

Konkur Core

حسابان دوازدهم - رشته ریاضی



MEDICAL STUS

خوبیا برمیگرده

اشتراک



مدیکال پلاس

تمام آموزش‌های مدیکال، در یک اشتراک!

اشتراک MEDICAL PLUS فقط شامل محصولات آموزشی زیر است

73CORE

73 CORE



- آموزش پربازده کنگور
- به جای اتلاف وقت، برو سر اصل مطلب!
- جزوات هدفمند و به‌روز
- تدریس اسکرین رکورد
- تمرکز بر تیپ تست‌های پرتکرار

جاده نهایی



- روزی فقط ۱ ساعت برای ۲۰ نهایی
- برنامه تا خود امتحانات
- جزوه کامل و به‌روز
- فیلم آموزشی متناسب با جزوه
- تمرین + نمونه سوال + آزمون

جاده نهایی

کاملاً ویرایش شده برای ۲۰ نهایی

صد فرهنگیان



- ۲۵ ساعت آموزش کامل اختصاصی فرهنگیان
- هوش + تعلیم و تربیت + دین و زندگی
- جزوه و تدریس کامل (حدود ۲۵ ساعت)
- جزوه کامل مصاحبه (۱۰۰ صفحه)
- دسترسی به گروه VIP آزمون

مزایای اشتراک مدیکال پلاس



دسترسی کامل به سه محصول برتر آموزشی



آپدیت مداوم محتوا



دسترسی دائمی و نامحدود



پشتیبانی شروع کار (ویژه اشتراک ۳ ساله)



ضمانت عودت وجه تا ۱۴ روز



با یک اشتراک، سه محصول قدرتمند آموزشی را در اختیار شماست!



@medical_stus



medicalstus.ir



خوبیا برمیگرده





طرح‌های مشاوره

۳ سطح پشتیبانی، متناسب با نیاز تو



MENTORING

برای دانش‌آموزان
خودران و مستقل



تماس
هفتگی



گزارش
شبهانه



آزمونای مبحثی
و کویزای شبهانه



بدون
برنامه‌ریزی



اگه خودت برنامه می‌ریزی و فقط به همراه مطمئن
لازم داری تا ادامه بدی و بهتر بشی، این طرح برای تونه!



TASK PLAN

برای دانش‌آموزان
نیازمند برنامه کامل



تماس
هفتگی



گزارش
شبهانه



آزمونای مبحثی
و کویزای شبهانه



برنامه‌ریزی
شخصی



اگه می‌خوای از صفر تا صد، با یه برنامه شخصی دقیق
و منظم جلو بری و هیچ چیزی رو از دست ندی!



TASK PLAN PRO

برای دانش‌آموزان
با نیاز به پشتیبانی بالا



۲ تماس
در هفته



۲ گزارش
در روز



آزمونای مبحثی
و کویزای شبهانه



برنامه‌ریزی
شخصی



اگه می‌خوای پیشترین پیگیری و همراهی رو داشته باشی
و با قدرت و تمرکز کامل به هدفت برسی!



امکان تغییر مشاور
تغییر مشاور در صورت
نیاز، سریع و راحت



امکان خروج در صورت
کم‌کاری مشاور
اگه عملکرد مشاور رضایت‌بخش
نیود، می‌تونی خارج بشی



سیستم آزمونی مداوم
با سوالات به روز
سوالات مداوم و به‌روز متناسب
با سطح و برنامه‌ات



پشتیبانی واقعی
در کنار تو هستیم
تا به هدفت برسی



با هر طرح مشاوره، اشتراک **MEDICAL PLUS** با تخفیف ویژه در دسترسه!

سوال ۲۳

فصل اول : تابع

۱ مقدار عبارت $\frac{8x^2 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^2 - 24x + 18}$ به ازای ریشه بزرگتر معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ کدام است؟

۴ $5\sqrt{5}$

۳ $0.1\sqrt{5}$

۲ $0.5\sqrt{5}$

۱ $\sqrt{5}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲ مقدار عبارت $\frac{24x^2 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشه مثبت معادله $x^2 + x = 1$ کدام است؟

۴ $0.6\sqrt{5}$

۳ $0.3\sqrt{5}$

۲ $0.2\sqrt{5}$

۱ $0.1\sqrt{5}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۳ اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $5 - x^{14}$ بر $x^2 - x + 1$ باشد، حاصل ضرب ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ $(x \neq -1)$

۴ ۶

۳ -۶

۲ ۴

۱ -۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴ اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $[-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۴ $24/75$

۳ $23/25$

۲ $14/25$

۱ $13/75$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۵ اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = ax^2 + 7x - 1$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $[-0.7, +\infty)$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۴ $-6/35$

۳ $-5/25$

۲ $-4/55$

۱ $-3/45$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶ اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $x^4 - x^2 - 2$ بر $x^2 + x + 1$ باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ $(x \neq 1)$

۴ ۴

۳ -۲

۲ -۱

۱ صفر

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۷ تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(m^2 - 4m + 4) < f(2m^2 - 9m - 2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۴ ۶

۳ ۵

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸ تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۴ (۴) صفر

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۹ چندجمله‌ای $p(x) = x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \frac{1}{27}x^6 - \frac{1}{9}x^4 + a$ به ازای هر عدد طبیعی n ، بر $x + 3$ بخش پذیر است. باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

 $x - \frac{407}{27}$ (۴) $-x + \frac{227}{27}$ (۳) $x - \frac{227}{27}$ (۲) $-x + \frac{407}{27}$ (۱)

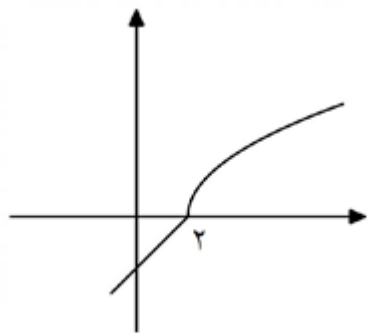
سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۰ تابع با ضابطه $y = |2x + 2| - \left| \frac{x}{2} - 2 \right|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

 $-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$ (۲) $-\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$ (۱) $-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, x \geq -\frac{2}{2}$ (۴) $-\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{2}{2}$ (۳)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۱ اگر $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج‌قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

 $-2x + 3$ (۴) $3x - 2$ (۳) $2x - 1$ (۲) $-x + 2$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳ چندجمله‌ای $p(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^6 + 3x^5 + 16a$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x + 2$ بخش پذیر است. برای $n = 1$ ، باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + 2x - 3$ کدام است؟

 $-5x + 44$ (۴) $-5x + 34$ (۳) $-15x + 14$ (۲) $-15x + 24$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۴ نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده، قرار دارد؟

- (۱) $(1 - \sqrt{5}, 0)$ (۲) $(-\sqrt{5}, 0)$ (۳) $(0, 1 - \sqrt{5})$ (۴) $(0, -\sqrt{5})$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵ فرض کنید برد تابع $f(x) = 2\sqrt{9 \cos^2(x) - 1} - 2\sqrt{1 - 9 \cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $\frac{9}{2}$ (۴) $\frac{21}{4}$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۱۶ ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

- (۱) ۰، ۲ (۲) -۱، ۱ (۳) -۱، ۲ (۴) -۲، ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۷ به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده‌ی $P(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۸ (۳) ۴ (۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۸ باقی مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب، ۸ و ۵ است. باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ ، کدام است؟

- (۱) $-x + 4$ (۲) $x + 3$ (۳) $2x + 6$ (۴) $2x - 3$

سراسری - ریاضی - ۹۹

۱۹ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۰ به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a + 3)x - 1$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

- (۱) $a < -9$ (۲) $a < -3$ (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۱ نمودار منحنی $y = \sqrt{4 - x}$ را k واحد در راستای قائم و $k - 2$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه‌ی برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها، کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) ۲

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۲۲ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^2 - 5x - x + m$ ، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور xها کدام است؟

3 و $-\frac{1}{2}$ (۴)

$-\frac{3}{2}$ و -1 (۳)

1 و $-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ و -1 (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۳ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ ، در بالای محور xها است؟

$1 < a < 2$ (۴)

$a > 2$ (۳)

$a > 1$ (۲)

$a < -1$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

سوال ۴۰

فصل دوم : مثلثات

۲۴ معادله مثلثاتی $\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \text{Cotg}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۵ معادله مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۴ تیرماه

۲۶ اگر $\tan(\alpha + 25^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $\text{Cotg}(35^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{3}}{15}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۷ اگر $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\text{Cotg}(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟

$\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (۴)

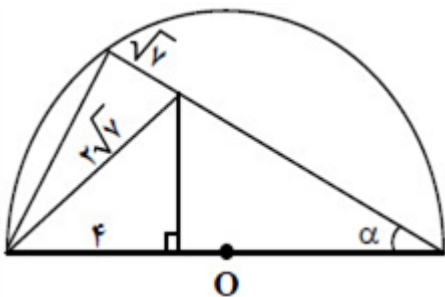
$\frac{\sqrt{3}}{15}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۲)

$5\sqrt{3}$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۴ تیرماه

۲۸ در نیم‌دایره شکل مقابل، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



$\frac{1}{5}\sqrt{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (۱)

سراسری - ریاضی - اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۹) مجموع جواب‌های معادله $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

$\frac{9\pi}{4}$ (۴)

$\frac{7\pi}{4}$ (۳)

$\frac{5\pi}{2}$ (۲)

$\frac{3\pi}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۳۰) تعداد جواب‌های معادله $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری - ریاضی - تیرماه ۱۴۰۳

۳۱) مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-2\pi, \pi]$ کدام است؟

-4π (۴)

-2π (۳)

$-\pi$ (۲)

صفر (۱)

سراسری - ریاضی - اردیبهشت ۱۴۰۳

۳۲) در معادله مثلثاتی $3 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ اگر $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

-3 (۴)

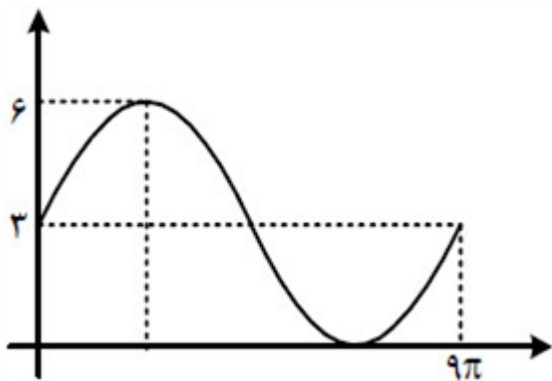
۳ (۳)

$-\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۳۳) اگر شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{2\pi}{4}\right)}$ باشد، مقدار $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ کدام است؟



۵ (۴)

$4/75$ (۳)

$4/5$ (۲)

۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۳۴) در یک مثلث، زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر α است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α کدام است؟

$\frac{\pi}{4}$ (۴)

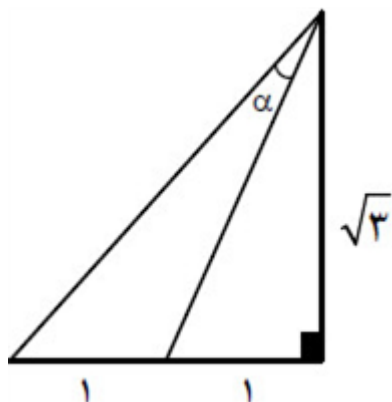
$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{2\pi}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۳۵ در شکل مقابل، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



$\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۲)

