نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه $B(۱, ۰, ۱)$ در فضا مفروض‌اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۴ کدام‌یک از بردارهای زیر، بر راستای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود نیست.

۱) $\sqrt{۳}\vec{a}\times\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\vec{b}\right)$

۲) $\vec{a}\times\vec{b}$

۳) $۲\vec{a}+۳\vec{b}$

۴) $\vec{b}\times\frac{\sqrt{۲}}{۵}\vec{a}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۵ زاویه بین بردارهای غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، برابر θ است. در کدام‌یک از موارد زیر حاصل‌ضرب داخلی آنها بیشتری مقدار را دارد.

۱) $\theta=۰$

۲) $\theta=\frac{۲\pi}{۳}$

۳) $\theta=\frac{\pi}{۲}$

۴) $\theta=\frac{\pi}{۳}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

حاصل عبارت $(\vec{i}\times\vec{j}).\vec{i}$ برابر صفر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۷ در فضای سه‌بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases}x=۲\\y=۱\end{cases}$ خطی موازی محور ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۸ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-۲<x\leq۰, y^۲+x\leq۰$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۲

۵۹ سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ را درنظر بگیرید:

الف) طول بردار $۲\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع که روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}+\vec{c}$ ایجاد می‌شود را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۰ ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$ ، برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۱ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,n)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ برابر با ۱۳۵ درجه باشد، مقدار n را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۲ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-۲<y\leq-۱, y<-x^۲+۱$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۳ معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور zها در نقطه به مختصات $A = (۰, ۰, ۳)$ عمود باشد، به صورت ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۱

۶۴ حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\overrightarrow{a} = (۱, ۰, -۱)$ و $\overrightarrow{b} = (۰, ۲, ۲)$ و $\overrightarrow{c} = (۲, -۳, ۰)$ تولید می‌شود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۵ اگر $\left|\overrightarrow{a}\right| = ۳$ و $\left|\overrightarrow{b}\right| = ۵$ و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ تولید می‌شود چقدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۶ مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\overrightarrow{a} = (۲, m, -۱)$ و $\overrightarrow{b} = (m+۱, ۳, ۲)$ بر هم عمود باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۷ طول بردار $\overrightarrow{a} = (۰, -۳, ۴)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۸ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $y = x^۲, -۱ < x \leq ۲$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۶۹ اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\overrightarrow{b} = r\overrightarrow{a}$ آنگاه $\left|\overrightarrow{b}\right| = |r|\left|\overrightarrow{a}\right|$. (درست - نادرست)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۷۰ در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$، معادله محور ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۱۴۰۱

۷۱ برای دو بردار غیر صفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ ثابت کنید دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = ۰$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۷۲ اگر $A = (۲, -۱, ۳)$ و $B = (۳, ۱, ۴)$ و $C = (-۱, ۱, ۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۷۳ دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ مفروض‌اند به طوری‌که $\left|\overrightarrow{a}\right| = ۶$ و $\left|\overrightarrow{b}\right| = ۴$ و زاویه بین آن‌ها ۳۰ درجه است. مقدار عبارت $\left|۲\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۷۴ سه بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (۰, ۲, ۱)$ درنظر بگیرید:

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد $\cos\theta$ را بیابید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۷۵ با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

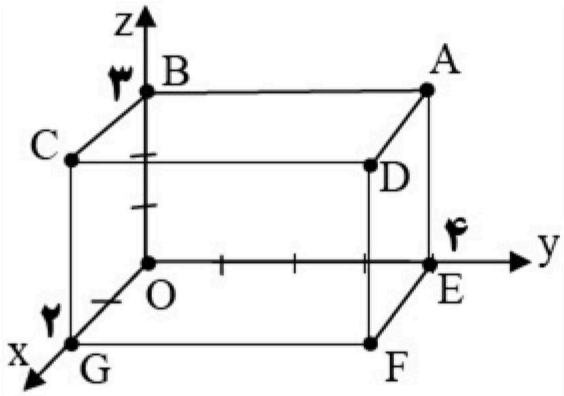
الف) نام وجهی از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.

$$x = ۲, ۰ \leq y \leq ۴, ۰ \leq z \leq ۳$$

ب) معادلات مربوط به پاره‌خط (یال) AD را بنویسید.

پ) مختصات نقطه D را بنویسید.

ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۷۶ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $x^۲ \leq y \leq ۲$ را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۷۷ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.

- برای دو بردار واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ حاصل ضرب خارجی $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{۰}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۷۸ عبارت زیر را کامل کنید.

- اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی‌السطوح بنا شده توسط سه بردار برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه۱۴۰۱

۷۹ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری‌که $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲۶$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$. اگر زاویه بین بردارها کم‌تر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a} \cdot \vec{b}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۱۴۰۰

۸۰ بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ را درنظر بگیرید.

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۸۱ اگر طول و عرض و ارتفاع اتاقی ۴ متر و ۵ متر و ۳ متر باشد طول قطر اتاق که دو نقطه مقابل را به هم وصل می‌کند را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۸۲ در فضای سه بعدی نقطه A روی محور xها به طول ۲ و نقطه B در صفحه yoz با عرض ۳- و ارتفاع ۴ مفروض است، فاصله وسط پاره‌خط AB تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۸۳ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می‌شود.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.

ت) اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|$، در این صورت زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۸۴ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند آن‌گاه: $|AB| = |A|\,|B|$

ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

پ) در حالتی‌که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

ت) نقطه با مختصات $(-۲, ۳, -۴)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۸۵ مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۳)$ و $\vec{b} = (۰, m, -۱)$ و $\vec{c} = (۱, -۲, ۳)$ در یک صفحه باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۶ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های $\left|\vec{a}\right| = ۳$ و $\left|\vec{b}\right| = ۲۶$ و اندازه ضرب خارجی $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ۷۲$ مفروض‌اند.

اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کم‌تر از ۹۰° باشد مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۷ تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۸ نقطه A به طول ۲ روی محور xها و نقطه B روی صفحه xoz به طول۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه‌بعدی مفروض‌اند.
الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.
ب) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.
پ) مختصات وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۹ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند آن‌گاه عبارت $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ همواره برقرار است.
ب) اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.
پ) نقطه $(۳,-۲)$ روی دایره $x^۲+y^۲+۲x=۰$ قرار دارد.
ت) برای سه بردار $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در $R^۳$، داریم: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۹۰ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطراصلی آن صفر باشند را ماتریس ..... گویند.
ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.
پ) در حالتی که $\frac{c}{a}=۱$ بیضی به یک ..... تبدیل می‌شود.
ت) بردار $\vec{a}=۲\vec{j}-\vec{k}$ در فضا سه بعدی بر صفحه‌ی مختصات سه بعدی ..... منطبق است.
$(\text{xoz}, \text{yoz}, \text{xoy})$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۹۱ سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند.
الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.
ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۲ ثابت کنید: دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۳ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی باشند به‌ترتیب با طول‌های ۱ و ۲ و ۳ با این ویژگی که $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$، مقدار عددی عبارت $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۴ اگر $\vec{a}=(۱,-۳,۴)$، $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ باشند آن‌گاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۵ در فضای R^3، نقطه A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحه yoz و نقطه $B = (-۴, ۶, -۳)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۶ معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات R^3 است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۷ اگر $y = b$ معادله‌ی صفحه‌ای در فضای R^3 باشد که از نقطه $A = (۲, -۳, ۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چه‌قدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۸ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $rA = rB$ آن‌گاه داریم: $A = B$.

ب) مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.

پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

ت) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۹۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است.

ب) اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.

پ) در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a} = ۰$ بیضی به ..... تبدیل می‌شود.

ت) در فضای R^3، نقطه $(-۳, ۲, -۵)$ در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۱۰۰ مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a} = (۳, ۲, ۱)$ و $\vec{b} = (۲, ۰, ۱)$ به وجود می‌آید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۰۱ بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ را درنظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۰۲ برای هر دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۰$ باشد آن‌گاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۰۳ دو بردار $\vec{a} = (۱, ۲, -۱)$ و $\vec{b} = (۰, ۲, -۱)$ را درنظر بگیرید.

الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $R^۳$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود)

ب) طول بردار $۲\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۰۴ نقاط $A = (۱, ۲, ۱)$ و $B = (۲, ۲, ۱)$ و $C = (۳, ۲, -۱)$ را در فضا درنظر می‌گیریم، کدام‌ها روی خط $\begin{cases} y = ۲ \\ z = ۱ \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۰۵ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم، $AB = AC$، آن‌گاه لزوماً $B = C$ است.

ب) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d', d به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد.

پ) نقطه $(-۲, ۳)$ روی دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۰$ قرار دارد.

ت) برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، حاصل $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = ۰$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۰۶ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ..... .

ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی l عمود نباشد و با مولد آن d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک ..... خواهد بود.

پ) رأس سهمی به معادله $y^۲ + ۲x - ۲y = ۰$ نقطه به مختصات ..... است.

ت) حاصل‌ضرب خارجی دو برابر غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم موازی هستند، برابر بردار ..... است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه۹۹

۱۰۷ بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ را درنظر بگیرید.

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۰۸ اگر $\vec{a} = (۲, -۱, ۳)$ و $\vec{b} = \vec{i} + ۲\vec{j}$ باشد اندازه بردار $\vec{a} + ۲\vec{b}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۰۹ نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ در فضای $R^۳$ چه شکلی است؟ و چه ارتباطی با نمودار $x = ۰$ دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه۹۹

۱۱۰ بردارهای $\vec{a} = (-۲, ۰, ۲)$ و $\vec{b} = ۲\vec{j} + ۲\vec{k}$ را درنظر بگیرید.

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱۱۱ دو بردار $\vec{a} = (۳, -۲, ۱)$ ، $\vec{b} = -۲\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ را درنظر بگیرید.

الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $R^۳$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود).

ب) طول بردار $\vec{a} + ۲\vec{b}$ را حساب کنید.

پ) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه–دوازدهم–خردادماه۹۹

۱

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۳ & ۲ \end{vmatrix}=۲i+۴j+۵k=(۲,۴,۵)$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۴+۱۶+۲۵}=\sqrt{۴۵}=(۳\sqrt{۵})$$

۲

الف) $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=۲\times۲\times\frac{۱}{۲}=۲$

ب) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta=۲\times۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$

۳

$$\vec{a}.\vec{b}=-۲+۰+۱=-۱,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{۴+۰+۱}=\sqrt{۵}$$

$$\Rightarrow a'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^{۲}}\vec{b}=\frac{-۱}{(\sqrt{۵})^{۲}}(-۲,۰,۱)=\left(\frac{۲}{۵},۰,\frac{-۱}{۵}\right)$$

۴

نوشتار اول: $r\vec{a}+\vec{b}=-۲(۳,۲,-۱)+(۳,۱,۱)=(-۶,-۴,۲)+(۳,۱,۱)=(-۳,-۳,۳)$

نوشتار دوم: $r\vec{a}+\vec{b}=(-۶,-۴,۲)+(۳,۱,۱)=(-۳,-۳,۳)$

۵

$$(\text{وسط AB})\ M=(۰,۱,-۲)\xrightarrow{C=(-۱,۳,۱)}(\text{طول میانه})\ \text{CM}=\sqrt{۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}}$$
$$=\sqrt{۱+۴+۹}=\sqrt{۱۴}$$

