

سوالات مفهومی:

هندسه ۳

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

درس سوم

مبحث: «ویژگی‌های بیضی»

سوالات مفهومی درس "هندسه ۳ - دوازدهم ریاضی"	
فصل: دوم	درس / صفحه: درس سوم «ویژگی های بیضی» صفحات ۴۹ - ۵۰

سوال شماره ۱			
نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه ای	سطح شناختی: کاربری	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح: خانم مریم عارفی فرد		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	
<u>سوال</u> در شکل مقابل، خط d در نقطه M بر بیضی با کانون های F و F' مماس است. از کانون F خطی موازی MF' رسم می کنیم تا خط d را در نقطه N قطع کند. مثلث MNF' همواره چگونه است؟ الف) مثلث قائم الزاویه ب) متساوی الاضلاع پ) متساوی الساقین ت) قائم الزاویه متساوی الساقین <u>پاسخ تشریحی</u> گزینه پ			

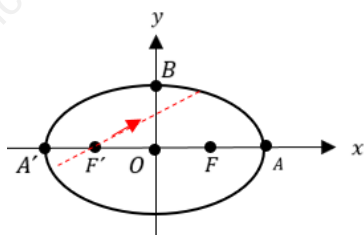
سوال شماره ۲			
نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه ای	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۱
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	
<u>سوال</u>			
در یک بیضی به کانون های $(۲, ۷)$, $(۲, -۱)$ اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟			
(۱) ۰/۶	(۲) ۰/۶۴	(۳) ۰/۷۵	(۴) ۰/۸
<u>پاسخ تشریحی</u>			
گزینه ۴ -			
$FF' = 2c = 7 - (-1) = 8 \Rightarrow c = 4, 2b = 6 \Rightarrow b = 3$			
$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow 9 + 16 = a^2 \Rightarrow a = 5$			
$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$			

سوال شماره ۳

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۰/۲۵
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

سوال

شکل مقابل یک آینه‌ی بیضوی به کانون‌های F و F' را نشان می‌دهد، اگر پرتو نوری از نقطه‌ی F' عبور کرده و بر بیضی بتابد، پرتو بازتابش پس از برخورد به آینه از کدام نقطه می‌گذرد؟



الف) F ب) F' ج) O د) A

پاسخ تشریحی

گزینه الف

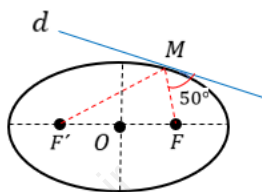
اگر اشعه نوری از یک کانون بیضی بگذرد، پس از برخورد به بیضی پرتو بازتابش آن از کانون دیگر بیضی خواهد گذشت.

سوال شماره ۴

نوع سوال: کوتاه پاسخ؛ جای خالی	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

سوال

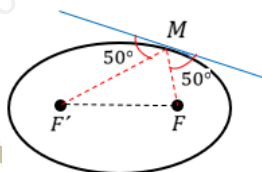
در شکل زیر خط d بر بیضی مماس است. اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{FMF'}$ برابر می‌باشد.



پاسخ تشریحی

اگر $\widehat{FMF'} = \theta$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\theta + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 80^\circ$$



سوال شماره ۵			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: کاربرستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح: خانم زهرا ملکی		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	
<u>سوال</u>			
خط d در نقطه‌ای بر بیضی مماس است. نقطه‌ای مانند A روی خط d وجود دارد که مجموع فواصل آن از کانون‌های بیضی، کمترین مقدار است. اگر از این نقطه به کانون‌ها وصل کنیم ، زاویه $\widehat{FAF}$ برابر ۱۲۰ درجه می‌شود. زاویه‌ای که AF با خط d می‌سازد، چند درجه است؟			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
$\alpha + \alpha + 120 = 180 \rightarrow 2\alpha = 60 \rightarrow \alpha = 30$ (۰.۲۵)			

سوال شماره ۶			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۰/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	
<u>سوال</u> هرچه مقدار خروج از مرکز بیضی به ۱ نزدیک تر شود، شکل بیضی شده و شکل بیضی به نزدیک تر می شود.			
<u>پاسخ تشریحی</u> کشیده تر - پاره خط			

سوال شماره ۷

سوال شماره ۷			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: کاربرستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۷۵
طراح: خانم آذر کریمیان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u> از یک بیضی، دو کانون F و F' و نقطه M روی آن داده شده، خط مماس بر بیضی را در نقطه M ، چگونه رسم کنیم؟			
<u>پاسخ تشریحی</u> با توجه به خاصیت بازتابندگی بیضی، MF' را از طرف M امتداد می‌دهیم و ادامه آن را X می‌نامیم، نیمساز زاویه FMX خط مماس بر بیضی در نقطه M است.			

سوال شماره ۸

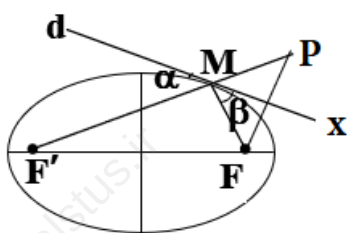
سوال شماره ۸			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم آذر کریمیان		استان / شهرستان: قم / قم	

سوال

اگر خط d در نقطه M بر بیضی با کانون‌های F و F' مماس باشد و بازتاب F نسبت به d را P بنامیم نشان دهید: F' و M و P روی یک امتدادند.

پاسخ تشریحی

P بازتاب F است پس M روی عمود منصف PF قرار دارد و زاویه PMX هم با زاویه β برابر است. اما به دلیل خاصیت بازتابندگی بیضی $\alpha = \beta$ یعنی سه نقطه روی یک خط هستند.



سوال شماره ۹

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۲۵
طراح: خانم آذر کرمان	استان / شهرستان: قم / قم		

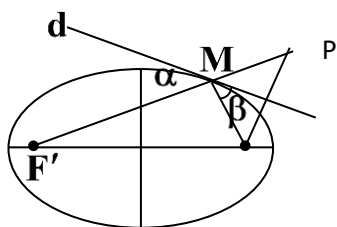
سوال

اگر خط d در نقطه M بر بیضی با کانون‌های F و F' مماس باشد و بازتاب F نسبت به d را P بنامیم نشان دهید: $PF' = 2a$.

پاسخ تشریحی

P بازتاب F است پس M روی عمودمنصف PF قرار دارد. پس $PM = FM$ ولی طبق تعریف بیضی $FM + F'M = 2a$ پس با جایگذاری $PM + MF' = 2a$.

(می‌دانیم سه نقطه P و M و F' روی یک امتدادند).

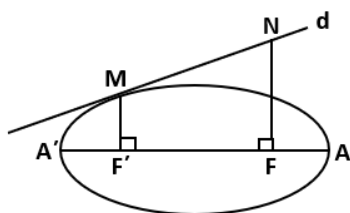


سوال شماره ۱۰

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۲۵
طراح: خانم مریم عارفی فرد	استان / شهرستان: قزوین / قزوین		

سوال

در شکل مقابل، خط d در نقطه M بر بیضی با کانون‌های F و F' مماس است $(MF' \parallel NF)$. اگر طول قطر بزرگ بیضی برابر ۱۰ و فاصله‌ی دو کانون آن ۷ باشد، مساحت دوزنقه $MF'FN$ چقدر است؟



پاسخ تشریحی

داریم $2c = 7$, $2a = 10$ همچنین می‌دانیم مقدار $MF + MF' = 2a = 10$ است و $MF = NF$ و مساحت دوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده در نصف ارتفاع. در نتیجه $S = \frac{1}{2} (NF + MF') (FF')$ و داریم:

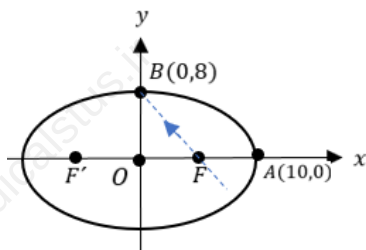
$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 7 = 35$$

سوال شماره ۱۱

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۱/۵
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

سوال

مطابق شکل پرتو نوری از F به بدنه‌ی داخلی یک آینه‌ی بیضی شکل به کانون‌های F و F' می‌تابد. معادله‌ی پرتو بازتابش این پرتو را بنویسید.



پاسخ تشریحی

پرتو بازتابش از کانون F' باید عبور کند:

$$\begin{cases} a = 10 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = 8^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 36 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow \begin{cases} F = (6, 0) \\ F' = (-6, 0) \end{cases}$$

$$m_{BF'} = \frac{8-0}{0-(-6)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

حال باید معادله‌ی خط گذرا از B و F' را بنویسیم:

$$\Rightarrow y - 0 = \frac{4}{3}(x - (-6)) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 8$$

سوال شماره ۱۲

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: ترکیب	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۲
طراح: آقای جعفر زنجانی	استان / شهرستان: زنجان / زنجان		

سوال

در یک بیضی به کانون‌های F, F' اندازه‌ی قطر کوچک ۱۲ و $FF' = 4\sqrt{6}$ است. خط d در نقطه‌ی M بر بیضی مماس است. قرینه نقطه‌ی F' نسبت به خط d را نقطه‌ی F'' می‌نامیم.