$\frac{1}{5\sqrt{3}}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۳۶ در معادله مثلثاتی $m(\cos x - \sin x) - 2\sqrt{6}\sin(2x) = \sqrt{6}$ اگر $m(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۳ (۴)

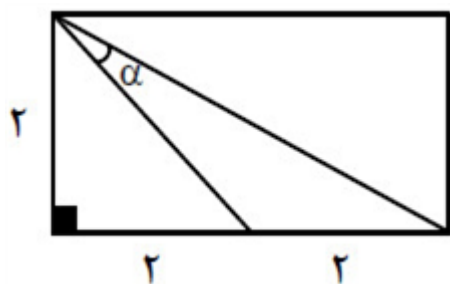
۶ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۲ تیرماه

۳۷ در شکل مقابل، مقدار $\cot \alpha$ کدام است؟



$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۲ تیرماه

۳۸ معادله $\sin x \cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x = \frac{1}{2}\cos^2 x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ ، چند جواب دارد؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

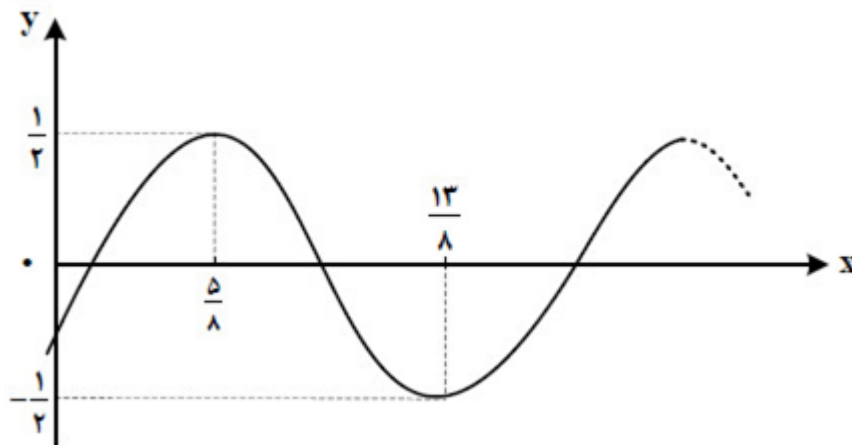
۳ (۱)

سراسری - ریاضی - رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx - c)$ را نشان می‌دهد. اگر $a > 0$ ، $b > 0$ و $0 < c < 2\pi$ باشند،

مقدار $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۳۹



۲π (۴)

1/π (۳)

1/2 (۲)

۴ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کدام

است؟

۴۰

π/4 (۴)

2π/3 (۳)

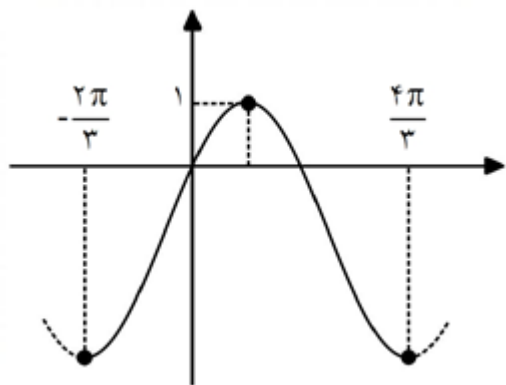
π/3 (۲)

π/2 (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

شکل مقابل، قسمتی از نمودار $y = a + b \cos\left(cx - \frac{\pi}{3}\right)$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c - a)$ کدام است؟

۴۱



۶ (۴)

۴ (۳)

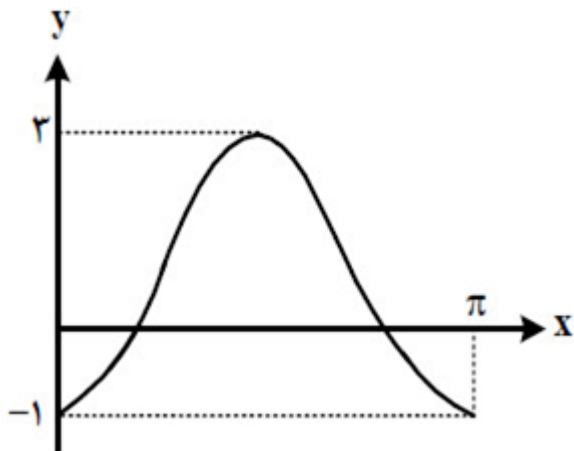
۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۴۲ اگر شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$ باشد، اختلاف صفرهای

تابع f در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟



$\frac{2\pi}{3}$ (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{6}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۳ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{5\pi}{4}$ (۴)

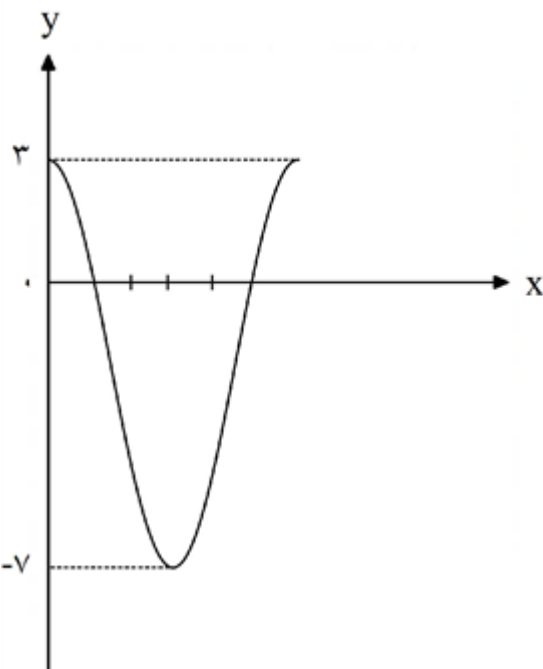
$\frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{3\pi}{2}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۴ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos x + b$ را نشان می‌دهد. مقدار $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟



$-\frac{11}{2}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{11}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۵) مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2}$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{11\pi}{6}$ (۴)

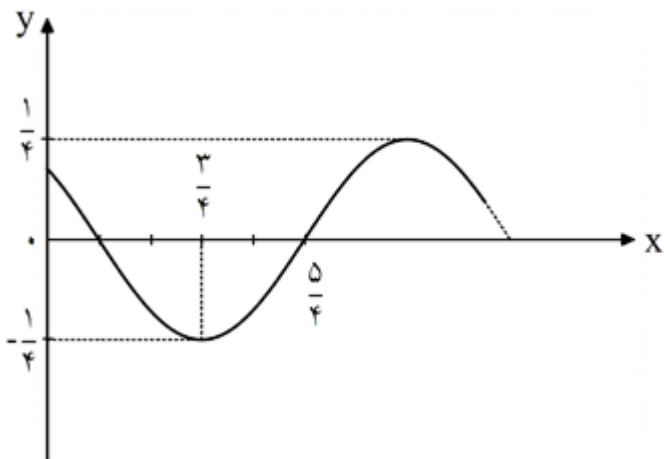
$\frac{9\pi}{4}$ (۳)

$\frac{7\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۴۶) شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > 0$ و $0 < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



π (۴)

$\frac{1}{4\pi}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۴۷) فرض کنید تابع f به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ نسبت به خطوط $x = 1$ و $x = 3$ متقارن باشد. کدام عبارت زیر درست است؟

(۲) f تابعی زوج است.

(۱) f تابعی فرد است.

(۴) f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۴ است.

(۳) f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲ است.

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۸) تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha)) = \frac{1}{8}$ در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۰ (۲)

۷ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۹) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin(x) \cos(2x) + \sin(x) = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{7\pi}{2}$ (۴)

3π (۳)

$\frac{5\pi}{2}$ (۲)

2π (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۰) فرض کنید A مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$ در بازه‌ی $[0, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعه‌ی A ، کدام است؟

$\frac{8}{9}\pi$ (۴)

$\frac{7}{9}\pi$ (۳)

$\frac{6}{7}\pi$ (۲)

$\frac{5}{7}\pi$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۵۱) اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ ، کدام است؟

۹۱
۱۰۵ (۴)

۱۶
۱۰۵ (۳)

-۱۶
۱۰۵ (۲)

-۹۱
۱۰۵ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۵۲) جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$ ، کدام است؟

$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۲)

$x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ (۱)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, K \in \mathbb{Z}$ (۴)

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, K \in \mathbb{Z}$ (۳)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۳) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\tan(3x) \tan(x) = 1$ ، در بازه‌ی $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

$\frac{11\pi}{2}$ (۴)

$\frac{9\pi}{2}$ (۳)

6π (۲)

5π (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۵۴) دوره‌ی تناوب تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{Cotg}(\pi x)$ ، کدام است؟

π (۴)

۲ (۳)

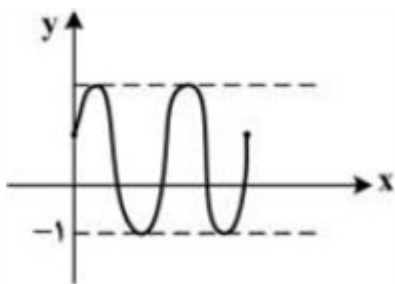
۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۵) شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ ، در بازه $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ است.

$a + b$ کدام است؟



۶ (۴)

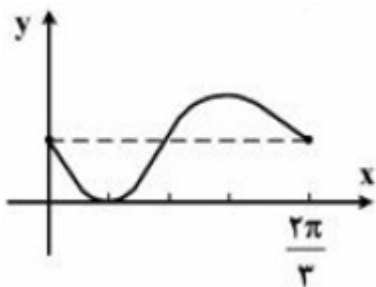
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۶ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟



۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

صفر (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۵۷ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ ، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

$\frac{7\pi}{4}$ (۴)

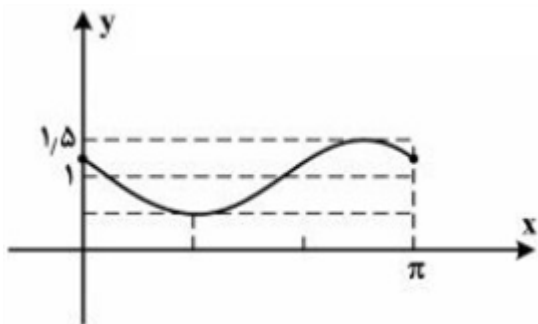
$\frac{3\pi}{2}$ (۳)

$\frac{5\pi}{4}$ (۲)

$\frac{3\pi}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۵۸ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟



۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۵۹ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ ، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

4π (۴)

$\frac{7\pi}{2}$ (۳)

3π (۲)

$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۰ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan^3 x$ ، به کدام صورت است؟

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (۴)

$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ (۳)

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (۲)

$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۱ جواب کلی معادلهی مثلثاتی $\sin 4x \cos 2x = \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad \text{۴}$$

$$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \quad \text{۳}$$

$$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \quad \text{۲}$$

$$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۲ جواب کلی معادلهی مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ ، کدام است؟