۶

الف) سهمی

ب) بر هم عمود

۷

الف) نادرست

ب) درست

پ) نادرست

۸

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+(۲-m)\vec{k}\ \text{یا}\ (-۱,۱,۲-m)\Rightarrow\sqrt{۱+۱+(۲-m)^{۲}}=\sqrt{۲}\Rightarrow m=۲$$

۹

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{۲},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{۲},\vec{a}.\vec{b}=-۱\Rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{-۱}{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})}=\frac{-۱}{۲}$$

۱۰

نوشتار اول: $r\vec{a}-s\vec{b}=(۶,-۶,۰)-(۶,-۲,۲)=(۰,-۴,-۲)$

نوشتار دوم: $r\vec{a}-s\vec{b}=(۶\vec{i}-۶\vec{j})-(۶\vec{i}-۲\vec{j}+۲\vec{k})=-۴\vec{j}-۲\vec{k}$

۱۱

$z=k(k\neq۰)$

۱۲) $\begin{cases} y = -۱ \\ z = ۲ \end{cases}$

۱۳) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۴) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۵) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + (۲-m)\vec{k}$ یا $(-۱, ۱, ۲-m) \Rightarrow \sqrt{۱+۱+(۲-m)^۲} = \sqrt{۲} \Rightarrow m = ۲$

۱۶) $|\vec{a}| = \sqrt{۲}, |\vec{b}| = \sqrt{۲}, \vec{a}.\vec{b} = -۱ \Rightarrow \text{Cos}\,\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{-۱}{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})} = \dfrac{-۱}{۲}$

۱۷) نوشتار اول: $r\vec{a} - s\vec{b} = (۶, -۶, ۰) - (۶, -۲, ۲) = (۰, -۴, -۲)$

نوشتار دوم: $r\vec{a} - s\vec{b} = (۶\vec{i} - ۶\vec{j}) - (۶\vec{i} - ۲\vec{j} + ۲\vec{k}) = -۴\vec{j} - ۲\vec{k}$

۱۸) $z = k (k \neq ۰)$

۱۹) $\begin{cases} y = -۱ \\ z = ۲ \end{cases}$

۲۰) گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۱) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲۲) روش اول: $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{vmatrix} = -۲ \Rightarrow V = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})| = |-۲| = ۲$

روش دوم:

$\vec{b} \times \vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-۱, ۱, -۱) \Rightarrow \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c}) = ۰ - ۱ - ۱ = -۲ \Rightarrow V = |\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})|$

$= |-۲| = ۲$

۲۳) $\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (-۱, -۲, ۰) \\ \overrightarrow{AC} = (-۱, ۰, ۳) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-۶, ۳, -۲) \Rightarrow S_{\underset{ABC}{\triangle}} = \dfrac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۹+۴}$

$= \dfrac{۷}{۲}$

۲۴ $\vec{c} = ۲\vec{a} - \vec{b} = (۳,-۱,۱) - (۱,۰,۱) = (۲,-۱,۰)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{c}\,.\,\vec{b} = ۲+۰+۰ = ۲ \\ \left|\vec{b}\right| = \sqrt{۱+۰+۱} = \sqrt{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{c}\,' = \frac{\vec{c}\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^{۲}}\vec{b} = \frac{۲}{۲}(۱,۰,۱) = (۱,۰,۱)$$

۲۵ روش اول: فرض می‌کنیم θ زاویه بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، در این صورت:

$$|\mathrm{Cos}\,\theta| \leq ۱$$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\mathrm{Cos}\,\theta \Rightarrow |\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\underbrace{\mathrm{Cos}\,\theta}_{\leq ۱} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$, $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ در این صورت:

$$\left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{a}\,.\,\vec{b}\right|^{۲} \leq \left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲} \Leftrightarrow$$

$$(a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳)^{۲} \leq \left(a_۱^{۲} + a_۲^{۲} + a_۳^{۲}\right)\left(b_۱^{۲} + b_۲^{۲} + b_۳^{۲}\right) \Leftrightarrow$$

$$a_۱^{۲}b_۱^{۲} + a_۲^{۲}b_۲^{۲} + a_۳^{۲}b_۳^{۲} + ۲a_۱b_۱a_۲b_۲ + ۲a_۱b_۱a_۳b_۳ + ۲a_۲b_۲a_۳b_۳ \leq$$

$$a_۱^{۲}b_۱^{۲} + a_۱^{۲}b_۲^{۲} + a_۱^{۲}b_۳^{۲} + a_۲^{۲}b_۱^{۲} + a_۲^{۲}b_۲^{۲} + a_۲^{۲}b_۳^{۲} + a_۳^{۲}b_۱^{۲} + a_۳^{۲}b_۲^{۲} + a_۳^{۲}b_۳^{۲} \Leftrightarrow$$

$$۰ \leq a_۱^{۲}b_۲^{۲} - ۲a_۱b_۱a_۲b_۲ + a_۲^{۲}b_۱^{۲} + a_۱^{۲}b_۳^{۲} - ۲a_۱b_۱a_۳b_۳ + a_۳^{۲}b_۱^{۲} + a_۲^{۲}b_۳^{۲} - ۲a_۲b_۲a_۳b_۳ + a_۳^{۲}b_۲^{۲}$$

$$\Leftrightarrow ۰ \leq (a_۱b_۲ - a_۲b_۱)^{۲} + (a_۱b_۳ - a_۳b_۱)^{۲} + (a_۲b_۳ - a_۳b_۲)^{۲}$$

چون رابطه اخیر همواره درست بوده و روابط بالا بازگشت‌پذیرند پس حکم همواره برقرار است.