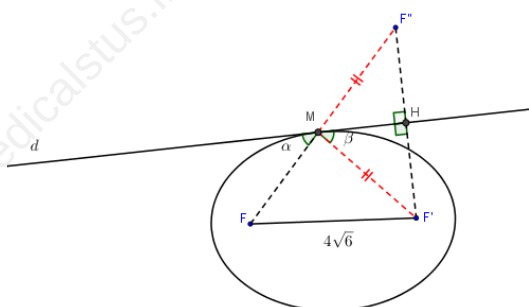
الف) مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F, F' کم‌ترین مقدار را دارد؟ چرا؟

ب) اندازه FF'' را بدست آورید.

پاسخ تشریحی

الف) نقطه‌ی M ، زیرا این نقطه تنها نقطه‌ای از خط d است که روی بیضی قرار دارد. (خط d در نقطه‌ی M بر بیضی مماس است)

و سایر نقاط این خط خارج از بیضی قرار دارند که مجموع فواصل آن‌ها از کانون‌ها، بیشتر از مجموع فواصل نقطه‌ی M از کانون‌های بیضی است و $\alpha = \beta$.



(ب)

$$2b = 12 \Rightarrow b = 6$$

$$FF' = 2c = 4\sqrt{6} \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 36 + 24 = 60 \Rightarrow a = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

بازتاب (قرینه‌ی) نقطه‌ی F' نسبت به خط d را بدست می‌آوریم و آن را F'' می‌نامیم.

باتوجه به مفهوم بازتاب داریم: $MF' = MF''$

با استفاده از مفهوم کوتاه‌ترین مسیر و قضیه هرون، به روش زیر اندازه‌ی FF'' را محاسبه می‌کنیم:

$$MF + MF' = MF + MF'' = FF''$$

$$MF + MF' = 2a = 2(2\sqrt{15}) = 4\sqrt{15}$$

$$FF'' = MF + MF'' = 4\sqrt{15}$$

سوالات مفهومی:

هندسه ۳

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

درس سوم

مبحث: « تعیین معادله سهمی و دیگر اجزای آن »

سوالات مفهومی درس "هندسه ۳ - دوازدهم ریاضی"

درس / صفحه: درس سوم « تعیین معادله سهمی و دیگر اجزای آن » صفحات ۵۴-۵۲	فصل: دوم
---	----------

سوال شماره ۱

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم مریم عبدالملکی		استان / شهرستان: کردستان / قروه	

سوال

اگر $A(۱, -۳)$ یک نقطه از سهمی و خط $x = -۲$ خط هادی سهمی باشد، کانون سهمی روی کدام منحنی است؟

$$(۱) \quad (x - ۱)^2 + (y + ۳)^2 = ۹$$

$$(۲) \quad (x + ۱)^2 + (y - ۳)^2 = ۹$$

$$(۳) \quad (x - ۱)^2 + (y + ۳)^2 = ۱$$

$$(۴) \quad (x + ۱)^2 + (y - ۳)^2 = ۱$$

پاسخ تشریحی

گزینه ۱ - نقطه A روی سهمی است. پس فاصله اش از کانون و خط هادی یکسان است.

$$x + ۲ = ۰ \xrightarrow{\text{فاصله نقطه } A \text{ از خط هادی سهمی}} AH = \frac{|۱ + ۲|}{\sqrt{۱^2 + ۰^2}} = ۳$$

اگر به مرکز A و شعاع AH دایره‌ای رسم کنیم از کانون F می‌گذرد، یعنی کانون سهمی روی دایره به مرکز A و شعاع AH است. بنابراین معادله دایره‌ای که کانون سهمی روی آن است عبارت است از:

$$(x - ۱)^2 + (y + ۳)^2 = ۹$$

سوال شماره ۲			
نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۵/۰
طراح: خانم ستاره رجبی		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	
<u>سوال</u> یک سهمی با کدام معلومات زیر به صورت منحصر به فرد مشخص می‌شود؟ الف) محور و خط هادی ب) کانون و یک نقطه از سهمی ج) خط هادی و کانون د) خط هادی و یک نقطه از سهمی			
<u>پاسخ تشریحی</u> گزینه ج			

سوال شماره ۳			
نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	
<u>سوال</u>			
اگر خط $x=2$ خط هادی سهمی $y^2 + 6y + 4x + k = 0$ باشد، مقدار k کدام است؟			
(۱) ۱	(۲) -۵	(۳) -۱	(۴) ۵
<u>پاسخ تشریحی</u>			
گزینه‌ی ۴ -			
معادله استاندارد سهمی به صورت $(y+3)^2 = -4(x + \frac{k-9}{4})$ است. پس نمودار سهمی ، افقی و روبه چپ می‌باشد.			
$-4a = -4 \Rightarrow a = 1$			
مختصات رأس سهمی به صورت $S(\frac{9-k}{4}, -3)$ است. با توجه به معادله خط هادی سهمی:			
$x = \frac{9-k}{4} + a = \frac{9-k}{4} + 1$			
$2 = \frac{9-k}{4} + 1 \Rightarrow k = 5$			

سوال شماره ۴

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی:	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۵/۰
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

سوال

در یک دیش مخابراتی عمق برابر ۵۰ سانتیمتر و قطر دهانه ۱۵۰ سانتی‌متر است. فاصله کانونی این دیش را محاسبه کنید.

$$\frac{50^2}{4 \times 75} \quad \text{د}$$

$$\frac{75^2}{4 \times 50} \quad \text{ج}$$

$$\frac{75^2}{4 \times 150} \quad \text{ب}$$

$$\frac{50^2}{4 \times 150} \quad \text{الف}$$

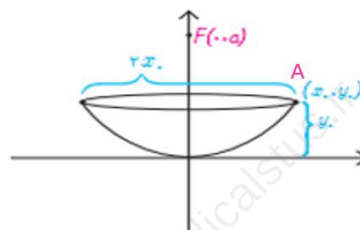
پاسخ تشریحی

گزینه ج صحیح است:

$$A(75, 50)$$

$$x_1^2 = 4ay_1$$

$$75^2 = (4a)(50) \Rightarrow a = \frac{75^2}{4 \times 50} = 28/125$$



سوال شماره ۵

نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۷۵/۰
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

سوال

معادله خط هادی سهمی که نقاط $S(2,0)$ و $F(4,0)$ راس و کانون آن هستند را تعیین کنید.

پاسخ تشریحی

:

$$h + a = 4 \Rightarrow 2 + a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$x = -a + h \Rightarrow x = 0 \quad \text{معادله خط هادی}$$

سوال شماره ۶

سوال شماره ۶			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۵/۰
طراح: خانم مریم عبدالملکی		استان / شهرستان: کردستان / قروه	
<u>سوال</u>			
اگر $S(۲,۴)$ راس سهمی و $F(۶,۴)$ کانون آن باشد معادله خط هادی سهمی را بنویسید.			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
چون مختصات عرض راس سهمی و کانون باهم برابر است سهمی افقی است و $a=۴$, $h=۲$.			
معادله خط هادی سهمی:			
$x=h-a=۲-۴=-۲$			

سوال شماره ۷

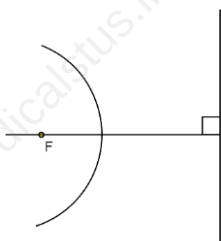
سوال شماره ۷			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۵/۰
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	
<u>سوال</u>			
فاصله ی راس سهمی $(x+1)^2 + 4 = 2y$ از مبدأ مختصات برابر با است.			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
$(x + 1)^2 + 4 = 2y$ $(x + ۱)^۲ = ۲(y - ۲)$ $S(-۱,۲)$ $OS = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$			

سوال شماره ۸

نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم افسانه حبیبی دعویسرائی		استان / شهرستان: قزوین / البرز	

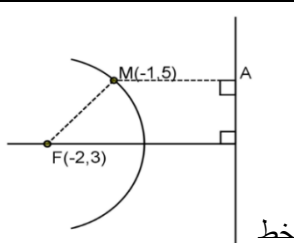
سوال

در سهمی شکل مقابل $F(-2, 3)$ کانون و $M(-1, 5)$ روی سهمی است. معادله خط هادی را بنویسید.



پاسخ تشریحی

از M به خط هادی عمود می‌کنیم و نقطه برخورد را A می‌نامیم.
طبق تعریف سهمی $MF = MA$ و داریم:



$$\sqrt{(-2 + 1)^2 + (3 - 5)^2} = MA \Rightarrow MA = \sqrt{5}$$

پس داریم: معادله خط هادی $MA = x_A - x_M \Rightarrow x = MA - 1 \Rightarrow x = \sqrt{5} - 1$

سوال شماره ۹

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم آذر کرمان		استان / شهرستان: قم / قم	

سوال

معادله سهمی را بنویسید که راس آن روی محور x ها و به طول ۲ بوده و کانون‌اش بر مبدا مختصات منطبق باشد، معادله خط هادی آن را نیز بیابید.