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{6} \quad \text{۴}$$

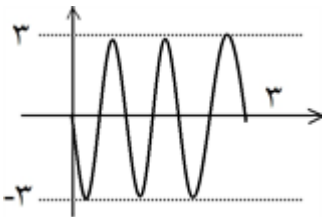
$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad \text{۳}$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{۲}$$

$$k\pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۳ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. a ، b کدام است؟



$$6 \quad \text{۴}$$

$$4/5 \quad \text{۳}$$

$$-3 \quad \text{۲}$$

$$-6 \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

سوال ۳۰

فصل سوم : حد های نامتناهی

۶۴ اگر $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^+} \frac{[-x] + a}{\left|\frac{\sqrt{x}}{x} + a\right| + a} = -\infty$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

$$-4 \quad \text{۴}$$

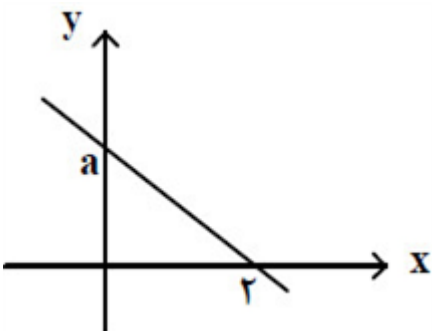
$$-3 \quad \text{۳}$$

$$-2 \quad \text{۲}$$

$$-1 \quad \text{۱}$$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیر صحیح a کدام است؟



$$2\sqrt{2} \quad \text{۴}$$

$$-1 + \sqrt{2} \quad \text{۳}$$

$$1 + \sqrt{2} \quad \text{۲}$$

$$\sqrt{2} \quad \text{۱}$$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۴ تیرماه

۶۶ اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a}\right]$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۶۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\text{Cotg } x}{[x - \pi]}$ کدام است؟

$-\infty$ (۴)

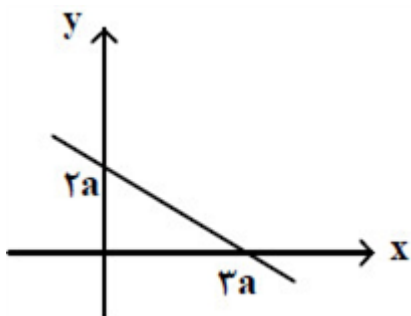
$+\infty$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۶۸ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x)}{x |f^{-1}(x)|}$ کدام است؟



$-\frac{4}{27}$ (۴)

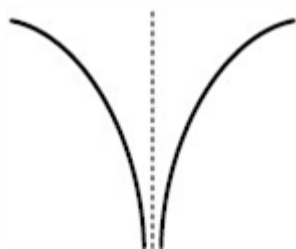
$-\frac{8}{9}$ (۳)

$-\frac{8}{27}$ (۲)

$-\frac{4}{9}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۹ نمودار تابع $f(x) = \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{(x + a)(mx - 2)}$ در همسایگی $x = -a$ به صورت شکل مقابل است. اگر $y = -4$ مجانب افقی تابع f باشد، مقدار a کدام است؟



۴ (۴)

۲ (۳)

-۴ (۲)

-۲ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۷۰ برای چند مقدار a تابع $f(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{ax^2 + (a - 2)x + 4}$ یک مجانب قائم دارد؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۱ برای چند مقدار a ، تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (1 - a)x + a + 1}$ یک مجانب قائم دارد؟

۷ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۷۲ تابع $f(x) = \frac{|x| + |a|x}{|2x-1| + b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر $y = \alpha$ و $y = 2\alpha$ مجانب‌های افقی

و $x = \beta$ و $x = 2\beta$ مجانب‌های قائم باشند، کدام مورد برابر b است؟

۴ $-2|a|$

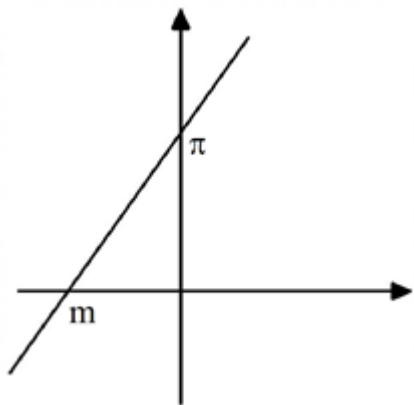
۳ $2|a|$

۲ $|a|$

۱ $-|a|$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۳ شکل مقابل، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



۴ $-\pi\sqrt{\pi}$

۳ $-\frac{1}{\pi}$

۲ $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

۱ $-\sqrt{\pi}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۷۴ نقطه $A\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار $y = \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

۴ ۱

۳ $\frac{1}{4}$

۲ $\frac{3}{4}$

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۵ اگر $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f - g$ کدام است؟

۴ $(1, 0)$

۳ $(3, 1)$

۲ $(-3, 0)$

۱ $(-1, 1)$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۷۶ تابع $f(x) = \frac{|ax+1| + 2x}{|x| + b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشه مخرج با یکی از حدهای

تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

۴ $\frac{1}{4}$

۳ $-\frac{1}{2}$

۲ ۱

۱ -3

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۷ اگر تابع $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{(x-a)(4x^2 - 4x + 1)}$ فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۷۸ مقدار $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \frac{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x + \left[\frac{2}{x^2}\right]}$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۷۹ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{(a^2x^2 - 1)(a^4x^4 - 1) \dots (a^{100}x^{100} - 1)}}{a^{49}x^k - 1} = -1$ ، آن‌گاه مقدار a و k ، کدام‌اند؟

- ۱) $k = 51, a = -1$ ۲) $k = 51, a = 1$ ۳) $k = 49, a = -1$ ۴) $k = 49, a = 1$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۸۰ تابع $f(x) = \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{ax^3 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b ، کدام‌اند؟

- ۱) $a = 0, b = 2$ ۲) $a = 8, b = 10$ ۳) $a = -2, b = 0$ ۴) $a = -8, b = -6$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۸۱ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{2}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱) $-\infty$ ۲) صفر ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $+\infty$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۸۲ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$ فقط یک مجانب قائم $x = 2$ دارد. اگر $f(3) = 6$ باشد، معادله‌ی مجانب افقی آن، کدام است؟

- ۱) $y = -1$ ۲) $y = -\frac{1}{2}$ ۳) $y = \frac{1}{2}$ ۴) $y = \frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۳ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ ، کدام است؟

- ۱) $+\infty$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۰ ۴) $-\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۴ نمودار تابع $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$ دارای خط های مجانب $y = -1$ ، $x = -2$ و $x = 1$ است. $f(-1)$ کدام است؟

-۱/۵ (۴)

۱/۷۵ (۳)

۱/۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۸۵ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

-۱ (۴)

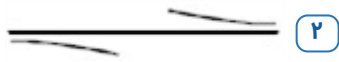
-۱/۳ (۳)

۱/۳ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۸۶ نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ نسبت به مجانب افقی خود، در بی نهایت کدام وضع را دارد؟



(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8})$ کدام است؟

 ∞ (۴)

۴ (۳)

صفر (۲)

-۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ کدام است؟

 $+\infty$ (۴)

صفر (۳)

-۱/۲ (۲)

 $-\infty$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

 $+\infty$ (۴) $-\infty$ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x + 19}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right)$ کدام است؟

۲/۳ (۴)

۲/۵ (۳)

-۲/۳ (۲)

-۴/۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۲) اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x = -2$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۳) در تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$ کدام است؟

موجود نیست. (۴)

$-\infty$ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

سوال ۶۳

فصل چهارم : مشتق

۹۴) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x^2} & x \geq 1 \\ b + c\sqrt{x^2} & x < 1 \end{cases}$ در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $\frac{ab}{c^2}$ کدام است؟ ($c \neq 0$)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۵) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2} & x < 1 \\ b\sqrt{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$ در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۴ تیرماه

۹۶) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 2x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی R مشتق‌پذیر است. مقدار $a^2 + b - c$ کدام است؟

$(a - 1)^2 + 1$ (۴)

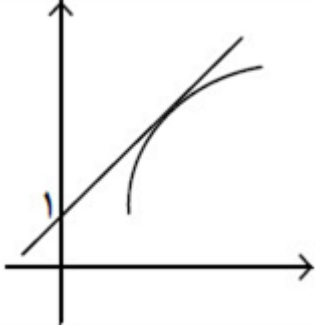
$(a - 1)^2 - 1$ (۳)

$(a + 1)^2 + 1$ (۲)

$(a + 1)^2 - 1$ (۱)

سراسری - ریاضی - اردیبهشت ۱۴۰۴

۹۷ نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $(3, 5)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f'(3)$ کدام است؟



$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۹۸ اگر $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}}$ باشد، مقدار $g'(1) - 2f'(1)$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۹۹ به ازای چند مقدار صحیح نامنفی m ، یک نقطه گوشه‌ای برای $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۰ اگر $f(x) = \frac{27 - \sin^2 x}{9 - \sin^2 x}$ و $g(x) = \frac{3}{3 + \sin x}$ باشد، حاصل عبارت $g'(x) - 3g'(x)$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۱ به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ دارای نقطه گوشه‌ای است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

بیش از ۲ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۱۰۲ اگر $f(x) = \frac{8 + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'(x) - 2g'(x)$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۱۰۳ به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx + c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی R مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۰۴ اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۰۵ خط d موازی محور x ها، سهمی $y = x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

 $-\frac{3}{4}$ (۴) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۶ اگر $f(x) = \frac{5 \cos x}{1 - \sin x}$ و $f(x) = xg(x) - 2x + 5$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

وجود ندارد. (۴)

صفر (۳)

۷ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۷ خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

 $2/75$ (۴) $0/75$ (۳) $3/25$ (۲) $1/25$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۰۸ اگر $f(x) = \left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^2$ و $f(x) = xg(x) + 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

-۲ (۴)

-۴ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۰۹ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \frac{\pi}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در

 $x = \frac{3\pi}{8}$ است؟ $-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (۴) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۱۰ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب $\frac{\pi}{8}$ است. اگر $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $h(x) = f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + f\left(2x - \frac{23\pi}{24}\right)$ باشد، حاصل $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

۴ $-\sqrt{3}$

۳ $\sqrt{3}$

۲ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

۱ $\frac{2}{\sqrt{3}}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۱۱ در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = -\sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات، خط مماسی بر $g(x)$ رسم می‌شود. فاصله نقطه برخورد این خط با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات، کدام است؟

۴ $\frac{1}{3}$

۳ $\frac{2}{3}$

۲ $\frac{4}{3}$

۱ $\frac{5}{3}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۱۲ به ازای کدام مقدار a ، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x - 3|\sqrt{ax}$ در نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{6}$ می‌شود؟

۴ $\frac{1}{8}$

۳ $\frac{1}{2}$

۲ ۸

۱ ۲

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۱۳ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟

۴ $\frac{1}{2}$

۳ $-\frac{1}{2}$

۲ ۱

۱ -۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۴ اگر f تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$ و $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ باشد، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

۴ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۳ $\sqrt{3}$

۲ $\frac{2}{3}$

۱ $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۵ در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ ، خط مماس بر منحنی، بر خط $6y - 3x = 1$ عمود است؟

۴ $(2, 1)$

۳ $(1, 2)$

۲ $(-1, 10)$

۱ $(-2, 17)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۶ اگر $f(x) = (x - 4)\sqrt{x + 3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5 - h) - 3f(5 - h) + 2}{h(5 - h)}$ کدام است؟

۴ $-\frac{13}{15}$

۳ $\frac{5}{6}$

۲ $-\frac{5}{12}$

۱ $\frac{13}{30}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۱۷ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{3}{2}$ و $f(x) = f(x+1) + f(3x+1)$ باشد، حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

$\frac{13}{2}$ (۴)

۶ (۳)

$\frac{7}{2}$ (۲)

۳ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۱۸ در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos x$ و $g(x) = \frac{3}{2}\sin x$ در بازه $[0, \pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}$ (۴)

$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}$ (۳)

$\frac{\pi}{4} - 3$ (۲)

$\frac{\pi}{4} - 1$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۱۹ از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x) = \sqrt{x} + 2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر α زاویه‌ی حاده‌ی بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$ ، کدام است؟