۲۶ الف) $x = ۲$

ب) $(۲,۱,۰)$

پ) صفر

ت) $(۰,۰,-۳)$ یا $-۳\vec{k}$

۲۷ اثبات:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^{۲} + (\vec{a}\,.\,\vec{b})^{۲} = \left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲}\mathrm{Sin}^{۲}\theta + \left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲}\mathrm{Cos}^{۲}\theta$$

$$= \left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲}(\mathrm{Sin}^{۲}\theta + \mathrm{Cos}^{۲}\theta) = \left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲}$$

۲۸ $$S = \frac{۱}{۲}\left|(-۲\vec{a})\times(-\vec{b})\right| \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\times۲\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$$S = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\mathrm{Sin}\,۳۰^{\circ} = ۳\times۴\times\frac{۱}{۲} = ۶$$

۲۹ الف) $\vec{a}-\vec{b}=(۱,۰,۱)$

$$(\vec{a}-\vec{b}).\vec{b}=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\theta\Rightarrow ۱=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=۶۰^\circ$$

ب)
$$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ ۲&-۱&۱\\ ۱&-۱&۰\end{vmatrix}=۱\vec{i}+۱\vec{j}-\vec{k}=(۱,۱,-۱)$$

پاسخ نهایی به یکی از دو صورت $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ یا $(۱,۱,-۱)$ یا مضاربی از بردار حاصل مورد پذیرش است.

۳۰ الف) ۲ ب) ۱

۳۱ الف) $\vec{k}$ ب) $\vec{i}$

۳۲ بخش اول، به سه روش زیر قابل حل است:

$$(\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})\Rightarrow\begin{cases}(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=۰\begin{cases}(-m,۲,-m-۴).(-m,-۴,m)\\ =۰\Rightarrow m=-۲\\ \left|\vec{a}\right|^۲-\left|\vec{b}\right|^۲=۰\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\\ \Rightarrow m=-۲\end{cases}\\ \text{چهارضلعی بنا شده روی بردارهای }\vec{a}\text{ و }\vec{b}\text{ لوزی است}\\ \Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\Rightarrow m=-۲\end{cases}$$

بخش دوم، به سه روش زیر قابل حل است:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-۶,۰,-۶)\Rightarrow\begin{cases}V=\left|(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})\right|=۷۲\\ \begin{vmatrix}۲&-۱&-۲\\ ۰&-۳&۰\\ -۶&۰&-۶\end{vmatrix}=۷۲\Rightarrow V=۷۲\\ h=\vec{a}\times\vec{b}\Rightarrow V=Sh=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right|^۲=۷۲\end{cases}$$

۳۳
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=۶\sqrt{۳},\sin\theta=\frac{۶\sqrt{۳}}{۴\times۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$\vec{a}.(\vec{a}-\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^۲-\vec{a}.\vec{b}=۴^۲-۴\times۳\times\left(\pm\frac{۱}{۲}\right)=۱۶\pm۶\Rightarrow\begin{cases}a.(a-b)=۱۰\\ a.(۱-b)=۲۲\end{cases}$$

۳۴
$$\vec{a}=(-۱,۰,-\sqrt{۳})$$

$$\vec{b}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^۲}\vec{a}=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۴}(-۱,۰,-\sqrt{۳})=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲},۰,\frac{۳}{۲}\right),\left|\vec{b}'\right|=\sqrt{۳}$$

۳۵ الف) $x = ۲$ ب) بردار صفر یا $\overrightarrow{O}$ ج) $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$

۳۶ نادرست

۳۷ $S = \frac{۱}{۲}\left|۲\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\right| = \frac{۱}{۲}\left|۲\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} + ۲\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right|$ (ص ۸۴)

$$S = \frac{۱}{۲}\left|۰ + ۲\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right||\mathrm{Sin}\,\theta| = ۵ \times ۵ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲}$$

۳۸ $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (-۲, ۱, ۲)$ (ص ۸۴)

$$\overrightarrow{a'} = \frac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{d}\right|^{۲}}\overrightarrow{d} = \frac{(-۲ - ۳ + ۸)}{(-۲)^{۲} + ۱^{۲} + ۲^{۲}}(-۲, ۱, ۲) = \left(\frac{-۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳}\right)$$

۳۹ $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$ (ص ۸۴)

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -۳\overrightarrow{i} + ۵\overrightarrow{j} + ۷\overrightarrow{k} = (-۳, ۵, ۷)$$

۴۰ $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\mathrm{Cos}\,\theta \Rightarrow ۱۲ = ۱۰ \times ۲ \times \mathrm{Cos}\,\theta \Rightarrow \mathrm{Cos}\,\theta = \frac{۳}{۵}$ (ص ۸۴)

$$\mathrm{Sin}\,\theta = \sqrt{۱ - \left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}} = \frac{۴}{۵} \text{ (} \theta \text{ حاده است)}$$

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\mathrm{Sin}\,\theta = ۲ \times ۱۰ \times \frac{۴}{۵} = ۱۶$$

۴۱ الف) نادرست (ص ۲۲) ب) درست (ص ۳۹) پ) درست (ص ۷۵)

۴۲ الف) $k = \frac{۱}{۲}$ (ص ۱۲)

ب) دو خط متقاطع (ص ۳۹)

پ) یک (ص ۸۲ و ۸۳)

۴۳ $V = ۰ \Rightarrow \left|\overrightarrow{a}\,.\,(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})\right| = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} m & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & m & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow m^{۲} - ۲m + ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱$

۴۴ $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{j} = (-۲, -۱, ۱)\,,\, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} + ۷\overrightarrow{j} + ۵\overrightarrow{k}\,,\, \left|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{۷۵}$

$S = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$ (ص ۷۵ و ۸۴)

۴۵ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (۱, ۱, ۱)$

$\vec{v} = ۲\vec{c} - \vec{b} = (۳, -۴, ۰) \Rightarrow |\vec{v}| = ۵, \vec{u} . \vec{v} = -۱$

$\vec{u'} = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{|\vec{v}|} \vec{v} \Rightarrow \vec{u'} = \left(-\frac{۳}{۲۵}, \frac{۴}{۲۵}, ۰ \right)$ (ص ۷۵ و ۸۴)