پاسخ تشریحی

$$a = 2, \quad s(2, 0) \rightarrow (y - 0)^2 = -4 \times 2(x - 2) \rightarrow y^2 = -8(x - 2)$$

سوال شماره ۱۰

سوال شماره ۱۰			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: کاربری	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: خانم آذر کرمان	استان / شهرستان: قم / قم		
<u>سوال</u> مختصات کانون، راس و معادله خط هادی، همچنین محور سهمی $x^2 + 8x + 8y = 0$ را تعیین کنید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $x^2 + 8x + 16 = -8y + 16 \rightarrow (x + 4)^2 = -8(y - 2) \rightarrow O(-4, 2), a = 2$ محور $x = -4$ ، خط هادی $y = 4$			

سوال شماره ۱۱

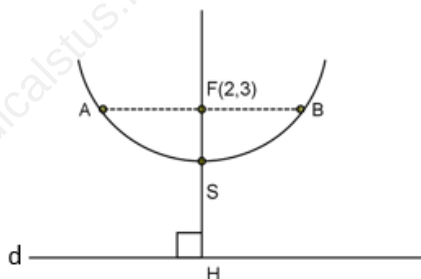
سوال شماره ۱۱			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۲
طراح: خانم آذر کرمان	استان / شهرستان: قم / قم		
<u>سوال</u> سهمی به معادله $y = -x^2 + bx + c$ داده شده است، مطلوب است تعیین مقادیرهای c و b به طوری که $S(1, 1)$ راس آن باشد. مختصات کانون و معادله خط هادی آن را بنویسید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $y = -\left(x^2 - bx + \frac{b^2}{4}\right) + c + \frac{b^2}{4} \rightarrow -\left(y - \frac{c + b^2}{4}\right) = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \rightarrow$ $b = 2, c = 0, a = \frac{1}{4}, F\left(1, \frac{3}{4}\right), y = \frac{5}{4}$			

سوال شماره ۱۲

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: کاربردی	سطح دشواری: متوسط	شماره: ۱/۵
طراح: خانم افسانه حبیبی دعویسرائی		استان / شهرستان: قزوین / البرز	

سوال

در شکل مقابل نقطه‌ی $F(2,3)$ کانون سهمی و پاره خط AB با خط هادی (d) موازی است. اگر طول پاره خط AB برابر ۸ واحد باشد، معادله سهمی را بنویسید.



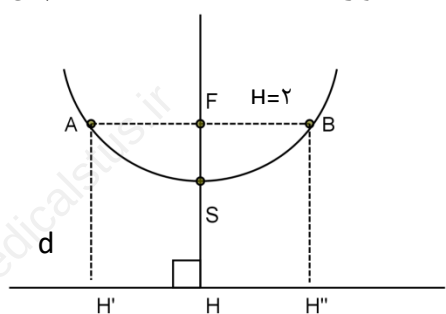
پاسخ تشریحی

ابتدا از نقطه‌های A و B برخط هادی عمود می‌کنیم $(H''$ و $H')$ چون AB موازی با خط هادی است پس چهارضلعی $AFHH'$ یک مستطیل خواهد بود. لذا $AH' = 2a$ به همین

ترتیب $BF = 2a$ پس $AB = 4a$ از طرفی طبق فرض داریم:

$$AB = 8 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

و همچنین سهمی روبه بالا است:



$$F(h, a + k)$$

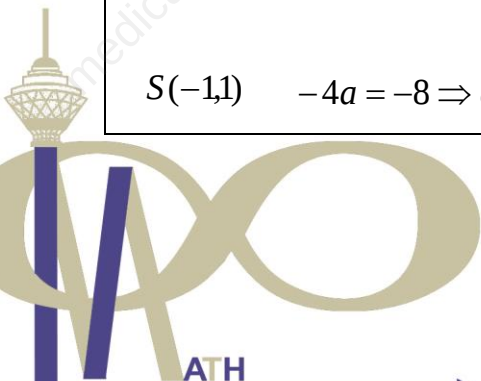
$$F(2, 3) : a + k = 3 \Rightarrow 2 + k = 3 \Rightarrow k = 1$$

و معادله سهمی برابر است با:

$$(x - h)^2 = 4a(y - k) \Rightarrow (x - 2)^2 = 8(y - 1)$$

سوال شماره ۱۳			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل			
<u>سوال</u> معادله مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط $x=2$ و نقطه $A(-4,2)$ به یک فاصله اند را بنویسید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> طبق تعریف جواب مساله یک سهمی است که خط هادی $x=2$ و کانون $A(-4,2)$ و سهمی افقی است. $\begin{cases} a+h=2 \\ -a+h=-4 \end{cases} \quad h=-1 \quad a=3$ راس سهمی: $S(-1,2)$ دهانه سهمی روبه سمت چپ معادله سهمی: $(y-2)^2 = -4(+3)(x+1)$			

سوال شماره ۱۴			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل			
<u>سوال</u> در سهمی به معادله $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ راس، کانون و خط هادی سهمی را بدست آورید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> ابتدا معادله سهمی را استاندارد می کنیم: $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y = -8x - 9 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = -8x - 8$ $(y-1)^2 = -8(x+1)$ رو به سمت چپ $F(-a+h, k) = (-3, 1)$ کانون $S(-1, 1) \quad -4a = -8 \Rightarrow a = 2$ $x = a + h \Rightarrow x = 2 + (-1) \Rightarrow x = 1$ خط هادی			



سوال شماره ۱۵

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: ترکیب	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۲
طراح: خانم مریم عبدالملکی	استان / شهرستان: کردستان / قروه		

سوال

راس سهمی $x^2 - 4x - 8y + 12 = 0$ را A می‌نامیم. در کانون سهمی، خطی عمود بر محور تقارن سهمی رسم می‌کنیم تا سهمی را در نقاط B و C قطع کند. مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

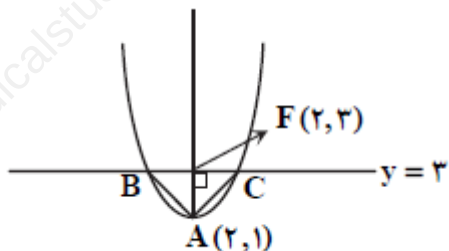
پاسخ تشریحی

$$x^2 - 4x - 8y + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 - 8y + 12 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 8y - 8$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = 8(y - 1) \rightarrow A(2, 1), a = 2, F(2, 3)$$

خط $y=3$ (خطی که در کانون بر محور تقارن عمود می‌شود) را با سهمی قطع می‌دهیم:

$$(x - 2)^2 = 8(y - 1) \xrightarrow{y=3} (x - 2)^2 = 16 \rightarrow x - 2 = \pm 4 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} B(-2, 3) \\ C(6, 3) \end{cases} \rightarrow BC = |-2 - 6| = 8$$

از طرفی $AF=a=2$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AF \times BC}{2} = \frac{2 \times 8}{2} = 8$$

سوال شماره ۱۶

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: ترکیب	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۲
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	

سوال

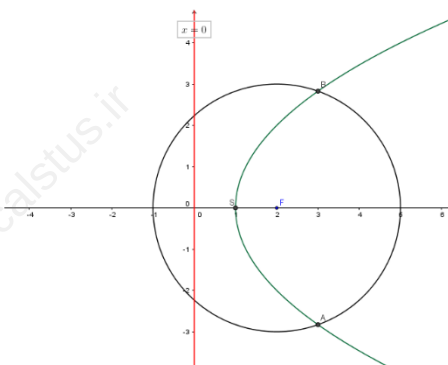
سهمی به معادله $y^2 = 4x - 4$ داده شده است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم. مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

پاسخ تشریحی

معادله استاندارد سهمی به صورت $y^2 = 4(x - 1)$ است. پس سهمی افقی و رو به راست می‌باشد.

$$4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $S(1, 0)$ مختصات رأس آن، $F(2, 0)$ مختصات کانون آن و $x = 0$ معادله خط هادی آن است.



دایره $C(F, 3)$ را رسم می‌کنیم. معادله این دایره بصورت $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ است.

مطابق شکل، این دایره سهمی را در دو نقطه‌ی A و B قطع می‌کند.

برای بدست آوردن مختصات این دو نقطه، معادله دایره و سهمی را قطع می‌دهیم:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 9 \xrightarrow{y^2 = 4x - 4} x^2 - 4x + 4 + 4x - 4 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

با توجه به شکل، $x = 3$ قابل قبول است و $A(3, 2\sqrt{2})$ و $B(3, -2\sqrt{2})$.

سوالات مفهومی:

هندسه ۳

پایه دوازدهم ریاضی

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

درس سوم

مبحث: «ویژگی بازتابندگی و خواص سهمی»

سوالات مفهومی درس "هندسه ۳ - دوازدهم ریاضی"

درس / صفحه: درس سوم « ویژگی بازتابندگی و خواص سهمی » صفحات ۵۶ - ۵۷	فصل: دوم
--	----------

سوال شماره ۱

نوع سوال: پاسخ گزین؛ صحیح- غلط	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۵/۰
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

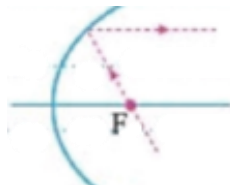
سوال

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

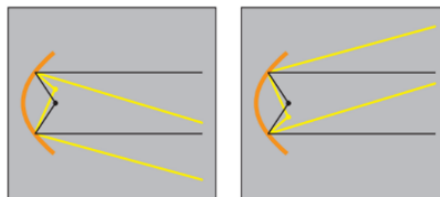
الف) اگر یک شعاع نورانی از کانون سهمی بگذرد و بر سهمی بتابد، بازتابش آن موازی محور سهمی خواهد بود.
ب) اگر یک لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی قرار گیرد (کمی بالاتر یا پایین تر) شعاع های نور با هم موازی خارج نمی شوند.