$\frac{240}{289}$ (۴)

$\frac{225}{289}$ (۳)

$\frac{8}{15}$ (۲)

$\frac{7}{15}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۰ فرض کنید $f(x) = \sin^n(x^2)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1 - \cos(x))^m} = 32\sqrt{2}$ مقدار $2m + n$ ، کدام است؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۱ باقیمانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 + 2x + 1$ به ترتیب $3x + 1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2) = 3$ ، آن‌گاه مقدار باقیمانده‌ی تقسیم $P'(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

-۳ (۴)

-۴ (۳)

-۵ (۲)

-۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۲ خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(2x)| + 1$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره‌خط AB ، کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (۳)

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۲۳ فرض کنید $f(x) = \cos^2(2x) + ax^2 + b$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ ، مقدار $a + b$ ، کدام است؟

-۸ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۸ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۲۴ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که $g \circ f$ یا $f \circ g$ در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۲۵ تابع چندجمله‌ای درجه‌ی دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب -2 و $\frac{1}{2}x + 1$ باشند، کم‌ترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۲۶ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right] (x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(5) - f'(2)$ ، کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۷ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه‌ی مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه‌ی مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۸ اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ، کدام است؟

 $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۹ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x - 4}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ی $x = 4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۳۰ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه‌ی $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

 $2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$ (۴) $2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (۳) $3 + 2\sqrt{2}$ (۲) $4 + \sqrt{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۳۱) اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x})$ و $g'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ ، کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۳۲) در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$ ، چه قدر کمتر است؟

- ۱) $0/03$ ۲) $0/04$ ۳) $0/05$ ۴) $0/06$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳۳) تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x^2 - 2x|}{x}$ ، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳۴) خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است.

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳۵) اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳۶) اگر تابع f در $x = -2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه مشتق $f(x)$ در $x = -2$ ، کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳۷) تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

- ۱) $2/5$ ۲) ۳ ۳) $3/5$ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۳۸ به ازای کدام مقدار a به معادله $y = -3x + 2$ ، بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$ مماس است؟

- ۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۳۹ اگر عبارت $x^3 + ax^2 - bx + 4$ بر $(x - 1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۰ دو تابع با ضابطه های $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3}{4}x + a|x|$ مفروض اند. به ازای کدام مقدار a ، تابع $g \circ f$ در مبدأ مختصات، مشتق پذیر است؟

- ۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۱ اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ ، مقدار $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۲ اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin(\pi x)$ ، شیب خط مماس بر منحنی تابع $g \circ f$ در نقطه‌ی تلاقی آن با محور x ها، روی بازه‌ی $(0, \pi)$ کدام است؟

- ۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) ۰

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۳ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[x + \frac{1}{3}\right] + [x]$ روی بازه‌ی $(0, 2)$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۴ اگر $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x - 1} \cot \frac{\pi}{x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

- ۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) π

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 + |x|}$ در نقطه‌ی $x = \alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) تعریف نشده

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۶ اگر $f(x) = 1 - |x|$ ، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع با ضابطه‌ی $y = f(f(x))$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۷ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x^2}{x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۸ اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-x + \sqrt{1+x^2}$ ۲ (۲) $x - \sqrt{1+x^2}$ ۳ (۳) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ۴ (۴) $\sqrt{1+x^2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۹ اگر $f(x) = x + \cos^5(g(x))$ ، $g(0) = \frac{\pi}{6}$ و $f'(0) = 1$ مقدار $f''(0)$ چند برابر $g''(0)$ است؟

- ۱ (۱) $-\frac{45}{16}$ ۲ (۲) $\frac{45}{16}$ ۳ (۳) $\frac{45}{32}$ ۴ (۴) $-\frac{45}{32}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۰ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ ۲ (۲) ۱ ۳ (۳) x ۴ (۴) $\frac{1}{2}x$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۱ خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ ، بر منحنی پیوسته‌ی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = 3$ مماس است. حد عبارت

$$\frac{f^2(x) + 4(x) - 5}{3 - x}$$

وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ ۲ (۲) ۳ ۳ (۳) ۴ ۴ (۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ (۱) $3 - \sqrt{2}$ ۲ (۲) $2 - \sqrt{2}$ ۳ (۳) $2 - 2\sqrt{2}$ ۴ (۴) $3 - 2\sqrt{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۳ اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos \pi x & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ ۲ (۲) $-\frac{1}{2}$ ۳ (۳) -۱ ۴ (۴) $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۴ اگر $f'(\cdot) = g(\cdot) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ ، مقدار $f''(\cdot)$ برابر کدام است؟

۴ $5g''(\cdot) + 20$

۳ $4g''(\cdot) + 20$

۲ $5g''(\cdot)$

۱ $4g''(\cdot)$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۵ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x}; & x \geq 1 \\ ax^2 + bx; & x < 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر است. b کدام است؟

۴ ۵

۳ ۳

۲ -۱

۱ -۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۶ اگر $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x$ ، مشتق تابع $f(f(x))$ در نقطه $x = \frac{1}{3}$ ، چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

۴ $\frac{\pi^2}{4}$

۳ $\frac{\pi^2}{8}$

۲ $\frac{\pi}{4}$

۱ $\frac{\pi}{8}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

سوال ۴۳

فصل پنجم : کاربرد مشتق

۱۵۷ تابع $y = |f(x)|$ که در آن $f(x) = x(|x| + 2)$ است، چند نقطه بحرانی دارد؟

۴ صفر

۳ ۱

۲ ۳

۱ ۵

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۸ تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۴ ۲

۳ $\frac{1}{2}$

۲ $\frac{2}{3}$

۱ $\frac{3}{2}$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۴ تیرماه

۱۵۹ ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^2} |x - a|$ روی بازه $[0, a]$ برابر $1/5$ است. مقدار a کدام است؟

۴ ۱

۳ $1/5$

۲ ۲

۱ $2/5$

سراسری - ریاضی - اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۶۰ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x|x|} - x$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k

تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km + n}{k - n}$ کدام است؟

۴ ۱

۳ ۲

۲ ۳

۱ ۴

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۱ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(1 - |x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k

تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m + n + k$ کدام است؟

۴ ۳

۳ ۴

۲ ۵

۱ ۶

سراسری - ریاضی - تیرماه ۱۴۰۳

۱۶۲ خط مماس بر منحنی $y = x^2 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۰/۸ (۴)

۰/۶ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۶۳ به ازای چند مقدار صحیح m تابع $y = \frac{mx + 2}{x - 1 + m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۶۴ کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = -\sqrt{-x - [x^2]}$ از خط $x - y - 1 = 0$ کدام است؟

 $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ (۳) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۶۵ به ازای چند مقدار صحیح k ، نقطه عطف منحنی $y = \frac{k}{2}x^3 - (k + 2)x^2$ در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

صفر (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

بیش از ۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۶۶ اگر f تابع هموگرافیک و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$ باشد، کدام مورد می‌تواند محل تقاطع مجانب‌های تابع f باشد؟

 $(1, 2)$ (۴) $(-1, 1)$ (۳) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۲) $(\sqrt{\pi}, \pi)$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۶۷ کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟

 $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۳) $\frac{3\sqrt{5}}{8}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۶۸ به ازای چند مقدار صحیح و منفی k ، نقطه عطف منحنی $y = kx^3 + (k + 1)x^2$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

صفر (۴)

بیش از ۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۶۹ تابع هموگرافیک، $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)}$ است، کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim_{x \rightarrow \cdot^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۷۰ به ازای مقادیری از α ، تابع $f(x) = \frac{(1-\alpha)x-3}{x-\alpha(1+x)}$ موازی خط $y + \alpha = 0$ است. به ازای مقادیر مختلف α ، مجموع فاصله‌های مقادیر تابع f تا خط $y + \alpha = 0$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۷۱ نقطه $A(-1, 2)$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع $y = ax^2 + b|x|$ است. مقدار ab کدام است؟

-۸ (۴)

 $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{8}{9}$ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۷۲ نمودار تابع $f(x) = (m^2 + 1)x^2 + (2 - m)x - 5$ محور x ها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

 $2 - \sqrt{3}$ (۴) $2 - \sqrt{5}$ (۳) $2 + \sqrt{3}$ (۲) $2 + \sqrt{5}$ (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۷۳ تابع $f(x) = \frac{x}{1 - x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۷۴ نقاط $A(0, 0)$ و $B(1, 1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

۶ (۴)

۳ (۳)

-۶ (۲)

-۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۷۵ محل تلاقی مجانب‌های تابع هموگرافیک $y = \frac{ax+3}{(a+1)x+(a-1)}$ ، نقطه مینیمم تابع $y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

 $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳)

-۳ (۲)

۳ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۷۶ نقطه $A(-1, 1)$ اکسترمم نسبی تابع $y = x^2|x| + 3ax^2 + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

 $\frac{1}{3}$ (۴)

۳ (۳)

 $-\frac{1}{3}$ (۲)

-۳ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۷۷ فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ باشند. زاویه‌ی بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۷۸ تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$; $x \in (-2, 2)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۷۹ مجموعه‌ی مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = 3\sqrt{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

- ۱) $[-1, \infty)$ ۲) $(-\infty, \infty)$ ۳) $(-1, 0) \cup (0, \infty)$ ۴) $[-3\sqrt{3}, 0]$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۸۰ فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۱۸۱ بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 8}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) $\sqrt[2]{4} - 1$ ۳) $2\sqrt[2]{4}$ ۴) $2(\sqrt[2]{4} - 1)$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۱۸۲ کدام عبارت، برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$ درست است؟

- ۱) تابع f در بازه‌ی $(0, 1) \cup (1, \infty)$ صعودی است.
 ۲) تابع f در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, \infty)$ صعودی است.
 ۳) تابع f در بازه‌ی $(1, \infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(0, 1)$ نزولی است.
 ۴) تابع f در بازه‌ی $(1, \infty)$ نزولی و در بازه‌ی $(0, 1)$ صعودی است.