۴۶ $\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \Rightarrow ۲m = (\sqrt{m^۲ + ۴})(۲\sqrt{۲})\left(\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow ۴m^۲ = ۲m^۲ + ۸$

$\Rightarrow m^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ & \text{ق ق} \\ m = -۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$ (ص ۷۸)

۴۷ صفر (ص ۸۲)

۴۸ درست (ص ۶۴)

۴۹ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{۰} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (۴k, -۴k, ۲k)$

$|\vec{b}| = ۶|k| = ۱۲ \Rightarrow k = \pm ۲ \Rightarrow k = -۲ \Rightarrow \vec{b} = (-۸, ۸, -۴)$ (ص ۸۲)

۵۰ $\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta \Rightarrow ۳ = ۳\sqrt{۲} \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ$ (ص ۷۸)

۵۱ حجم متوازی‌السطوح برابر با حاصل‌ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است. (ص ۸۳)

حجم متوازی‌السطوح برابر $|\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c})| = |(۱, ۱, ۰) . (۱, ۱, -۱)| = ۲$ است.

مساحت قاعده این متوازی‌السطوح که توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود برابر با: $|\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{۳}$ است.

در نتیجه: $h = \frac{|\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۵۲ روش اول: بردار $\vec{a}'$ با بردار $\vec{b}$ موازی است، $\vec{a}' \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b}$. (ص ۷۹)

$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} - \vec{a}').\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} - (k\vec{a}).\vec{b} = 0 \Rightarrow k = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

روش دوم: در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را θ می‌نامیم

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}|\,\text{Cos}\,\theta$$

$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'| = k|\vec{b}| \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|\,\text{Cos}\,\theta}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|\,|\vec{a}|\,\text{Cos}\,\theta}{|\vec{b}|^2} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

$$\xrightarrow{\vec{a}'=k\vec{b}} \vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

۵۳ مختصات نقطه $A(0,0,3)$، مختصات وسط AB برابر با $M\left(\frac{1}{2},0,2\right)$ و فاصله تا مبدأ مختصات $\frac{\sqrt{17}}{2}$ است. (ص ۶۶)

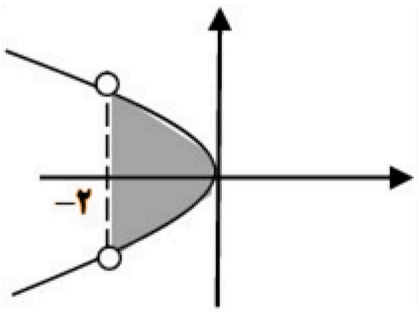
۵۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (ص ۸۱ و ۸۲)

۵۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۸۰)

۵۶ درست (ص ۸۱)

۵۷ zها (ص ۶۷)

۵۸ (ص ۶۳)



۵۹ الف) $\vec{b} = (۲, ۰, ۲), \left|۲\vec{b} - \vec{c}\right| = |(۲, -۲, ۱)| = ۳$ (ص ۷۶)

ب) $\vec{b} + \vec{c} = (۱, ۲, ۲)$ (ص ۸۱)

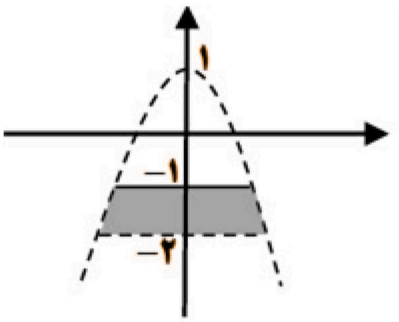
$S = \left|\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})\right| = |(۸, -۵, ۱)| = ۳\sqrt{۱۰}$

۶۰ $\vec{a} = r\vec{b}$

$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^۲}\vec{b} = \frac{(r\vec{b}).\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^۲}\vec{b} = \frac{r\left|\vec{b}\right|^۲}{\left|\vec{b}\right|^۲}\vec{b} = r\vec{b} = \vec{a}$ (ص ۸۰)

۶۱ $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲ - n}{\sqrt{۲} \times \sqrt{۴ + ۱ + n^۲}} \Rightarrow \frac{n - ۲}{\sqrt{n^۲ + ۵}} = ۱$

$n^۲ + ۵ = n^۲ - ۴n + ۴ \Rightarrow n = -\frac{۱}{۴}$ (ص ۷۸)

۶۲ 

(ص ۶۳)

۶۳ $z = ۳$ (ص ۶۸)

۶۴ $(\vec{b} \times \vec{c}) = (۶, ۴, -۴)$ (ص ۸۳)

$v = \left|\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})\right| = |(۱, ۰, ۱).(۶, ۴, -۴)| = ۱۰$

اگر دانش‌آموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:

$$v = \left|\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})\right| = \left\|\begin{matrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۳ & ۰ \end{matrix}\right\| = ۱۰$$

۶۵ $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta \Rightarrow ۱۰ = ۳ \times ۵\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۲}{۳}, \sin\theta = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta = ۵\sqrt{۵} \Rightarrow s_{\Delta} = \frac{۱}{۲}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$ (ص ۸۴)

۶۶ $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = ۰ \Rightarrow ۲(m + ۱) + ۳m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۰$ (ص ۷۹)

۶۷ $\vec{a} = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲} = ۵$ (ص ۷۳)

۶۸ رسم نمودار (به طوری که نقطه توپر و توخالی مشخص باشد) (ص ۶۳)

۶۹ درست (ص ۷۵)

۷۰ عرض ها یا محور yها (ص ۶۷)

۷۱ $\vec{a}.\vec{b} = ۰ \longleftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ۰ \overset{|\vec{a}|\neq ۰ , |\vec{b}|\neq ۰}{\rightleftarrows} \cos\theta = ۰ \longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$ (ص ۷۹)