پاسخ تشریحی

الف) درست



ب) نادرست



سوال شماره ۲

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۵/۰
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

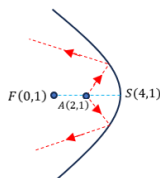
سوال

نقطه‌ی $S(4,1)$ راس یک سهمی و نقطه‌ی $F(0,1)$ کانون آن است. یک منبع نورانی را در کدام نقطه قرار دهیم تا شعاع‌های بازتابش به صورت واگرا از سهمی خارج شود؟

- الف) $(2,1)$ ب) $(-1,1)$ ج) $(0,-1)$ د) $(-2,-1)$

پاسخ تشریحی

گزینه‌ی الف: اگر منبع نور در امتداد محور و بین راس سهمی و کانون قرار گیرد، شعاع‌های بازتابش واگرا خواهد شد، بنابراین نقطه‌ی $A(2,1)$ جواب است.



سوال شماره ۳

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۱
طراح: آقای جعفر زنجانی	استان / شهرستان: زنجان / زنجان		

سوال

از نقطه‌ی $A(-2,1)$ دو شعاع نوری بر سهمی $y^2 - 4x - 2y = 11$ می‌تابد. بازتاب آن‌ها چگونه باز می‌گردند؟

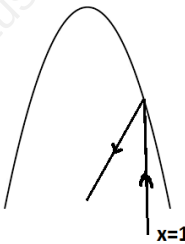
- (۱) متقاطع (۲) غیر موازی با محور سهمی
(۳) غیر موازی با هم (۴) موازی با هم و موازی با محور سهمی

پاسخ تشریحی

گزینه ۴ - معادله استاندارد سهمی به صورت $(y-1)^2 = 4(x+3)$ است. سهمی افقی و روبه راست، مختصات رأس آن $S(-3,1)$ ، $a=1$ و کانون آن $F(-2,1)$ است. در واقع دو شعاع نور از کانون بر سهمی می‌تابند. بنابراین به صورت موازی باهم و موازی با محور سهمی خارج می‌شوند.

سوال شماره ۴

سوال شماره ۴			
نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح: خانم مریم عارفی فرد		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	



سوال

در شکل مقابل، اگر شعاع نوری به معادله $x=1$ بر سهمی به معادله $x^2 + 6x + 4y + 9 = 0$ بتابد. معادله شعاع بازتابش کدام است؟

الف) $3x+4y+13=0$

ب) $4y-3x-13=0$

پ) $4y-3x+13=0$

ت) $4x+3y+13=0$

پاسخ تشریحی

گزینه الف: $A(1, -4)$ نقطه تلاقی خط و سهمی را تعیین می‌کنیم سپس با داشتن مختصات این نقطه و کانون معادله خط را می‌نویسیم.

$$x^2 + 6x + 9 = -4y \rightarrow (x+3)^2 = -4y \rightarrow a = 1$$

$S(-3, 0) , F(-3, -1)$

سوال شماره ۵

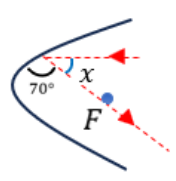
سوال شماره ۵			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۰/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	
<u>سوال</u> هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه آن بتابد، بازتاب آن از خواهد گذشت.			
<u>پاسخ تشریحی</u> کانون سهمی			

سوال شماره ۶

سوال شماره ۶			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۵/۰
طراح:		استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل	

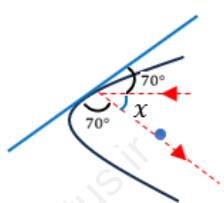
سوال

یک شعاع نورانی مطابق شکل به موازات محور سهمی، بر سهمی تابیده است، زاویه ی x را به دست آورید.



پاسخ تشریحی

زاویه ی تابش و خط مماس با زاویه ی بازتابش و خط مماس با هم برابر است، بنابراین:

$$70^\circ + 70^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$


سوال شماره ۷

سوال شماره ۷			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: کاربرستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم مریم عارفی فرد		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	
<u>سوال</u> معادله‌ی یک آینه‌ی سهمی شکل به صورت $(y - ۲)^۲ = ۴(x + ۱)$ است. اگر یک منبع نور مثل لامپ روشن در نقطه‌ی (۰ و ۱) قرار بدهیم، پرتوهای بازتابش به چه صورت خواهد بود؟			
<u>پاسخ تشریحی</u> طبق اطلاعات مساله کانون سهمی نقطه (۰ و ۲) خواهد بود و سهمی افقی رو به راست است. پس اگر لامپ در نقطه گفته شده باشد پایینتر از کانون سهمی خواهد بود و بازتابش نور آن به صورت نوربالا است، یعنی پرتوهای باز تابش موازی رو به بالا.			

سوال شماره ۸

سوال شماره ۸			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: کاربردی	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۲۵
طراح: خانم آذر کرمان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u> تمام پرتوهایی که موازی با محور سهمی بر آن می‌تابند در نقطه $N(2, 5)$ هم‌رسند، اگر راس سهمی $A(2, 1)$ باشد، معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> با توجه به ویژگی بازتابندگی سهمی نقطه N همان کانون است: (۲) معادله خط هادی آن $y = -3$ است. (۳) دهانه سهمی رو به بالاست. لذا معادله آن به صورت $(y - 1) = 16(x - 2)^2$ است.			

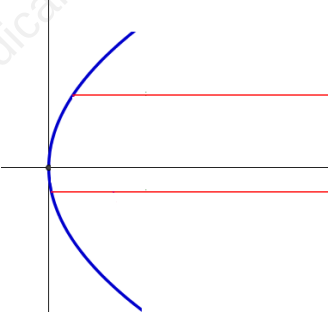
سوال شماره ۹

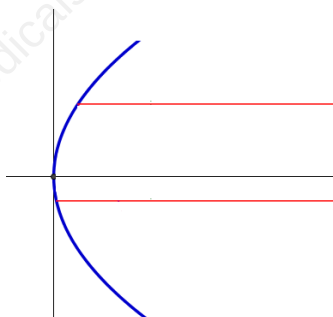
سوال شماره ۹			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: ترکیب	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم آذر کرمان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u>			
خط هادی d و دو نقطه M و N از یک سهمی معلوم است، چند سهمی می‌توان رسم کرد؟ (بحث کنید).			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
با توجه به نکته سوال ۱۱ ص ۵۸ (سهمی مکان هندسی مراکز دایره‌هایی است که از یک نقطه ثابت صفحه می‌گذرند و بر خط معینی مماس هستند) دو دایره به مرکز های M, N چنان رسم می‌کنیم که بر خط d مماس باشند نقطه برخورد دو دایره کانون سهمی است. (بحث اگر دو دایره مماس شوند یک جواب، اگر در دو نقطه قطع کنند دو جواب قابل قبول و اگر نقطه مشترکی نداشته باشند، مساله جواب ندارد).			

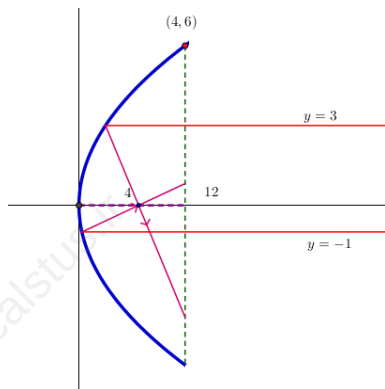
سوال شماره ۱۰

سوال شماره ۱۰			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: کاربرستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم آذر کریمیان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u>			
اگر قطر دهانه دیش مخابرات، ۱۲ متر و گودی آن، ۴ متر باشد، فاصله کانونی دیش را بیابید.			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
با توجه به تمرین ۱۳ ص ۵۸:			
$a = \frac{12 \times 12}{4 \times 16} = 2/25$			

سوال شماره ۱۱

سوال شماره ۱۱			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	
<u>سوال</u> در امتداد خطوط $y = -1$ و $y = 3$ دو پرتو نورانی به یک آینه سهموی مطابق شکل می تابانیم. اگر قطر قاعده این آینه ۱۲ واحد و عمق آن در مرکز ۴ واحد باشد، مختصات نقطه تلاقی بازتاب این دو پرتو را بدست آورید. 			
<u>پاسخ تشریحی</u> چون این دو پرتو به صورت موازی به آینه می تابند ، پس بازتاب آن ها در کانون سهمی با هم برخورد می کنند. بنابراین باید مختصات کانون سهمی را بدست آوریم. چون قطر قاعده آینه ۱۲ است، شعاع آن ۶ و عمق آن ۴ واحد است. پس نقطه بالای آینه $(4, 6)$ می شود.			





در معادله $y^2 = 4ax$ داریم:

$$6^2 = 4a(4) \Rightarrow a = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

بنابراین مختصات کانون سهمی به صورت $F(\frac{9}{4}, 0)$ خواهد بود.