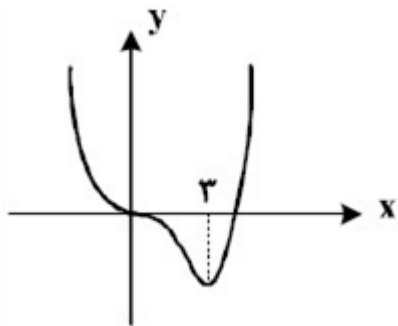
سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۱۸۳ فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{2x - x^2}{(x + 1)^2}$ از خط مجانب افقی آن، کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۸۴ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx^2$ است. $f(-2)$ کدام است؟



۴۸ (۴)

۴۰ (۳)

۳۶ (۲)

۳۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۵ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = (x-1)^2 \sqrt{x^2}$ کدام است؟

 $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^2 - 3|$ ، در چند نقطه، اکسترمم نسبی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۷ بیش‌ترین مساحت، از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن‌ها منطبق بر محور xها و دو رأس آن‌ها بر منحنی

$$y = \frac{3}{2} \sqrt{8 - x^2}$$

قرار گیرند کدام است؟

۱۲ (۴)

۹ (۳)

 $6\sqrt{2}$ (۲)

۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۸ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، در کدام بازه، صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

 $(1, +\infty)$ (۴) $(0, 1)$ (۳) $(-1, 0)$ (۲) $(-\infty, -1)$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۹ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^2 - 1|$ و دامنه‌ی $(-2, 2)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۹۰ تقعر نمودار تابع $y = x^2|x - 3|$ در بازه‌ی (a, b) به طرف yهای منفی است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

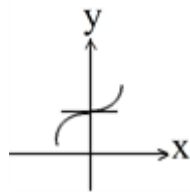
۳ (۴)

۲ (۳)

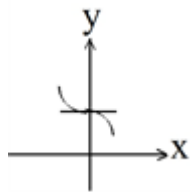
 $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

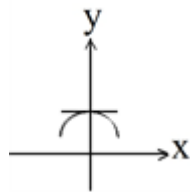
۱۹۱ نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$ در نزدیکی نقطه $x = 0$ چگونه است؟



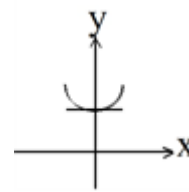
۴



۳



۲



۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۲ بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می‌توان توسط یک طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟

۷۲ ۴

۷۱ ۳

۷۰ ۲

۶۸ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۳ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

۸ ۴

۶ ۳

۴/۵ ۲

۴ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ ، در بازه $(1, 4)$ قرار می‌گیرد؟

-۵ < a < ۲/۵ ۴

-۵ < a < ۱/۵ ۳

-۳ < a < ۲/۵ ۲

-۳ < a < ۱/۵ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۵ به ازای کدام مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ، دارای ماکزیمم نسبی است؟

هیچ مقدار a ۴

a > ۰ ۳

a < ۰ ۲

|a| > ۲ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۶ بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

۹۸۸ ۴

۹۷۸ ۳

۹۶۸ ۲

۹۵۸ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۷ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ بر روی دامنه‌ی خود، کدام است؟

بی‌شمار ۴

۲ ۳

۱ ۲

صفر ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۸ تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

ماکسیمم نسبی ۲

می‌نیمم نسبی ۱

فاقد اکسترمم نسبی ۴

می‌نیمم نسبی و ماکسیمم نسبی ۳

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۹ طول نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & ; x < 1 \\ \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، در صورت وجود، کدام است؟

۴ فاقد عطف

۳ ۱

۲ صفر

۱ -۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱

$$\text{عبارت} = \frac{(2x - 3)^2}{2(2x - 3)^2} = \frac{2x - 3}{2} = \frac{3 + \sqrt{5} - 3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 0.5\sqrt{5}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲

$$\frac{3(8x^2 + 12x + 6x + 1)}{((2x + 1)^2)^2} = \frac{3(2x + 1)^2}{(2x + 1)^2} = \frac{3}{2x + 1}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Delta = (1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{ریشه مثبت} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3}{2\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 1} = \frac{3}{\cancel{2} + \sqrt{5} \cancel{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5} = 0.6\sqrt{5}$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \\ x^2 = x - 1 \end{cases}$$

طرفین را در $x + 1$ ضرب می‌کنیم.

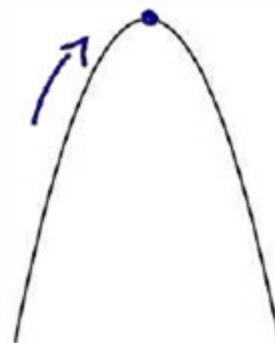
$$P(x) = x^3 - 5 = (x^2)^{\circ} \cdot x^2 - 5 \Rightarrow 2(x) = (-1)^{\circ}(x - 1) - 5 = -x + 1 - 5 \Rightarrow r(x) = -x - 4$$

$$(-1)(-4) = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{a}{1} = 2/5 \Rightarrow a = 25$$

$$y_s = y_{(2/5)} = -5 \times 6/25 + 25 \times 2/5 - 8 = 22/25$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵



$$x_s = -\frac{v}{2a} = -0.7 \Rightarrow -\frac{v}{2a} = -\frac{v}{1} \Rightarrow a = 5$$

$$y_s = 5(-0.7)^2 + 7(-0.7) - 1 = 2/45 - 4/9 - 1 = -3/45$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶

$$2 - x^{14} = (x^2 + x + 1)Q(x) + r(x) \Rightarrow (x-1)(2 - x^{14}) = \underbrace{(x^2 - 1)}_{\cdot} Q(x) + (x-1)r(x)$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x^2)^7 = 1 \Rightarrow x^{14} = x^2 \Rightarrow (x-1)(2 - x^2) = (x-1)r(x)$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}^{-1} + x^2 + 2x - 2 = (x-1)r(x) \Rightarrow \cancel{(x-1)}(x+3) = \cancel{(x-1)}r(x) \Rightarrow r(x) = (1)x + 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷

$$f(2m^2 - 9m - 2) < f(m^2 - 4m + 4) \xrightarrow{\text{صعودی}} 2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4$$

$$\Rightarrow m^2 - 5m - 6 < 0 \Rightarrow (m-6)(m+1) < 0 \Rightarrow -1 < m < 6$$

$$-1 < m < 6$$

$$\left. \begin{array}{l} m^2 - 4m + 4 > 0 \Rightarrow (m-2)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 2 \\ 2m^2 - 9m - 2 > 0 \Rightarrow m < \frac{9-\sqrt{97}}{4}, m > \frac{9+\sqrt{97}}{4} \end{array} \right\} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دامنه تابع $(-\infty, 0)$ است. حال چون اکیداً نزولی است باید رابطه زیر برقرار باشد. ۸

$$-m^2 + 2m - 3 < m^2 - m - 5 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 = (2m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow m > 2 \text{ یا } m < -\frac{1}{2} \\ m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر m برابر $\left(2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ است که این مجموعه فقط شامل $m = -1$

است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹

$$p(-3) = 0 \Rightarrow \underbrace{(-3)^{2n-1} + 3(-3)^{2n-2}}_{\cdot} + \frac{1}{27}(-3)^6 - \frac{1}{9}(-3)^4 + a = 0 \Rightarrow a = -27 + 9 \Rightarrow a = -18$$

$$\begin{cases} p(1) = 1 + 3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - 18 = a + b \\ p(-1) = -1 + 3 + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - 18 = -a + b \end{cases} \rightarrow 2 = 2a \Rightarrow a = 1, b = -\frac{407}{27}; R(x) = x - \frac{407}{27}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰

$$\xrightarrow{x \leq -1} y = -2x - 2 + \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x - 4 \xrightarrow{y \geq -\frac{5}{2}} f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$$

۱۱) گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(f(g(x+2))) = 0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(g(x+2)) = 2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}g(x+2) - 1 \right| = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}g(x+2) - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} g(x+2) = -2 \\ \text{یا} \\ g(x+2) = 6 \end{cases}$$

انتقال افقی، تعداد ریشه‌ها را تغییر نمی‌دهد و با توجه به نمودار که تابع g با دامنه R اکیداً صعودی است. هر کدام از معادلات بالا یک جواب دارد.

۱۲) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به گزینه‌ها، خارج قسمت را باید درجه یک بگیریم. خارج قسمت را $\alpha x + \beta$ در نظر

می‌گیریم و داریم:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(\alpha x + \beta) + x + 2$$

$$\begin{cases} f(1) = 1 \cdot (\alpha + \beta) + 3 = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 10 \\ f(-1) = 2(-\alpha + \beta) + 1 = 11 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \beta = 3, \alpha = -2$$

خارج قسمت $3 - 2x$ است.

۱۳) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$p(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^6 + 3x^5 + 16a \xrightarrow{n=1} p(-2) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$p(x) = x^6 + 3x^5 + x^4 + 2x^3 + 32$$

$$p(x) = (x^2 + 2x - 3)Q(x) + R(x) \xrightarrow{x=1} p(1) = R(1) = 39$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 1$ برابر ۳۹ میشود: $-5x + 44$

۱۴) گزینه ۳ پاسخ صحیح است. منحنی اولیه را k واحد در راستای قائم جابه‌جا می‌کنیم و نمودار تابع $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} + k$

حاصل می‌شود. اگر این نمودار، نمودار وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند، یعنی خط $y = x$ را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کرده است، پس نقطه‌ی تقاطع به صورت $(1, 1)$ است که مختصات این نقطه در ضابطه‌ی جدید صدق

$$\xrightarrow[\substack{x=1 \\ y=1}]{\text{می‌کند:}} 1 = \sqrt{\sqrt{1+3} + k} = 2 + k \Rightarrow k = -1$$

پس ضابطه‌ی تابع جدید $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1$ است. حال داریم:

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -\sqrt{\sqrt{x} + 3} + 1 \xrightarrow{\text{واحد به سمت چپ}} y = 1 - \sqrt{\sqrt{x} + 3}$$

مختصات نقطه‌ی $(0, 1 - \sqrt{5})$ در ضابطه‌ی این تابع صدق می‌کند.

$$f(x) = 2\sqrt{9\cos^2(x)-1} - 2\sqrt{1-9\cos^2(x)}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{9\cos^2 x - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{9\cos^2 x - 1} = t \quad -1 \leq t \leq 2$$

$$f(t) = 2^t - 2^{-t} \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

تابع 2^t اکیداً صعودی است.

تابع 2^{-t} اکیداً نزولی است.

تابع -2^{-t} اکیداً صعودی است.

یعنی $2^t - 2^{-t}$ اکیداً صعودی است.

$$-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$f(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{15}{4}$$

$$b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4} + \frac{6}{4} = \frac{21}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با کمک ترسیم قرینه نسبت به مبدأ مختصات و انتقال روی محور عرض‌ها داریم: ۱۶

$$y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y = -(-x-1)^2 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = -(-x-1)^2 + 4$$

$$-(-x-1)^2 + 4 = (x-1)^2 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $p(x)$ را به صورت روبه‌رو در نظر گرفته و شروع به حل می‌کنیم: ۱۷

$$p(x) = (2x-1)Q(x)$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = 1$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2) = 22 - 56 + 8 + 6 = -10$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ و $2x+1$ به ترتیب ۸ و ۵ است، به معنای آن است که: ۱۸

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \text{ و } p(1) = 8$$

$$p(x) = (2x^2 - x - 1)q(x) + ax + b$$

$$p(1) = 8 \Rightarrow a + b = 8$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \Rightarrow -\frac{1}{4}a + b = 5 \Rightarrow a = 2, b = 6 \Rightarrow R = 2x + 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 + 4a(1-a) < 0 \Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0 \\ \Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a+2)(a-3) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \cap (2) \rightarrow a < -2$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ > 0 \text{ حاصل ضرب دو ریشه} \\ < 0 \text{ مجموع دو ریشه} \end{cases}$$

$$\Delta = (a+3)^2 - 4a(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \Rightarrow a > -1 \text{ یا } a < -9 \quad (1)$$

$$> 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (2)$$

$$< 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-(a+3)}{a} < 0 \Rightarrow a > 0 \text{ یا } a < -3 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow a < -9$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$\sqrt{4-x} \xrightarrow[\text{راستای واحد}]{\text{واحد در } k} \sqrt{4-x+k} \xrightarrow[\text{در جهت افق}]{\text{واحد } k-2} \sqrt{4-(x-(k-2))+k}$$

$$\sqrt{-x+k+2+k}$$

وارون خود را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند یعنی (۱, ۱) در تابع صدق می‌کند:

$$\sqrt{-1+k+2+k} = 1 \Rightarrow \sqrt{k+1} = 1-k$$

$$1-k \geq 0 \Rightarrow k \leq 1$$

$$k+1 = k^2 - 2k + 1 \Rightarrow k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k(k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow k=0$$

$$\sqrt{-x+2-1} = 0 \Rightarrow \sqrt{-x+2} = 1 \Rightarrow -x+2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - 5x^2 - x + m$ ، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. پس: ۲۲

$$f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x^2 - x + 6$$

بنابراین با توجه به این‌که یکی از ریشه‌های این تابع $x = 2$ است، بنابراین $f(x)$ بر $x - 2$ بخش پذیر است. با تقسیم