۷۲ $\overrightarrow{AB} = (۱, ۲, ۱), \overrightarrow{AC} = (-۳, ۲, -۳)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-۸, ۰, ۸), S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = ۴\sqrt{۲}$ (ص ۸۴)

۷۳ $\left|۲\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|۲\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin ۳۰^\circ = ۲(۶)(۴)\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۲۴$ (ص ۸۱)

۷۴ الف) $\vec{a} = (۲, ۳, -۱), \vec{b} = (۱, ۰, ۱)$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow ۱ = \sqrt{۱۴}\sqrt{۲}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$ (ص ۷۸)

ب) $\vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (۱, -۲, ۰)$ (ص ۷۹)

$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{d}}{|\vec{d}|^۲}\vec{d} = \frac{-۴}{۵}(۱, -۲, ۰)$

۷۵ الف) CDFG

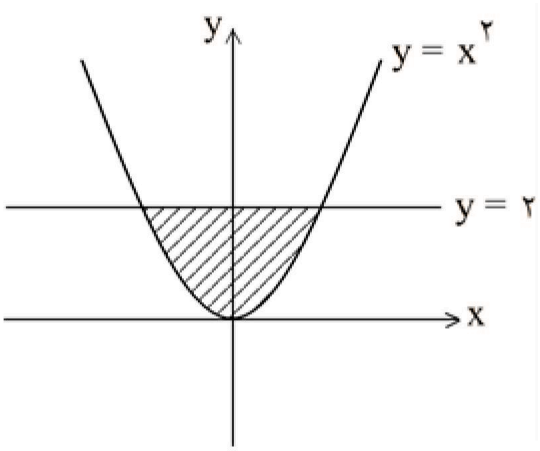
ب) $\begin{cases} ۰ \le x \le ۲ \\ y = ۴ \\ z = ۳ \end{cases}$

پ) $D(۲, ۴, ۳)$

ت) $y = ۲$ (ص ۶۸)

۷۶ رسم نمودار (ص ۵۵)

$y = x^۲$ نمودار یک سهمی است و $y \geq x^۲$ داخل این سهمی است و $y \leq ۲$ نقاط زیر خط $y = ۲$ هستند، پس $x^۲ \leq y \leq ۲$ ناحیه هاشورخورده می‌باشد.



۷۷ نادرست، $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (ص ۷۹)

۷۸ صفر (ص ۸۴)

۷۹
$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{Sin}\theta \Rightarrow ۷۲ = ۳(۲۶) \operatorname{Sin}\theta \Rightarrow \operatorname{Sin}\theta = \frac{۱۲}{۱۳}$$
$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{Cos}\theta = ۳(۲۶)\frac{۵}{۱۳} = ۳۰$$

۸۰

الف)
$$\vec{a}.\vec{b} = ۲ + ۱ + ۰ = ۳ \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \theta = ۴۵$$

ب) بردار عمود بر دو بردار $\vec{a} \times \vec{b}$
$$\vec{a} \times \vec{b} = (۲, -۱, ۲) \times (۱, -۱, ۰) = (۲, ۲, -۱)$$

۸۱
$$\sqrt{۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲} = ۵\sqrt{۲}$$

۸۲
$$A = (۲, ۰, ۰), B = (۰, -۳, ۴)$$
مختصات وسط پاره‌خط AB برابر است با:
$$M = \left(\frac{۲+۰}{۲}, \frac{۰+(-۳)}{۲}, \frac{۰+۴}{۲}\right) = \left(۱, \frac{-۳}{۲}, ۲\right)$$
$$\mathrm{OM} = \sqrt{۱ + \frac{۹}{۴} + ۴} = \sqrt{\frac{۲۹}{۴}}$$

۸۳ الف) ماتریس ب) مشترک پ) خارج ت) صفر

۸۴ الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست

۸۵ $\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})=۰\Rightarrow(۰,m,-۱).(۳,-۳,-۳)=۰\Rightarrow -۳m+۳=۰\Rightarrow m=۱$ (ص ۸۲)

۸۶ روش اول:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta\Rightarrow\sin\theta=\frac{۷۲}{۳\times۲۶}=\frac{۱۲}{۱۳}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{۵}{۱۳}\xrightarrow{\theta<۹۰}$$

$\cos\theta=\frac{۵}{۱۳}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=۳۰$ (ص ۸۴)

روش دوم:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=\left|\vec{a}\right|^{۲}\left|\vec{b}\right|^{۲}\Rightarrow ۷۲^{۲}+(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=۳^{۲}\times۲۶^{۲}$$

$$(\vec{a}.\vec{b})^{۲}=۹۰۰\Rightarrow(\vec{a}.\vec{b})=\pm۳۰\xrightarrow{\theta<۹۰}(\vec{a}.\vec{b})=۳۰$$

۸۷ $\vec{a}.\vec{b}=۲\times۱+(-۱)(-۱)+۲\times۰=۳,\ \vec{b}=\sqrt{۱^{۲}+(-۱)^{۲}+۰^{۲}}=\sqrt{۲}$

$$a'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^{۲}}\vec{b}=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)=\left(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰\right)$$ (ص ۸۰)

۸۸ الف) $A=(۲,۰,۰),B=(۱,۰,۳)$

ب) $AB=\sqrt{(۲-۱)^{۲}+(۰-۰)^{۲}+(۰-۳)^{۲}}=\sqrt{۱۰}$

پ) $M=\left(\frac{۲+۱}{۲},\frac{۰+۰}{۲},\frac{۰+۳}{۲}\right)=\left(\frac{۳}{۲},۰,\frac{۳}{۲}\right)$ (ص ۷۶ و ۶۶)

۸۹ الف) نادرست (ص ۲۱) ب) نادرست (ص ۳۹) پ) نادرست (ص ۴۲) ت) درست (ص ۸۱)