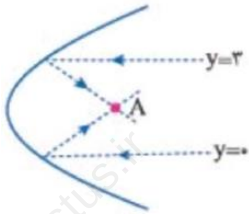
سوال شماره ۱۲

سوال شماره ۱۲			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی:	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم زهرا ملکی		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	
<u>سوال</u> یک اشعه نورانی را در امتداد خط $x = 3$ و اشعه دیگر را در امتداد خط $x = -1$ از داخل سهمی به معادله $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$ بر آن می‌تابانیم. مختصات نقطه تلاقی بازتاب این دو پرتاب چه نقطه‌ای است؟			
<u>پاسخ تشریحی</u> $x^2 - 2x = 4y - 9 \rightarrow (x - 1)^2 = 4y - 9 + 1 \rightarrow (x - 1)^2 = 4y - 8 = 4(y - 2)$ $\rightarrow s(1, 2) , a = 1 \rightarrow F(1, 3)$ در کانون متمرکز می‌شوند.			

سوال شماره ۱۳

سوال شماره ۱۳			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی:	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۱/۵
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		
<u>سوال</u> یک اشعه نورانی را در امتداد خط $y = 3$ و اشعه‌ی دیگر را در امتداد خط $y = 0$ از داخل سهمی به معادله‌ی $y^2 - 2y - 4x - 3 = 0$ به آن می‌تابانیم. مختصات نقطه‌ی تلاقی بازتاب این دو پرتو را به دست آورید.			
<u>پاسخ تشریحی</u>			

مختصات نقاط تلاقی همه‌ی خطوطی که به موازات محور سهمی بر آن می‌تابد، کانون سهمی است.



$$y^2 - 2y - 4x - 3 = 0 \Rightarrow (y - 1)^2 = 4(x + 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S(-1, 1) \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1 + 1, 1) = (0, 1)$$

سوالات مفهومی:

هندسه ۳

پایه دوازدهم ریاضی و فیزیک

فصل دوم: آشنایی با مقاطع مخروطی

درس سوم

مبحث: «خواص بیضی»

سوالات مفهومی درس "هندسه ۳ - دوازدهم ریاضی"

درس / صفحه: درس سوم « خواص بیضی » صفحه ۵۹	فصل: دوم
---	----------

سوال شماره ۱

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح: خانم ستاره رجبی	استان / شهرستان: قزوین / قزوین		

سوال

در مثلث ABC ، اندازه ضلع BC ثابت است و محیط مثلث داده شده است. مکان هندسی راس A کدام است؟
الف) سهمی ب) خط ج) دایره د) بیضی

پاسخ تشریحی

با توجه به محیط مثلث داریم:

$$P = a + AB + AC \Rightarrow AB + AC = \text{مقدار معلوم}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد مجموع فواصل A از دو نقطه ثابت B و C مقداری مشخص است. پس مکان هندسی مورد نظر یک بیضی است.

سوال شماره ۲

نوع سوال: پاسخ گزین؛ صحیح-غلط	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۰/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی	استان / شهرستان: زنجان / زنجان		

سوال

از مثلث ABC اندازه ضلع BC و ارتفاع $AH = h_a$ و محیط مثلث داده شده‌اند. برای رسم این مثلث از خواص سهمی کمک می‌گیریم.
درست ☐ نادرست ☐

پاسخ تشریحی

نادرست است. برای رسم مثلث با خواص داده شده از خواص بیضی کمک می‌گیریم.

سوال شماره ۳			
نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۵/۰
طراح:		استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل	
<u>سوال</u> در مثلثی یکی از اضلاع ۶ سانتی متر ، اگر ارتفاع وارد بر این ضلع ۳ سانتی متر و محیط آن ۱۰ سانتی متر باشد، چند مثلث با این مشخصات می توان رسم کرد؟ الف : ۱ ب : ۲ پ : ۳ ت : ۴			
<u>پاسخ تشریحی</u> گزینه ت $\begin{cases} 2a = 10 \rightarrow a = 5 \\ 2c = 6 \rightarrow c = 3 \end{cases} \rightarrow b = 4$ چون ارتفاع مثلث برابر ۳ است پس ۴ مثلث با این مشخصات می توان رسم کرد.			

سوال شماره ۴			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: ترکیب	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	
<u>سوال</u>			
از مثلث ABC اندازه ضلع $a = BC = 4$ و ارتفاع $AH = h_a = 1$ و محیط مثلث برابر ۹ واحد، داده شده‌اند. برای رسم این مثلث از خواص بیضی کمک می‌گیریم. در این صورت، فاصله کانونی بیضی برابر با و طول قطر بزرگ آن برابر با خواهد بود.			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
فاصله کانونی بیضی برابر با $BC = 4$ و طول قطر بزرگ بیضی برابر با $2p - a = 9 - 4 = 5$ خواهد بود.			

سوال شماره ۵

سوال شماره ۵			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۱/۵
طراح: خانم آذر کرمان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u> در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی، کدام است؟			
<u>پاسخ تشریحی</u> $a = \sqrt{5}, b = 1 \rightarrow c = 2$ دایره به شعاع ۲، از کانون‌ها می‌گذرد و به قطر FF' است یعنی نقطه M روی دایره، روبرو به قطر است و در مثلث $MF'F$ زاویه M قائمه است، پس: $MF'^2 + MF^2 = 16$			

سوال شماره ۶

سوال شماره ۶			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۲۵
طراح: خانم آذر کرمان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u> در یک بیضی قطر بزرگ $4\sqrt{3}$ و $\frac{c^2}{b} = 1$ است. خروج از مرکز را تعیین کنید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $a = 2\sqrt{3}, \quad \frac{c^2}{b} = 1 \rightarrow c^2 = b \rightarrow b^2 + b = a^2 \rightarrow b^2 + b - 12 = 0 \rightarrow b = 3$ $c = \sqrt{3} \rightarrow e = \frac{1}{2}$			



سوال شماره ۷

سوال شماره ۷			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: کاربرستن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۱
طراح: خانم آذر کرمان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u> اگر فاصله ی یک رأس کانونی بیضی از دو کانون آن به ترتیب ۳ و ۲۷ باشند، خروج از مرکز بیضی را بیابید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $2c = 27 - 3 = 24 \rightarrow c = 6, \quad 2a = 27 + 3 \rightarrow a = 15 \rightarrow e = \frac{2}{5}$			

سوال شماره ۸

سوال شماره ۸			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح:		استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل	
<u>سوال</u>			
چند مثلث ABC یافت می شود که محیط آن برابر ۱۶ و اندازه ضلع $BC = 6$ و ارتفاع $AH = 5$ باشد؟			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
چنین مثلثی وجود ندارد، زیرا			
$AB + AC + BC = 16 \rightarrow AB + AC = 10$			
چون ضلع BC ثابت است بنابراین راس A روی بیضی به کانون های C و B حرکت می کند به طوری که :			
$\begin{cases} 2a = 10 \rightarrow a = 5 \\ 2c = 6 \rightarrow c = 3 \end{cases} \rightarrow b = 4$			
بنابراین راس A باید روی بیضی قرار داشته باشد. از طرفی ارتفاع مثلث ۵ است که چنین چیزی امکان پذیر نیست.			

سوال شماره ۹

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۲
طراح: آقای فواد بروجردی/خانم پرشنگ آمانی		استان/شهرستان: کردستان/سقز	

سوال

اگر در مثلث ABC اندازه ضلع BC برابر ۶ واحد و اندازه ارتفاع AH وارد بر ضلع BC برابر ۲ واحد و اندازه محیط مثلث ۱۶ واحد باشد با استفاده از خواص بیضی شیوهی رسم این مثلث را توضیح دهید و خروج از مرکز بیضی که به کمک آن، مثلث را رسم کردید، حساب کنید.

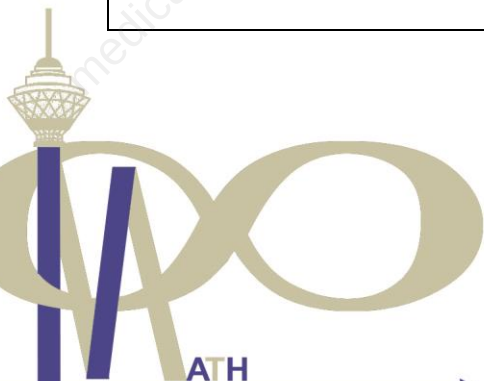
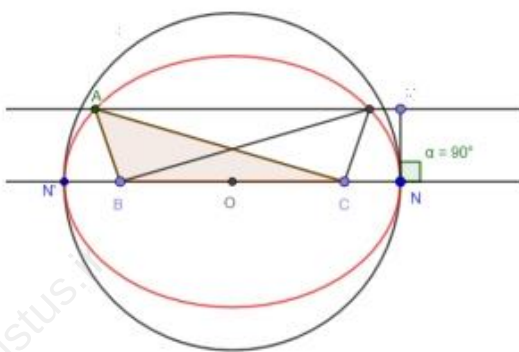
پاسخ تشریحی

روش رسم:

ابتدا پاره خط $BC = 6$ را رسم می کنیم سپس دایره ای به مرکز نقطه O وسط ضلع BC و شعاع $5 = \frac{16-6}{2}$ رسم می کنیم.

پاره خط BC را امتداد می دهیم تا دایره را در دو نقطه N' و N قطع کند و سپس یک بیضی به کانون های B, C که از دو نقطه N, N' بگذرد را رسم می کنیم. اکنون دو خط به موازات خط NN' و به فاصله اندازه ارتفاع مثلث یعنی ۲ واحد رسم می کنیم. محل های تقاطع خط موازی و بیضی، راس سوم مثلث یعنی نقطه A می باشد.