$f(x)$ بر $x - 2$ ، خارج قسمت تقسیم $2x^2 - x - 3$ می‌شود. بنابراین:

$$f(x) = (x-2)(2x^2 - x - 3)$$

به این ترتیب ریشه‌های دیگر f (غیر از $x = 2$) از معادله $2x^2 - x - 3 = 0$ به دست می‌آید:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(2x-3) = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{3}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ ۲۳

شرط این که نمودار تابع درجه‌ی ۲، f بالای محور xها باشد، این است که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت باشد.

$$a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$\Delta' = (\sqrt{2})^2 - a(a-1) = 2 - a^2 + a \xrightarrow{\Delta' < 0} 2 - a^2 + a < 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) > 0 \Rightarrow a < -1 \text{ یا } a > 2$$

با توجه به شرط $a > 1$ پس $a > 2$ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۴

$$\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan(-\pi + 2x) = 0 \Rightarrow \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan(2x) = 0 \Rightarrow \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan(-2x)$$

$$\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = k\pi - 2x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{3k\pi}{15} + \frac{\pi}{15} \Rightarrow x = \frac{\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{7\pi}{15}, \frac{10\pi}{15}, \frac{13\pi}{15}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۵

$$\tan 5\pi = \tan \pi = 0$$

$$\tan 3x = -\tan 2x \Rightarrow \tan 3x = \tan(-2x) \Rightarrow 3x = k\pi + (-2x) \Rightarrow 5x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5}$$

$$k = 0 \rightarrow x = 0 \times$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{5} \checkmark \quad k = 2 \rightarrow x = \frac{2\pi}{5} \checkmark$$

$$k = 3 \rightarrow x = \frac{3\pi}{5} \checkmark \quad k = 4 \rightarrow x = \frac{4\pi}{5} \checkmark$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$\alpha + 25^\circ = x \Rightarrow y + x = 60^\circ \Rightarrow y = 60^\circ - x$$

$$25^\circ - \alpha = y$$

$$\Rightarrow \tan(y) = \tan(60^\circ - x) = \frac{\tan 60^\circ - \tan x}{1 + \tan 60^\circ \tan x} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

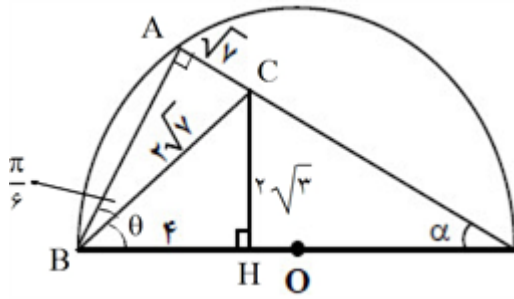
$$\Rightarrow \tan(25^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \cot(25^\circ - \alpha) = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۷

$$\left. \begin{array}{l} a = 18^\circ - \alpha \\ b = \alpha + 12^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = 30^\circ \Rightarrow a = 30^\circ - b$$

$$\tan(a) = \tan(30^\circ - b) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1 + \frac{2}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{15}$$

$$\cot(a) = \frac{15}{\sqrt{3}} = 15 \frac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3} \Rightarrow \cot(18^\circ - \alpha) = 5\sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۸

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\sqrt{v}}{r\sqrt{v}} = \frac{1}{r} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$$

$$CH = \sqrt{(r\sqrt{v})^2 - r^2} = \sqrt{28 - 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow \cotg \alpha = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \cotg \alpha = \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{r} + \frac{\sqrt{3}}{r}}{1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{r}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{r}\right)}$$

$$\Rightarrow \cotg \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{r}}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{5\sqrt{3}}{r} \times r = \frac{5\sqrt{3}}{r} = \frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6} + x\right)$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} - x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{جمع} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰

$$\Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - x \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$(1 - 2 \sin^2 x) + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

جواب‌های بازه $[-3\pi, \pi]$ عبارت‌اند از $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ که مجموع آن‌ها برابر -4π است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times 2\sqrt{3}} 2 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$$

از طرفی:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \xrightarrow{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3} \Rightarrow 2 \sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{m}{3} = 1 \Rightarrow m = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۳

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{2\pi}{4}\right)} = \frac{2}{a} - b \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

برای اینکه تابع بیشترین مقدار ممکن شود باید $\cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$ شود پس:

$$\frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

برای اینکه تابع کمترین مقدار ممکن شود باید $\cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = 1$ شود پس:

$$\frac{2}{a} - b = 0 \Rightarrow b = 6$$

$$T = \frac{\pi}{|c|} = 9\pi \xrightarrow{c > 0} c = \frac{1}{9} \quad \text{از طرفی:}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 - 6 \cos^2\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 6 - 1/5 = 4/5$$

$$S = \frac{5 \times 12 \times \sin \alpha}{2} = 15 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

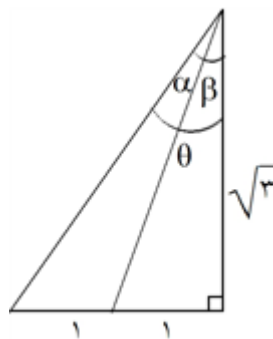
$$\text{اختلاف} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$\theta = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \theta - \beta$$

$$\tan \alpha = \tan(\theta - \beta) = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \cdot \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{2}{2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۶

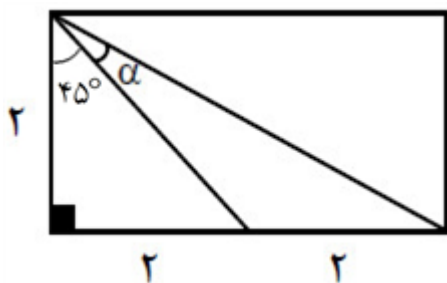
$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

حال در معادله داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$m\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) - 2\sqrt{6}\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}m = 2\sqrt{6} \Rightarrow m = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha + 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$$

و در نتیجه $\operatorname{Cotg} \alpha = 3$ است.گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۸

$$\sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \cos 2x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \sin 2x)$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow k = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow \text{معادله ۴ جواب دارد} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \otimes \end{cases}$$

راه حل دوم:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2x = \cos 2x &\Rightarrow \tan(2x) = 1 \\ -\pi \leq x \leq \pi &\Rightarrow -2\pi \leq 2x \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \text{تعداد جواب} = 2 \times 2 = 4$$

دور ۲

$$\frac{T}{2} = \frac{12}{\lambda} - \frac{5}{\lambda} \Rightarrow T = 2; T = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow 2 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c' = 0.5 \\ y_{\min} = -|a| + c' = -0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c' = 0 \\ a = 0.5 \end{cases}; \left(\frac{5}{\lambda}, \frac{1}{2}\right) \in f(x) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{5\pi}{\lambda} - c\right)$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{\lambda} - c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{\lambda}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{0.5 \times \pi}{\frac{\pi}{\lambda}} \Rightarrow \frac{ab}{c} = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴۰

$$\cos\left(\frac{17\pi}{\lambda} + x\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{\lambda} + x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{\lambda} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{\lambda} + x\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2\lambda} \xrightarrow{x \in \left[-\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda}\right]} x_1 = -\frac{\pi}{2\lambda} \\ 2x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{2\pi}{3\lambda} \xrightarrow{x \in \left[-\frac{\pi}{\lambda}, \frac{\pi}{\lambda}\right]} x_2 = \frac{2\pi}{3\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{6\pi}{2\lambda} = \frac{\pi}{\lambda}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار داده شده، نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست می‌بریم، سپس طول نقاط

را بر c تقسیم می‌کنیم، عرض نقاط را در b ضرب و با a جمع می‌کنیم.

با توجه به نمودار b و c هر دو مثبت هستند و داریم:

$$(\cdot, \cdot) \in \text{نمودار} \Rightarrow a + b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (1)$$

$$y_{\max} = a + |b| \xrightarrow{b > 0} a + b = 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} a = -1, b = 2$$

دوره تناوب هم برابر 2π است. $\frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{c} = 2\pi \Rightarrow c = 1 \Rightarrow b(c - a) = 2 \times 2 = 4$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2} \sin\left(2cx - \frac{2\pi}{2}\right)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴۲

$$f(x) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= a + \frac{|b|}{2} = 3 \\ y_{\min} &= a - \frac{|b|}{2} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, |b| = 4$$

در $x = 0$ مینیمم تابع رخ داده است. پس $b < 0$ و $b = -4$ است. دوره تناوب هم برابر π است.

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{2|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1$$

پس $f(x) = 1 - 2 \cos 2x$ است. باید معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم:

$$1 - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 2x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

اختلاف این جوابها در بازه $[0, \pi]$ برابر $\frac{2\pi}{3}$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۳

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

جوابهای بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ که مجموع آنها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۴

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + b = 3 \\ \min &= -|a| + b = -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -2, |a| = 5$$

اما تابع در $x = 0$ ماکزیمم دارد، پس $a > 0$ است.

$$\Rightarrow f(x) = 5 \cos x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۵

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{27\pi}{12} = \frac{9\pi}{4}$$

مجموع ریشه‌های قابل قبول در بازه فوق:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۶

$$\frac{T}{4} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \xrightarrow{b>} b = \pi$$

$$\max = \frac{1}{4} \Rightarrow |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{5}{4}, 0\right) \Rightarrow \frac{1}{4} \cos\left(\frac{5\pi}{4} + c\right) = 0 \Rightarrow \frac{5\pi}{4} + c = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{ac}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

پس:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط $x = k$ محور تقارن $y = f(x)$ است اگر و تنها اگر $f(k-x) = f(k+x)$ ۴۷

$$\text{محور تقارن } x = 1: f(1-x) = f(1+x)$$

$$\text{محور تقارن } x = 3: f(3-x) = f(3+x)$$

در این صورت داریم:

$$f(x) = f(1 + (x-1)) = f(1 - (x-1)) = f(2-x) = f(3 - (x+1)) = f(3+x+1) = f(4+x)$$

$$\Rightarrow f(x+4) = f(x) \Rightarrow T = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۸

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{\sin^2(4\alpha)}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{8}$$

$$\xrightarrow{\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0} \sin^2 4\alpha = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$4\alpha = k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = k\pi + \frac{\alpha}{2} \\ \text{یا} \\ 4\alpha = k\pi - \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\frac{7\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7}$$

$$\frac{9\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9}$$

$$\left. \begin{aligned} 0 < \frac{2k\pi}{7} < 2\pi &\Rightarrow 0 < k < 7 \Rightarrow \text{جواب ۶} \\ 0 < \frac{2k\pi}{9} < 2\pi &\Rightarrow 0 < k < 9 \Rightarrow \text{جواب ۸} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در مجموع ۱۴ جواب دارد.}$$

تذکر: چون $\alpha = 2\pi, \alpha = 0$ جواب نمی‌باشند، بازه باز در نظر گرفته شد.

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2 \cos^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha \quad \text{توجه:}$$

$$= 8 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha = \frac{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin^2 4\alpha}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \text{و} \quad \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta \Rightarrow \alpha = k\pi \pm \beta \quad \text{یادآوری:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۹

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b$$

توجه:

$$2 \sin x \cos(2x) = \sin(2x+x) - \sin(2x-x) = \sin 3x - \sin x$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow 2 \sin(x) \cos(2x) + \sin(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 3x - \sin x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k+1}{6}\pi$$

جوابهای بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{9\pi}{6}$ که مجموع آنها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

راه حل دوم:

$$2 \sin x \cos 2x + \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x(1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k+1}{6}\pi$$

جوابهای بازه $[0, 2\pi]$ عبارتند از $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{9\pi}{6}$ که مجموع آنها برابر $\frac{5\pi}{2}$ است.