۹۰ الف) قطری (ص ۱۲) ب) مشترک (ص ۳۶) پ) پاره‌خط (ص ۴۹) ت) yoz (ص ۷۳)

۹۱ الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$(-۲\vec{b})\times\vec{c}=(۲,-۲,۰)\times(۲,۱,-۲)=(۴,۴,۶)$$

ب) حجم متوازی‌السطوح تولید شده توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$\left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|=\left|(۲,۳,۱).(-۲,-۲,-۳)\right|=۱۳$$

۹۲ $$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\Leftrightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{o}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\times\sin\theta=۰\xrightarrow{|\vec{a}|\neq۰,|\vec{b}|\neq۰}$$

$\sin\theta=۰\Leftrightarrow\theta=۰$ یا $\theta=\pi\Leftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$

۹۳ $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^{۲}=\left|\vec{o}\right|^{۲}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|^{۲}+\left|\vec{b}\right|^{۲}+\left|\vec{c}\right|^{۲}+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰$

$\Rightarrow ۱+۴+۹+۲(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=۰\Rightarrow(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a})=-۷$

۹۴ $\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶),\ \vec{a}'=\dfrac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{\left|(\vec{b}+\vec{c})\right|^{۲}}(\vec{b}+\vec{c})=\dfrac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$

۹۵ نقطه $A=(۰,۲,۳)$ و مختصات وسط AB برابر است با: $(-۲,۴,۰)$

۹۶ محور Zها

۹۷ $b=-۳$

۹۸ الف) درست ب) نادرست پ) درست ت) نادرست

۹۹ الف) ۸ ب) خط پ) دایره ت) ۶

۱۰۰ $\vec{a}\times\vec{b}=(۳,۲,۱)\times(۲,۰,۱)=(۲,-۱,-۴)$

$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۴+۱+۱۶}=\sqrt{۲۱}$

۱۰۱ $\vec{a}'=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^{۲}}\vec{b}=\dfrac{۲+۱+۰}{۱+۱+۰}(۱,-۱,۰)=\dfrac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)$

۱۰۲ $\vec{a}.\vec{b}=۰\Rightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta=۰\xrightarrow{|\vec{a}|,|\vec{b}|\neq۰}\cos\theta=۰\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{۲}$

۱۰۳ الف) بردار $\vec{a}$ در ناحیه ۵ واقع است.

ب) $۲\vec{a}-\vec{b}=(۲,۲,-۱)\Rightarrow\left|۲\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$

۱۰۴ نقاط A,B زیرا در این دو نقطه $y=۲$ و $z=۱$ می‌باشد.

۱۰۵ الف) نادرست ب) درست پ) نادرست ت) درست

۱۰۶ الف) ندارد ب) بیضی پ) $\left(\dfrac{۱}{۲},۱\right)$ ت) صفر

۱۰۷ الف) $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \dfrac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{۴}$

ب) $\vec{a}\times\vec{b} = (۲,-۱,۲)\times(۱,-۱,۰) = (۲,۲,-۱)$

۱۰۸ $\vec{a}+۲\vec{b} = (۲,-۱,۳)+۲(۱,۲,۰) = (۴,۳,۳)$

$|\vec{a}+۲\vec{b}| = \sqrt{۱۶+۹+۹} = \sqrt{۳۴}$

۱۰۹ $\begin{cases} x=۰ \\ z=۰ \end{cases}$ محور yها است. معادله $x=۰$ معادله صفحه yz که شامل محور yها است.

۱۱۰ الف) $\vec{a}.\vec{b} = (-۲,۰,۲).(۰,۲,۲) = ۴ \qquad |\vec{a}| = |\vec{b}| = ۲\sqrt{۲}$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$

$\vec{a}+\vec{b} = (-۲,۰,۲)+(۰,۲,۲) = (-۲,۲,۴)$

ب) $(\vec{a}+\vec{b})' = \dfrac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}b = \dfrac{۱۲}{۸}(۰,۲,۲) = (۰,۳,۳)$

۱۱۱ الف) بردار $\vec{a}$ در ناحیه چهارم

ب) $\vec{a}+۲\vec{b} = (۳,-۲,۱)+۲(-۲,۱,-۱) = (-۱,۰,-۱)$

$|\vec{a}+۲\vec{b}| = \sqrt{۲}$

پ) ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر آن‌ها عمود است.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۲ & ۱ \\ -۲ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = (۱,۱,-۱)$$