در بیضی رسم شده: $a = 5, c = 3 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$



سوال شماره ۱۰

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: ترکیب	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۲/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی	استان / شهرستان: زنجان / زنجان		

سوال

از مثلث ABC اندازه ضلع $a = BC = 4$ و ارتفاع $AH = h_a = 1$ و محیط مثلث برابر ۹ واحد داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید و روش رسم آن را توضیح دهید.

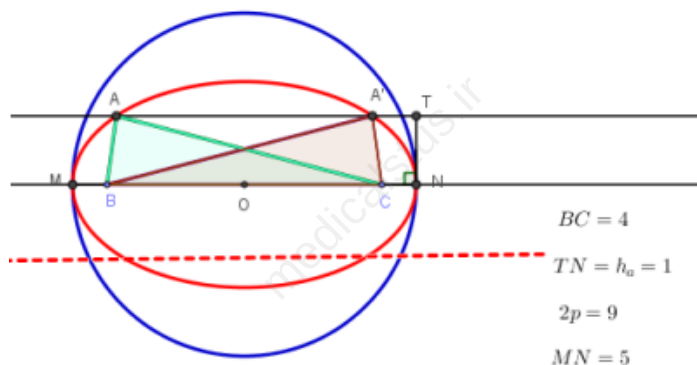
پاسخ تشریحی

- پاره خط BC به طول ۴ سانتی متر را رسم کرده و با رسم عمود منصف آن، نقطه وسط پاره خط را بدست می‌آوریم و آن را نقطه‌ی O می‌نامیم.
- به مرکز O و به قطر $2p - a = 9 - 4 = 5$ (شعاع $2/5$) دایره‌ای رسم می‌کنیم.
- پاره خط BC را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط M و N قطع کند.
- یک بیضی به کانون‌های B, C که از نقطه M یا N بگذرد، رسم می‌کنیم. در این صورت MN قطر بزرگ بیضی خواهد بود و $MN = 2p - a = 5$.
- از نقطه‌ی N عمود $TN = h_a = 1$ را خارج می‌کنیم.
- از نقطه‌ی T خطی به موازات MN رسم می‌کنیم تا بیضی را در نقاط A, A' قطع کند.
- نقاط A, A' رأس سوم مثلث هستند. این نقاط را به نقاط B, C وصل می‌کنیم تا مثلث تشکیل شود. دو مثلث ABC و $A'BC$ با شرایط داده شده مسئله قابل رسم هستند. با استفاده از خواص بیضی، چون A نقطه‌ای روی بیضی است، داریم: $AB + AC = MN$. بنابراین:

$$AB + AC = MN$$

$$AB + AC = 2p - a = 5$$

$$AB + AC + BC = 2p - a + a = 2p = 9$$



سوالات مفهومی:

هندسه ۳

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: بردارها

درس دوم

مبحث: «تصویر قائم یک بردار بر بردار دیگر»

سوالات مفهومی درس "هندسه ۳ - دوازدهم ریاضی"

درس / صفحه: درس دوم « تصویر قائم یک بردار بر بردار دیگر » صفحه ۷۹	فصل: سوم
---	----------

سوال شماره ۱

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح: آقای عادل آخندی	استان / شهرستان: کردستان / دیواندره		

سوال

اگر بردار $\vec{b} = (m, n, p)$ بر بردارهای $\vec{a} = (1, -1, 2)$ و $\vec{c} = (2, 0, 1)$ عمود باشد و $|\vec{b}| = 2$ باشد، مقدار $m + n + p$ کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \quad (۴)$$

$$\frac{6}{\sqrt{14}} \quad (۳)$$

$$\frac{12}{\sqrt{14}} \quad (۲)$$

$$\frac{10}{\sqrt{14}} \quad (۱)$$

پاسخ تشریحی

گزینه ۴ - با استفاده از فرضیات سوال داریم:

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = 0 \rightarrow m - n + 2p = 0 \quad (۱)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow 2m + p = 0 \rightarrow p = -2m \quad (۲)$$

$$|\vec{b}| = 2 \rightarrow m^2 + n^2 + p^2 = 4 \quad (۳)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$m - n - 4m = 0 \rightarrow n = -3m \quad (۴)$$

با جایگذاری روابط بدست آمده (۲) و (۴) در رابطه (۳) داریم:

$$|\vec{b}| = 2 \rightarrow m^2 + 9m^2 + 4m^2 = 4 \rightarrow m = \pm \frac{2}{\sqrt{14}} \rightarrow m + n + p = \frac{-8}{\sqrt{14}} \text{ یا } m + n + p = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

سوال شماره ۲			
نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۵/۰
طراح: خانم کتابون آهنگری کهن		استان / شهرستان: قزوین / البرز	
<u>سوال</u>			
سه بردار $\vec{a} = (1, -1, m)$ و $\vec{b} = (2, n, 1)$ و $\vec{c} = (p, 3, 2)$ دو به دو بر هم عمود هستند. مقدار عبارت $m+n+p$ را تعیین کنید.			
الف) ۵-		ب) ۵	
پ) ۱۰		ت) ۱۰-	
<u>پاسخ تشریحی</u>			
گزینه ب: می‌دانیم حاصل ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم صفر است پس ضرب‌های داخلی را انجام داده و معادله تشکیل می‌دهیم سپس دستگاه تشکیل شده را حل می‌کنیم.			
$a.b = 0 \Rightarrow (1, -1, m). (2, n, 1) = 2 - n + m = 0 \Rightarrow m - n = -2$			
$a.c = 0 \Rightarrow (1, -1, m). (p, 3, 2) = p - 3 + 2m = 0 \Rightarrow p + 2m = 3$			
$b.c = 0 \Rightarrow (2, n, 1). (p, 3, 2) = 2p + 3n + 2 = 0 \Rightarrow 2p + 3n = -2$			
بعد از حل دستگاه داریم:			
$m = 14, \quad n = 16, \quad p = -25 \Rightarrow m + n + p = 5$			

سوال شماره ۳

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۱
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	

سوال

اگر $\vec{a}$ برداری به طول ۲ و $\vec{b} = (x, 1, -1)$ و حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ۴- باشد، آن گاه کمترین مقدار صحیح و مثبت عدد x کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ تشریحی

گزینه ۲ -

$$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 2}$$

بنا به نامساوی کشی - شوارتز می توان نوشت:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |-4| \leq 2\sqrt{x^2 + 2}$$

$$\sqrt{x^2 + 2} \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 4 \Rightarrow x^2 \geq 2$$

بنابراین $x \geq \sqrt{2}$ یا $x \leq -\sqrt{2}$. در نتیجه کمترین مقدار صحیح و مثبت برای عدد x برابر با ۲ است.

سوال شماره ۴

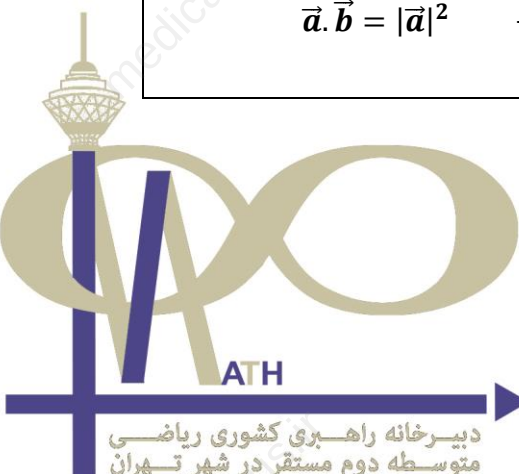
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی:	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم زهرا ملکی		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	

سوال

حاصلضرب داخلی دو بردار غیرصفر با اندازه‌های مساوی، برابر با مربع اندازه هریک از دو بردار است. زاویه بین دو بردار چند درجه است؟

پاسخ تشریحی

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 \rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = |\vec{a}|^2 \rightarrow \cos \theta = 1 \rightarrow \theta = 0$$



سوال شماره ۵			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۰/۷۵
طراح: آقای عادل آخکندی		استان / شهرستان: کردستان / دیواندره	
<u>سوال</u>			
ثابت کنید ضرب داخلی بردارها، خاصیت جابجایی دارد. $(\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a})$			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
فرض کنید بردارهای $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ داده شده باشند، در این صورت با استفاده از خاصیت ضرب اعداد حقیقی داریم:			
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$			

سوال شماره ۶			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	

سوال

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ غیرصفر باشند بطوری که $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$ ، در این صورت نشان دهید: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

پاسخ تشریحی

روش اول: $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قطرهای متوازی الاضلاع نباشده روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند و چون $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$ ، پس این متوازی الاضلاع یک لوزی است و در نتیجه $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

یعنی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم اندازه هستند.

روش دوم (استفاده از خواص ضرب داخلی دو بردار):

چون $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$ پس $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. بنابراین با دانستن این نکته که ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد $(\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a})$ می توان نوشت:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0 \rightarrow |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$$

یعنی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم اندازه هستند.

سوال شماره ۷

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی	استان / شهرستان: زنجان / زنجان		

سوال

بردارهای $\vec{a} = (1, -1, 2)$ ، $\vec{b} = (3, 2, -1)$ و $\vec{c} = (-1, 0, 5)$ مفروض‌لند. تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ در امتداد بردار $\vec{b} - \vec{c}$ را بیابید.