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۰

$$2 \cos^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha \cdot 2 \cos^2 4\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow (\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{8} \frac{\sin 8\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{1}{64} \Rightarrow \sin^2 8\alpha = \sin^2 \alpha$$

$$8\alpha = k\pi \pm \alpha \Rightarrow \begin{cases} 7\alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{7} \\ 9\alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{9} \end{cases} \xrightarrow{\max} \alpha = \frac{8\pi}{9}$$

تذکر:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha &= \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin 8\alpha}{8 \sin \alpha} \end{aligned}$$

۵۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$$

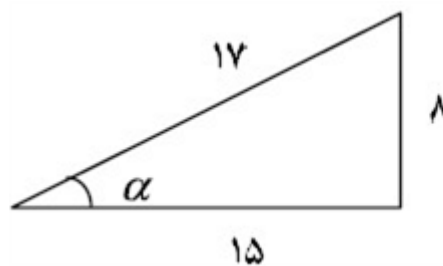
$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{15}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{136 \times 120}{15 \times 17}}{-\frac{7}{17}} = \frac{\frac{16}{15 \times 17}}{-\frac{7}{17}} = \frac{-16}{105}$$

راه حل دوم:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}} = \frac{15}{17}$$



$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

۵۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای حل معادله مثلثاتی باید ابتدا نسبت‌ها را به کمک فرمول بسط داده و ساده کنیم:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \cos x + \cos x \times \frac{1}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 2x \Rightarrow \cos x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

جواب $\frac{2k\pi}{3}$ جواب $2k\pi$ را نیز شامل می‌شود. بنابراین $\frac{2k\pi}{3}$ قابل قبول است.

۵۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\tan 3x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan 3x = \cot x \xrightarrow{\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

و جواب‌های قابل قبول در بازه داده شده عبارتند از:

$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

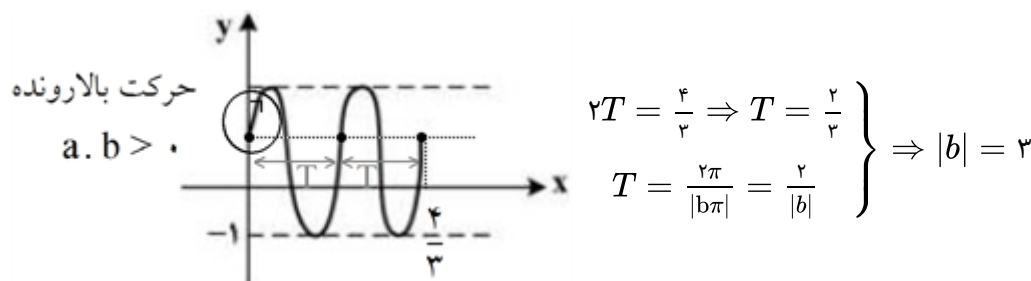
$$x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}, x_4 = \frac{7\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۴

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{Cotg}(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} - \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x)\cos(\pi x)}$$

$$= \frac{-\cos(2\pi x)}{\frac{1}{2}\sin(2\pi x)} = -2\operatorname{Cotg}(2\pi x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۵

$$\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases} \text{ هر دو جواب قابل قبول است.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۶

$$T = \frac{2n}{3}, \text{ از روی ضابطه, } T = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3$$

چون با توجه به نمودار تابع باید ابتدا Min داشته باشد، بنابراین: $m = 3$

$$\Rightarrow y = 1 - \sin(3x) \xrightarrow{x = \frac{5\pi}{6}} y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \sin 3\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

$$\sin \theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad \text{گزینه ۱ پاسخ صحیح است.} \quad \text{۵۷}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \pi - \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

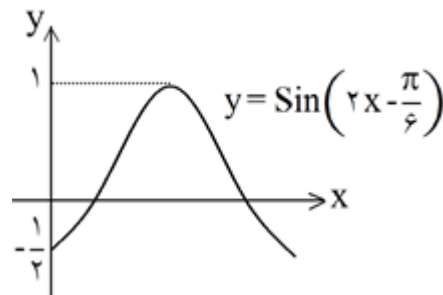
$$T = \frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۸

با توجه به نمودار بالا باید a منفی باشد، بنابراین با توجه به ماکزیمم $(1/5)$ داریم:

$$1 - a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$a + b = \frac{3}{2} \quad \text{در نتیجه:}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۹

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\left(\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\sin^2 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \text{یا} \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x_1	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$	×
x_2	×	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$2\pi - \frac{\pi}{4}$

جوابهای بین $[0, 2\pi]$

$$\text{مجموع جوابها} = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi - \frac{\pi}{4} = 4\pi$$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x \Rightarrow$$

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از تساوی‌های زیر داریم:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \text{ و } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\sin(4x + 2x) + \sin(4x - 2x)) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow \sin 6x + \sin 2x = 1 + \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 4 \sin x \cot x + \cot x \tan x$$

$$\Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x + 1)(2 \cos x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \text{ غ ق ق} \\ \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۳ است پس: $|a| = 3$

همچنین با توجه به این که تابع سه دوره تناوب طی کرده تا به ۳ رسیده، پس:

$$3T = 3 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

با توجه به این که مقدار تابع در بازه $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ نزولی است بنابراین تابع به صورت‌های زیر است:

$$y = -3 \sin 2\pi x \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = -6$$

$$y = 3 \sin(-2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = -6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $[a] = -1$

باید + باشد تا مقداری برای a حاصل شود

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{در مخرج}} \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + a \right| + a = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + a + a = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} \Rightarrow [a] = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۵

$$\begin{aligned} \text{عرض از مبدا} = a &\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{a}{2}x + a \\ \text{طول از مبدا } 2 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + a \Rightarrow \frac{a}{2}x = -y + a \Rightarrow x = -\frac{2}{a}y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{\left| 2\left(-\frac{a}{2}x + a\right) - a\left(-\frac{2}{a}x + 2\right) \right|} = 2$$

$$\text{مخرج} = \left| -ax + \cancel{2a} + 2x - \cancel{2a} \right| = |2x - ax| = |x| \times |2 - a| = -x|2 - a|$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه صورت} = -\frac{2}{a}$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه در مخرج} = -|2 - a|$$

$$\begin{aligned} \text{جواب حد} = \frac{-\frac{2}{a}}{-2|2 - a|} = 2 &\Rightarrow |2 - a| = \frac{1}{a} \Rightarrow a|2 - a| = 1 \\ \begin{cases} a \geq 2 & a(-2 + a) = 1 : a^2 - 2a - 1 = 0 \\ & \Delta = 8 \\ & a = 1 \pm \sqrt{2} \\ & a \geq 2 \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 2 & a(2 - a) = 1 \\ & -a^2 + 2a - 1 = 0 \\ & a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

غ ق ق چون گفته مقدار غیر صحیح a

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$\text{جواب} = +\infty \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{4}}{\cdot} = +\infty \Rightarrow \sqrt[3]{4} \text{ ریشه مخرج بوده} \Rightarrow x^2 + ax + b = (x - \sqrt[3]{4})^2$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2\sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16} \\ \swarrow \quad \searrow \\ a = -2\sqrt[3]{4} \quad b = \sqrt[3]{16} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{32}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{0.5} \Rightarrow \left[-\sqrt[3]{0.5}\right] = -1$$

$$x \rightarrow \pi^- \Rightarrow [x - \pi] = \left[0^-\right] = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۷

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\text{Cotg } x}{[x - \pi]} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\text{Cos } x}{(-1)\text{Sin } x} = \frac{-1}{(-1)(0^+)} = +\infty$$

۶۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = mx + 2a, f(2a) = 0 \Rightarrow 2ma + 2a = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 2a \Rightarrow f^{-1} : \frac{2}{3}x = -y + 2a \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y + 3a \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{3}{2}x + 3a$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}x + 3a\right)^2}{x \left|-\frac{2}{3}x + 2a\right|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{9}{4}x^2}{x \left|-\frac{2}{3}x\right|} \xrightarrow{x < 0} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{9}{4}x^2}{-\frac{2}{3}x^2} = -\frac{27}{8}$$

۶۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -4 \Rightarrow \frac{a^2 x^2}{(x)(mx)} = -4 \Rightarrow \frac{a^2}{m} = -4 \Rightarrow a^2 = -4m \Rightarrow m = -\frac{a^2}{4}$$

$$f(x) = \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = -\infty \Rightarrow \text{ریشه مضاعف مخرج است } x = -a$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ \text{یا} \\ x = \frac{2}{m} \end{cases} \begin{array}{l} \text{ریشه ها برابر تا} \\ \text{مضاعف شود} \end{array} \frac{2}{m} = -a \Rightarrow m = -\frac{2}{a} \Rightarrow -\frac{a^2}{4} = -\frac{2}{a} \Rightarrow a^2 = 8 \Rightarrow a = 2$$

۷۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱) مخرج خط باشد: $a = 0 \iff$ یک جواب

۲) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد $\Delta = 0 \iff$

$$\Delta = (a-2)^2 - 16a = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 - 16a = 0 \Rightarrow a^2 - 20a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

$$2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{2}{2} \\ a = -2 \end{array} \Rightarrow \text{جواب ۲}$$

۳) یکی از ریشه‌های صورت ریشه مخرج هم باشد:

$$f(x) = \frac{(x-3)(2x+1)}{ax^2 + (1-a)x + a+1}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر $x = 3$ یا $x = -\frac{1}{3}$ ، یکی از ریشه‌های مخرج با ریشه صورت ساده شده و مخرج یک ریشه خواهد داشت = یک مجانب قائم

$$x = 3 \Rightarrow 9a + 3 - 2a + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{7}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{9} + \frac{a}{3} - \frac{1}{3} + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{6}{13}$$

اگر $\Delta_{\text{مخرج}} = 0$ شود نیز، مخرج یک ریشه دارد.

$$(a-1)^2 = 4a(a+1) \Rightarrow 3a^2 + 6a - 1 = 0 \Rightarrow \text{مقدار ۲}$$

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\dots}{x+1}$$

پس به ازای ۵ مقدار، این تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |a|x}{2x - 1 + b} = \frac{1 + |a|}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + |a|x}{-2x + 1 + b} = \frac{1 - |a|}{2} \Rightarrow \frac{1 + |a|}{2} = 2 \times \frac{1 - |a|}{2} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3}$$

$$|2x - 1| = -b \xrightarrow{b < 0} \begin{cases} 2x - 1 = -b \Rightarrow x = \frac{1-b}{2} \\ 2x - 1 = +b \Rightarrow x = \frac{1+b}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1-b}{2} = 2 \times \frac{1+b}{2} \Rightarrow b = \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow b = -|a|$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۳

$$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi$$

$$\Rightarrow m^2 = \pi \xrightarrow{m < 0} m = -\sqrt{\pi}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $y = 3$ مجانب افقی و $x = -\frac{1}{4}$ مجانب قائم است. ۷۴

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx^2 + 7}{4x^2 + ax + 1} = \frac{b}{4} = 3 \Rightarrow b = 12$$

$x = -\frac{1}{4}$ هم ریشهٔ مخرب است:

$$4\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + a\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = 0 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \frac{b}{a} = 3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۵

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{4}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{1-x}{(x+3)(x-1)} = \frac{-1}{x+3}$$

خطوط مجانب این نمودار $x = -3$ و $y = 0$ هستند که نقطه تلاقی آن‌ها $(-3, 0)$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بدون شک $b < 0$ حال حدهای تابع در بینهایت: ۷۶

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|ax| + 2x}{|x|} = |a| - 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|ax| + 2x}{|x|} = |a| + 2$$

$$\xrightarrow{b < 0} \begin{cases} |a| + 2 = -b \\ |a| - 2 = b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + 2x}{|x| - 2} = -3$$

پس: $f(x) = \frac{1 + 2x}{|x| - 2}$ لذا:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-a)(2x-1)^2} \quad \text{گزینه ۱ پاسخ صحیح است.} \quad (77)$$

با توجه به این که درجه‌ی عبارت‌های صورت و مخرج برابر هستند، نمودار تابع قطعاً یک مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

پس باید فقط یک مجانب قائم داشته باشد، یعنی یکی از ریشه‌های مخرج، ریشه‌ی صورت نیز باشد.