رتبه برترهای کنکور ۱۴۰۴ مدیکال

گروه آموزشی مدیکال استوز

مهشید فاطمی

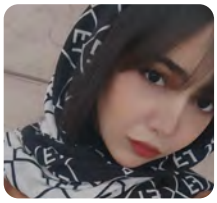
پزشکی
علوم پزشکی کاشان

هانیه مصدق

پرستاری
آزاد نیشابور

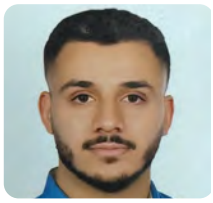
یاسینا نوروزی

پزشکی
جندی شاپور



نرگس مردانی

پرستاری
علوم پزشکی ایران



شایان جعفری

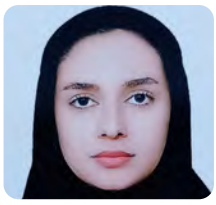
دندانپزشکی
علوم پزشکی بندرعباس

مهدیس رفیعی

اعضای مصنوعی و وسایل کمکی
علوم پزشکی ایران

ابراهیم هناره

دندانپزشکی
علوم پزشکی ارومیه

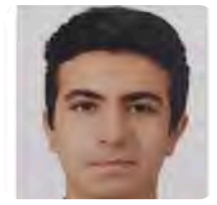


زهرا حمدی

علوم آزمایشگاهی
علوم پزشکی دزفول

محمدحسین نظری

پزشکی
علوم پزشکی همدان



ابوالفضل حسینی ارسون

دندانپزشکی
علوم پزشکی رشت

مائده نظری

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی گرگان

مبینا گودرزی

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی سبزوار

پریسا سادات موسوی

زیست شناسی سلولی و مولکولی
دانشگاه تهران

سحر درخشان

پزشکی
آزاد نجف آباد

نگار دلاوری

پرستاری
آزاد رشت

شنتیا زمانی

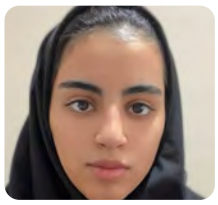
دندانپزشکی
علوم پزشکی شهید بهشتی

سارا مرادی

پرستاری
دانشگاه آزاد واحد شهرکرد

هستی عباسلو

هوشبری
علوم پزشکی رفسنجان



فاطمه حبیبی

پزشکی
علوم پزشکی سمنان

الینا بصیری

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی همدان

ملیکا ابراهیمی نژاد

دندانپزشکی
آزاد بروجرد

محمدصفا مارمائی

پزشکی
علوم پزشکی گرگان

محدثه خان محمدی

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی زنجان

سوگند تیموری

پزشکی
علوم پزشکی کرمانشاه

محمدفرحان کرمی

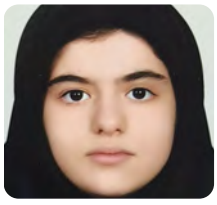
پرستاری
علوم پزشکی بابل

فاطمه شریفی پیرکوهی

فیزیوتراپی
دانشگاه علوم پزشکی جندی شاپور

محمدامین متین

پزشکی
علوم پزشکی دزفول



بهار اسلامی

پزشکی
علوم پزشکی رشت

زینب رنجبر

پرستاری
آزاد اسلامی واحد ساری

فاطمه محمد رحیمی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند

ساناز جعفری

علوم تغذیه
علوم پزشکی اصفهان

مینو رسولی

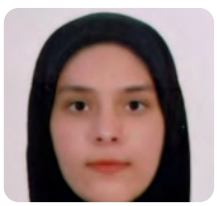
پزشکی
علوم پزشکی شیراز

محمدرضا اسپرجانی

پزشکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان

فاطمه میرزایی

پزشکی
علوم پزشکی زنجان



شایان جعفری

کار درمانی
علوم توانبخشی و سلامت اجتماعی تهران

نرگس کلیچ

پزشکی
علوم پزشکی سمنان

رتبه برترهای کنکور ۱۴۰۴ مدیکال

گروه آموزشی مدیکال استوز

سحر قنبری

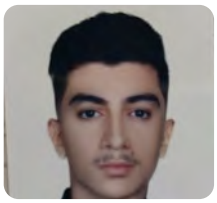
داروسازی
علوم پزشکی کرمان

زهرا حمدی

پزشکی
علوم پزشکی زنجان

هانیه اعتمادی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری

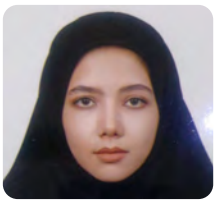


عرشیا نادری

پزشکی
آزاد اسلامی واحد نجف آباد

الهه غلامپور

پزشکی
علوم پزشکی مازندران



فاطمه علی پناه

پزشکی
علوم پزشکی مازندران

فرناز اقایی

پرستاری
علوم پزشکی کاشان

پارمیس یوسفی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند

فاطمه رحمانی

دندانپزشکی
علوم پزشکی زنجان

امیرعلی جهانشاهی

داروسازی
علوم پزشکی مازندران

نرگس دهاقین

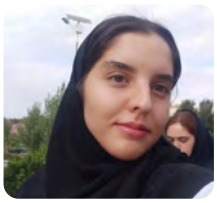
داروسازی
علوم پزشکی همدان

سجاد قویدل

مهندسی صنایع
دانشگاه صنعتی اصفهان

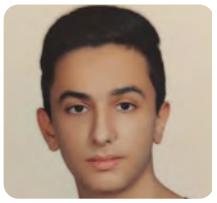
عرشیا شفیع زاده

مهندسی برق
شهید باهنر کرمان



مهتاب سلیمی

ریاضیات و کاربرد ها
دانشگاه الزهرا(س)



علی فتاح

مهندسی صنایع
دانشگاه یزد

سوگند احمدی

مهندسی نفت
دانشگاه شیراز

ثنا شریفی

آمار
دانشگاه علامه طباطبایی تهران

محمد اکبری

مهندسی برق
دانشگاه صنعتی اصفهان

حمید رضا بهزادی

مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شریف

کوثر صحتی

مهندسی معماری
دانشگاه خوارزمی تهران

یاس سنجرانی

مهندسی مکانیک
دانشگاه کاشان

ماهان استرکی

مهندسی شیمی
دانشگاه صنعت نفت آبادان

محمد شیرزایی

مهندسی مکانیک
دانشگاه فردوسی مشهد

مهسا یاری

بیم سنجی
دانشگاه شهید بهشتی تهران

محمد حسن نوابی

مهندسی مکانیک
دانشگاه بوعلی همدان

مبینا مروتی

حسابداری
دانشگاه تهران

حامد لاوی

مهندسی شیمی
صنعتی نوشیروانی بابل

آرمین دارابی

مهندسی مکانیک
دانشگاه قم

محمد هادی تاجیکی

مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید رجایی

مهلا الهی

مهندسی علم و مواد
دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

نگار مشهدی

عکاسی
دانشگاه سمنان

فهیمه امیری مقدم

نوازندگی موسیقی جهانی
دانشگاه تهران

ایلیاد پورمهدی

سینما
دانشگاه دامغان

زینب میرزائی

حسابداری
دانشگاه اراک

مبینا رودنی

حسابداری
دانشگاه زاهدان

ساره کریمی

اقتصاد
دانشگاه خوارزمی تهران