پاسخ تشریحی

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \vec{a} + \vec{b} = (4, 1, 1) \\ \vec{e} &= \vec{b} - \vec{c} = (4, 2, -6) \\ \vec{d} \cdot \vec{e} &= 16 + 2 - 6 = 12 \\ |\vec{e}| &= \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} \\ \vec{d}' &= \frac{\vec{d} \cdot \vec{e}}{|\vec{e}|^2} \vec{e} = \frac{12}{56} (4, 2, -6) = \left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{9}{7}\right)\end{aligned}$$

سوال شماره ۸

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: ترکیب	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۱/۵
طراح: خانم آذر کرمان	استان / شهرستان: قم / قم		

سوال

برای دو بردار a و b ثابت کنید: $|a \cdot b| \leq |a||b|$ و به کمک آن حداقل مقدار $x^2 + 4y^2 + z^2$ را با شرط $x - 4y + 3z = 5$ بیابید.

پاسخ تشریحی

$$\begin{aligned}|a \cdot b| &= |a||b||\cos\theta|, \quad |\cos\theta| \leq 1 \rightarrow |a \cdot b| \leq |a||b| \\ a &= (1, -2, 3), \quad b = (x, 2y, z) \rightarrow x - 4y + 3z \leq \sqrt{1 + 4 + 9} \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} \\ 25 &\leq 14(x^2 + 4y^2 + z^2) \rightarrow x^2 + 4y^2 + z^2 \geq \frac{25}{14}\end{aligned}$$

سوال شماره ۹

سوال شماره ۹			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم آذر کرمان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u> اگر بردار $a = (۲, -۱, -۲)$ و بردار $\vec{b}$ به طول ۱۲، موازی و غیر هم‌جهت $\vec{a}$ باشد، مولفه‌های بردار $\vec{b}$ را بدست آورید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $b = (-۲k, k, ۲k) \rightarrow b = ۳k = ۱۲ \rightarrow k = ۴ \rightarrow b = (-۸, ۴, ۸)$			

سوال شماره ۱۰

سوال شماره ۱۰			
نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: کاربرستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: خانم فاطمه جهان آرا		استان / شهرستان: قزوین / اسفرورین	
<u>سوال</u>			
اگر $\vec{a} = (۲, -۱, ۱)$ ، $\vec{b} = (-۱, ۲, ۰)$ و $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ باشند. تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را بر امتداد بردار $۲\vec{c} - \vec{b}$ بیابید.			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (۱, ۱, ۱)$			
$\vec{v} = ۲\vec{c} - \vec{b} = (۳, -۴, ۰) \rightarrow \ \vec{v}\ = \sqrt{۹ + ۱۶ + ۰} = ۵$			
$\vec{u} \cdot \vec{v} = (۱)(۳) + (۱)(-۴) + (۱)(۰) = ۳ - ۴ + ۰ = -۱$			
$\vec{u}' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\ \vec{v}\ ^۲} \vec{v} = \frac{-۱}{۲۵} \times (۳, -۴, ۰) = (-\frac{۳}{۲۵}, \frac{۴}{۲۵}, ۰)$			

سوال شماره ۱۱

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: کاربری	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۱
طراح: خانم آذر کرمان	استان / شهرستان: قم / قم		

سوال

تصویر قائم بردار $a(3, -1, 2)$ را بر امتداد بردار $b(2, 3, -2)$ بیابید.

پاسخ تشریحی

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b} = \frac{6 - 3 - 4}{4 + 9 + 4} \vec{b} = \frac{-1}{17} (2, 3, -2)$$

سوال شماره ۱۲

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی:	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۲
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

سوال

سه بردار $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{c}$ را در امتداد بردار $\vec{b} + \vec{c}$ را بدست آورید.

پاسخ تشریحی

$$\text{الف) } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = 3 + 2 - 1 = 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = (2 + 2) + (1 - 1) = 4$$

ب) تصویر قائم بردار $\vec{u} = \vec{a} + \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$ را در امتداد بردار $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ بدست می آوریم:

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{u'} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v} = \frac{8}{14} \cdot (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = \frac{12}{7}\vec{i} + \frac{8}{7}\vec{j} + \frac{4}{7}\vec{k}$$

سوال شماره ۱۳

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: آقای عادل آخکندی		استان / شهرستان: کردستان / دیواندره	

سوال

اگر $\vec{a} = (-1, -1, 2)$ و $\vec{b} = (2, 1, -1)$ و $\vec{c} = (-4, -1, 2)$ سه بردار باشند، آن گاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ را بیابید.

پاسخ تشریحی

ابتدا جمع دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را می یابیم، سپس اندازه این حاصل جمع را محاسبه می کنیم:

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, 1, -1) + (-4, -1, 2) = (-2, 0, 1)$$

$$|\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{5}$$

با توجه به رابطه تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر داریم:

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (-1)(-2) + (-1)(0) + (2)(1) = 4$$

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a'} = \frac{4}{5} (-2, 0, 1) = \left(-\frac{8}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$$

سوال شماره ۱۴

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی:	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح:		استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل	

سوال

تصویر قائم بردار $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ را در امتداد بردار $\vec{b} = 2\vec{a}$ را بدست آورید.

پاسخ تشریحی

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{24} \rightarrow \vec{b} = 2(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{12}{24} \cdot (4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

سوالات مفهومی:

هندسه ۳

پایه دوازدهم ریاضی

فصل سوم: بردارها

درس دوم

مبحث: « ضرب خارجی و ویژگی های آن »

سوالات مفهومی درس "هندسه ۳ - دوازدهم ریاضی"

درس / صفحه: درس دوم « ضرب خارجی و ویژگی های آن » صفحات ۸۲ تا ۸۴	فصل: سوم
---	----------

سوال شماره ۱

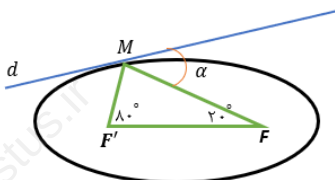
نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: کاربردی	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۵/۰
طراح: خانم زهرا هدایت فر		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	
سوال اگر سه بردار $a=(۰,-۱,۲)$ و $b=(m,-۱,۳)$ و $c=(۴,۱,۲)$ در یک صفحه باشند، مقدار m را بدست آورید؟ الف) ۱ ب) -۱ پ) ۲ ت) -۲			
پاسخ تشریحی $b.(a \times c) = (m,-۱,۳).((۰,-۱,۲) \times (۴,۱,۲)) = ۰ \rightarrow (m,-۱,۳).(-۴,۸,۴) = ۰$ $-۴m - ۸ + ۱۲ = ۰ \rightarrow -۴m = -۴ \rightarrow m = ۱$			

سوال شماره ۲

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۵/۰
طراح: آقای محمد سعید حکیمی	استان / شهرستان: کردستان / ناحیه ۲ سنندج		

سوال

در بیضی مقابل خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. اندازه α کدام است؟



۸۰° (۱) ۵۰° (۲) ۲۰° (۳) ۴۰° (۴)

پاسخ تشریحی

گزینه ۲ - زیرا: $\widehat{FMF'} = 80^\circ$ بنابراین: $2\alpha + 80 = 180$ و در نتیجه: $\alpha = 50^\circ$

سوال شماره ۳

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح: آقای مجید رستمی		استان / شهرستان: همدان / قهاوند	

سوال

اگر $|a| = 4$ ، $|b| = 2$ و $a \cdot b = 2\sqrt{7}$ باشد مساحت مثلثی که توسط بردارهای a و b ساخته می‌شود، کدام است؟

- الف) ۲ ب) ۳ پ) ۴ ت) ۵

پاسخ تشریحی

گزینه ب:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

در نتیجه:

$$28 + |a \times b|^2 = 16 \times 4$$

$$\Rightarrow |a \times b|^2 = 36 \Rightarrow |a \times b| = 6 \Rightarrow S = \frac{1}{2} |a \times b| = 3$$

روش دوم:

$$a \cdot b = 2\sqrt{7} \rightarrow 2 \times 4 \times \cos\theta = 2\sqrt{7} \rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\rightarrow \sin\theta = \frac{3}{4} \rightarrow S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{3}{4} = 3$$

سوال شماره ۴

نوع سوال: پاسخ گزین؛ چندگزینه‌ای	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۰/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	

سوال

به ازای کدام مقدار k ، بردارهای $\vec{a} = (-2, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (k, -1, -2)$ و $\vec{c} = (-2, 0, -2)$ در یک صفحه قرار می‌گیرند؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) -۱

پاسخ تشریحی

گزینه ۳ - سه بردار در یک صفحه قرار دارند اگر و فقط اگر حجم متوازی السطوحی که توسط این سه بردار ساخته می‌شوند، برابر صفر باشد، یعنی: $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 0$.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (2, 2k + 4, -2)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (-2, 1, 0) \cdot (2, 2k + 4, -2) = -4 + 2k + 4 = 2k$$

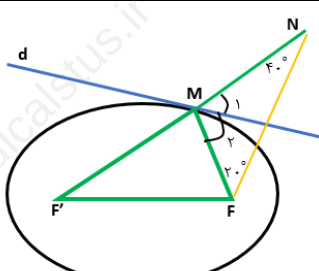
$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = 0 \Rightarrow 2k = 0 \Rightarrow k = 0$$

سوال شماره ۵			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: کاربرستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: خانم طاهره خلیلی		استان / شهرستان: قزوین / قزوین	
<u>سوال</u> اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه $\vec{a} \cdot \vec{b}$ برابر و $ \vec{a} \times \vec{b} $ برابر می شود.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $ \vec{a} \cdot \vec{b} $ - صفر			

سوال شماره ۶			
نوع سوال: جای خالی	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۰/۵
طراح:		استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل	
<u>سوال</u> جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. - حاصل $(\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j})) \times \vec{k}$ برابر است.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $(\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j})) \times \vec{k} = (\vec{i} \times \vec{k}) \times \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{i}$			

سوال شماره ۷			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۱
طراح: خانم آذر کرمان		استان / شهرستان: قم / قم	
<u>سوال</u> بردارای بیابید که بر بردارهای $a(۲, -۳, ۱)$ و $b(۱, ۲, -۵)$ عمود باشد.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $a \times b = (۱۳, ۱۱, ۷)$			

سوال شماره ۸

سوال شماره ۸			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱
طراح: آقای محمد سعید حکیمی		استان / شهرستان: کردستان / ناحیه ۲ سنندج	
<u>سوال</u> در بیضی مقابل، خط d در نقطه M بر بیضی مماس است و NM امتداد MF' است. اندازه زاویه M_1 را بیابید؟ 			
<u>پاسخ تشریحی</u> چون MN امتداد MF' است، پس خط d نیمساز زاویه NMF است. یعنی $2M_1 = 120^\circ$. بنابراین: $M_1 = 60^\circ$			

سوال شماره ۹

سوال شماره ۹			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی:	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۱
طراح: آقای مجید رستمی		استان / شهرستان: همدان / قهاوند	
<u>سوال</u> حاصل عبارت $i \times (2j - k) - 3j \times (i + j - k) + 4k \times (2i - j)$ را بیابید.			
<u>پاسخ تشریحی</u> $2(i \times j) - (i \times k) - 3(j \times i) - 3(j \times j) + 3(j \times k) + 8(k \times i) - 4(k \times j)$ $= 2k + j + 3k + 3i + 8j + 4i = 7i + 9j + 5k = (7, 9, 5)$			

سوال شماره ۱۰			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۰/۲۵
طراح:		استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل	
<u>سوال</u>			
بردارهای $\vec{a} = (۱, -۳, ۲)$ و $\vec{b} = (-۲, ۱, -۵)$ را در نظر بگیرید. آیا مقدار $\vec{a} \times \vec{b}$ با $\vec{b} \times \vec{a}$ برابر است؟			
<u>پاسخ تشریحی</u>			
خیر، چون حاصل ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$			

سوال شماره ۱۱			
نوع سوال: کوتاه پاسخ	سطح شناختی: فهمیدن	سطح دشواری: ساده	شمارک: ۰/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی		استان / شهرستان: زنجان / زنجان	
<u>سوال</u> اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند، مقدار $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ برابر است با			
<u>پاسخ تشریحی</u> بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر صفحه شامل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، پس $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ، بنابراین: $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$.			

سوال شماره ۱۲

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: خانم آذر کرمان	استان / شهرستان: قم / قم		

سوال

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دو سه بردار از فضای $\mathbb{R}^3$ باشند، ثابت کنید:

$$[(a+b) \times (b+c)].(c+a) = 2(a \times b).c$$

پاسخ تشریحی

$$\begin{aligned} [(a+b) \times (b+c)].(c+a) &= (a \times b + a \times c + b \times b + b \times c).(c+a) = \\ &= (a \times b).c + (a \times c).c + (b \times c).c + (a \times b).a + (a \times c).a + (b \times c).a = \\ &= (a \times b).c + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + (a \times b).c = 2(a \times b).c \end{aligned}$$

سوال شماره ۱۳

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: خانم آذر کرمان	استان / شهرستان: قم / قم		

سوال

اگر $a.b = -4$ و $|a| = 1$ و $|b| = 5$ باشد. مساحت مثلثی را به دست آورید که توسط دو بردار $a+3b$ و $2a-b$ ساخته می شود.

پاسخ تشریحی

$$\begin{aligned} (a+3b) \times (2a-b) &= -7a \times b \rightarrow S = \frac{7}{2} |a \times b| \\ (|a \times b|)^2 + (a.b)^2 &= |a|^2 |b|^2 \rightarrow |a \times b|^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow |a \times b| = 3 \\ S &= \frac{21}{2} \end{aligned}$$

سوال شماره ۱۴

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح: آقای جعفر زنجانی	استان / شهرستان: زنجان / زنجان		

سوال

دو نقطه $A(2, 1, 0)$ و $B(0, -3, 4)$ مفروض اند. اگر $|\vec{b}| = 15$ و $|\vec{b} \times \overrightarrow{AB}| = 75$ باشد، مقدار $|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{b}|$ را محاسبه کنید.

پاسخ تشریحی

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -4, 4) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 6$$

$$|\vec{b} \times \overrightarrow{AB}| = 75$$

$$|\vec{b}| |\overrightarrow{AB}| \sin \theta = 75 \Rightarrow 15 \times 6 \sin \theta = 75 \Rightarrow \sin \theta = \frac{5}{6}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{b}| = |\overrightarrow{AB}| |\vec{b}| \cos \theta = 15 \times 6 \times \frac{\sqrt{11}}{6} = 15\sqrt{11}$$

سوال شماره ۱۵

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: تحلیل	سطح دشواری: متوسط	شمارک: ۱/۵
طراح:	استان / شهرستان: اردبیل / اردبیل		

سوال

اگر $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 1$ باشد مقدار عددی $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{a})$ را بدست آورید.

پاسخ تشریحی

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \rightarrow 1 = 2 \times 3 \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{1}{6} \rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{35}}{6} = \sqrt{35}$$

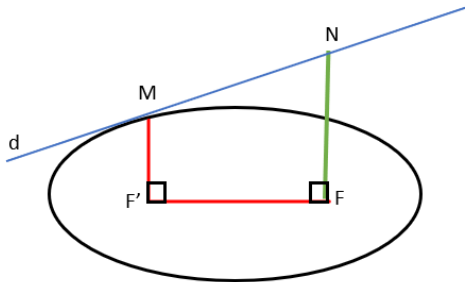
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = \sqrt{35} + 4$$

سوال شماره ۱۶

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: بکار بستن	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۱
طراح: آقای محمد سعید حکیمی		استان / شهرستان: کردستان / ناحیه ۲ سنندج	

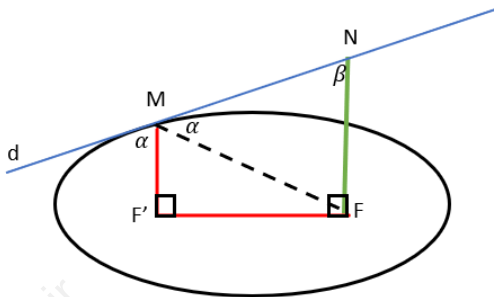
سوال

در بیضی مقابل، طول قطر بزرگ ۱۸ واحد و اندازه فاصله کانونی برابر ۱۰ واحد است. خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. مساحت دوزنقه $MNFF'$ را بیابید.



پاسخ تشریحی

طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\alpha = \beta$. پس مثلث MNF متساوی الساقین است. یعنی $MF = NF$. بنابراین $MF' + NF = 18$ ، یعنی مجموع دو قاعده دوزنقه برابر قطر بزرگ بیضی است. پس $MF' + NF = MF' + MF = 2a$. ارتفاع دوزنقه هم برابر $FF' = 10$ است. بنابراین مساحت دوزنقه برابر $14 = \frac{1}{2}(18 + 10)$ واحد مربع است.



سوال شماره ۱۷

نوع سوال: گسترده پاسخ	سطح شناختی: ترکیب	سطح دشواری: دشوار	شمارک: ۲/۲۵
طراح: خانم مرضیه شمسی	استان / شهرستان: قزوین / قزوین		

سوال

اگر داشته باشیم $|\vec{a}| = ۱۰$ و $|\vec{b}| = ۲\sqrt{۳}$ و زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۶۰ درجه باشد. آنگاه اندازه بردار $(\vec{a} + ۳\vec{b}) \times (۲\vec{a} - \vec{b})$ را بدست آورید؟

پاسخ تشریحی

$$(\vec{a} + ۳\vec{b}) \times (۲\vec{a} - \vec{b}) = ۲\vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + ۶\vec{b} \times \vec{a} - ۳\vec{b} \times \vec{b}$$

می‌دانیم: $\vec{b} \times \vec{b} = ۰$ و $\vec{a} \times \vec{a} = ۰$

و همچنین $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$(\vec{a} + ۳\vec{b}) \times (۲\vec{a} - \vec{b}) = ۲ \times ۰ + \vec{b} \times \vec{a} + ۶\vec{b} \times \vec{a} - ۳ \times ۰ = ۷\vec{b} \times \vec{a}$$

$$|(\vec{a} + ۳\vec{b}) \times (۲\vec{a} - \vec{b})| = ۷|\vec{b} \times \vec{a}| = ۷|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta$$

$$= ۷ \times ۲\sqrt{۳} \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲۱۰$$





کانال آوای موفقیت

شاد، ایتا، بله، رویکا، تلگرام

@Avaye_movafaghiyat