ریشه‌های صورت ۱، $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ و $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ و ریشه‌های مخرج نیز $\frac{1}{2}$ و a هستند. بنابراین برای این که صورت و

مخرج ریشه‌ی مشترک داشته باشند، a باید برابر ۱، $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ یا $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ باشد. از طرفی اگر $a = \frac{1}{2}$ باشد، عبارت

مخرج فقط یک ریشه دارد و شرط مسئله برقرار است:

$$\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } a = \frac{1}{2} + 1 + \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} + \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر x از راست به $-\frac{1}{2}$ نزدیک شود، x^2 از چپ به $\frac{1}{4}$ و در نتیجه $\frac{1}{x^2}$ از راست به ۴ نزدیک

می‌شود. بنابراین $-\frac{2}{x^2}$ از چپ به -8 و $\frac{3}{x^2}$ از راست به ۱۲ نزدیک می‌شود پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x + \left[\frac{3}{x^2}\right]} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{16x - (-9)}{24x + 12} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{16x + 9}{12(2x + 1)} = \frac{1}{12} = +\infty$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (79)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{a^{2+4+\dots+100} x^{2+4+\dots+100}}}{a^{49} x^k} = \frac{\sqrt[n]{a^{2550} x^{2550}}}{a^{49} x^k} = \frac{-|a^{51}| x^{51}}{a^{49} x^k} = -1 \Rightarrow \begin{cases} k = 51 \\ \text{و} \\ a = 1 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: (80)

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \text{گزینه ۱} \\ \text{گزینه ۲} \\ \text{گزینه ۳} \\ \text{گزینه ۴} \end{array} \right\} \begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \frac{-2x^2 + 2}{2x + 2} \times \\ \frac{8x^2 - 10x^2 + 2}{8x^2 - 10x + 2} = \frac{8x^2 - 10x^2 + 2}{(x-1)(8x^2 + 8x - 2)} \times \\ \frac{-2x^2 + 2}{-2x^2 + 2} \times \\ \frac{-8x^2 + 6x^2 + 2}{-8x^2 + 6x^2 + 2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2}{4x^2 - 2x - 1} = \frac{(x-1)(4x^2 + x + 2)}{(x-1)(4x^2 + 4x + 1)} \checkmark \end{array} \right\} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۱

$$x < -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} < 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2} < 12 \Rightarrow \left\lfloor \frac{2}{x^2} \right\rfloor = 11 \\ \frac{-2}{x^2} > -12 \Rightarrow \left\lfloor \frac{-2}{x^2} \right\rfloor = -12 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{10x - 5 + \left\lfloor \frac{2}{x^2} \right\rfloor}{16x - \left\lfloor \frac{-2}{x^2} \right\rfloor} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x - (-12)} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{10x + 6}{16x + 12} = \frac{-5 + 6}{-8} = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به وجود فقط یک مجانب قائم در تابع یعنی مخرج دارای ریشه مضاعف است: ۸۲

$$2x^2 + bx + c = 2(x - 2)^2$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow 6 = \frac{9a + 21}{2(2 - 2)^2} \xrightarrow{b=-8, c=8} a = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 7x}{2x^2 - 8x + 8}$$

$$= \frac{-1}{2} \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن حد در بی‌نهایت و رفع ابهام حد $\frac{\infty}{\infty}$ می‌توان از حد پرتوان استفاده نمود: ۸۳

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

$$y = -1 \Rightarrow \frac{-2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۴

$$2x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-b}{2} \Rightarrow b = 2 \\ P = \frac{c}{2} \Rightarrow -2 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -4 \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{-2 - 3}{2 - 2 - 4} = \frac{5}{-4} = -1/4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۵

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n} \times 2 - \frac{2}{2^{2n}}}{2 \times 2^{2n} + 3 \times \frac{2}{2^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^{2n})^2 \times 2 - 2}{(2^{2n})^2 \times 2 + 6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cancel{(2^{2n})}}{2 \cancel{(2^{2n})}} = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۶

$$\frac{2x^2 - x - 2}{-2x^2 - 4x} \Big| \frac{x^2 + 2x}{-5x - 2} \Rightarrow y = 2 + \frac{(-5x - 2)}{x^2 + 2x}$$

$$x \rightarrow +\infty : y = 2 + 0^- < 2$$

$$x \rightarrow -\infty : y = 2 + 0^+ > 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۷

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8}) \times \frac{x - \sqrt{x^2 - 8}}{x - \sqrt{x^2 - 8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 - x^2 + 8)}{x - \sqrt{x^2 - 8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی هم‌ارزی $1 - \cos^k u \approx \frac{k}{2} u^2$ داریم، ۸۸

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 - x}{x^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حالت ابهام این حد $\frac{0}{0}$ است. ۸۹

روش اول: با استفاده از قاعده‌ی هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

روش سوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-\sqrt{1 - \sin^2 x}}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-\sqrt{1 - \sin x} \times \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x} \times \sqrt{1 - \sin x}} = \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} &= \frac{-\sqrt{2}}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

(دقت کنید که وقتی $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ ، آن‌گاه $\cos x < 0$ و در نتیجه $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$.)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حد داده شده از نوع مبهم $\infty - \infty$ می‌باشد لذا ابتدا اقدام به مخرج مشترک‌گیری از تابع می‌کنیم، داریم: ۹۰

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x + 19}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right) &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 19 + 3(x - 1)}{(x - 1)(x + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{4(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{4}{x - 1} = \frac{-4}{5} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی هم‌ارزی رادیکال در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - |x+1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - (x+1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

روش دوم: صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} &\times \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - (x^2 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2}}{-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-2x} = -1 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت داخل قدرمطلق به $+\infty$ میل می‌کند بنابراین:

$$|x^2 - 4| = x^2 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

و در نتیجه:

حال حد راست عبارت را در $x = -2$ می‌بایم.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x - 2||x + 2|}{-(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید که:

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$$

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x + 2| = x + 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^-} u = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) = \frac{-1}{\cdot^-} = +\infty \quad : u = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^-} f \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (u - \sqrt{u^2 + 1}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2 - (u^2 + 1)}{(u + \sqrt{u^2 + 1})} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{(u + \sqrt{u^2 + 1})} = \cdot$$

$$x = 1 : a = b + c \quad (*)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \begin{cases} a \times \frac{2}{r\sqrt{x}} & x \geq 1 \\ c & \cdot < x < 1 \end{cases}, f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{2}{r}a = c \quad \rightarrow$$

$$a = b + \frac{2}{r}a \Rightarrow b = \frac{1}{r}a \Rightarrow \frac{ab}{c^2} = \frac{a \times \frac{1}{r}a}{\frac{2}{9}a^2} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۹۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} a + |x| & x < 1 \\ b\sqrt{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه شکستگی ضابطه اول است} \Rightarrow$$

f در نقطه ۱ مشتق پذیر است $\rightarrow f^*$ در صفر مشتق ناپذیر است

$$a + |1| = b\sqrt{1^2} \Rightarrow a + 1 = b$$

$$0 + 1 = \frac{2}{3}b \Rightarrow 1 = \frac{2}{3}b \Rightarrow b = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$a + b = \frac{4}{2} = 2$$

$$2ab + c = 3a^2 \quad \text{شرط پیوستگی}$$

۹۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \begin{cases} 2b & x > a \\ 6x & x < a \end{cases}$$

$$f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow 2b = 6a \Rightarrow b = 3a \Rightarrow 2a(3a) + c = 3a^2 \Rightarrow c = -3a^2$$

$$a^2 + b - c = a^2 + 3a + 3a^2 = a^2 + 3a^2 + 3a = (a^2 + 3a^2 + 3a + 1) - 1 = (a + 1)^2 - 1$$

$$(0, 1), (3, 5) \in d$$

۹۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(3) = m_d = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$$

$$f'(1) - 2g'(1) = (f - 2g)'(1)$$

۹۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) - 2g(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt{x^2}} - \frac{2|x-2| + 2\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{|2x-4| - |2x-4| - 2\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{-2\sqrt{3x}^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{2}}} = -2\sqrt{3x}^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (f - 2g)'(x) = -2\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow (f - 2g)'(1) = +\frac{\sqrt{3}}{3}$$

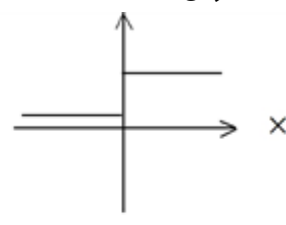
$a = \cdot$

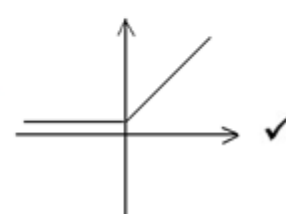
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که a گوشه‌ای است پس می‌تواند هر مقداری باشد، فرض:

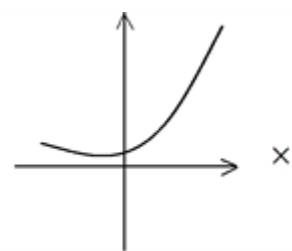
۹۹

$b = \cdot$

یک عدد ثابت است. فرض

$$f(x) = \begin{cases} \cdot & x < \cdot \\ x^m & x \geq \cdot \end{cases} \quad m = \cdot \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \cdot & x < \cdot \\ \cdot & x \geq \cdot \end{cases}$$


$$f(x) = \begin{cases} \cdot & x < \cdot \\ x & x \geq \cdot \end{cases} \quad m = 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \cdot & x < \cdot \\ x & x \geq \cdot \end{cases}$$


$$m = 2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \cdot & x < \cdot \\ x^2 & x \geq \cdot \end{cases}$$


گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۰۰

$$2g - f = \frac{\cancel{x}}{2 + \sin x} - \frac{(2 - \sin x)(\cancel{x} + 2 \sin x + \sin^2 x)}{(2 - \sin x)(2 + \sin x)} = \frac{-\sin x (2 + \sin x)}{(2 + \sin x)} = -\sin x$$

$$(2g - f)' \left(\frac{5\pi}{2} \right) = -\cos \left(\frac{5\pi}{2} \right) = -\left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تابع در $x < a$, $x \geq a$ مشتق‌پذیر است، پس نقطه گوشه $x = a$ است.

۱۰۱

$x = a \Rightarrow f(x)$ پیوسته ✓

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cdot & x < a \\ m(x - a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

$$f'_-(a) = \cdot \Rightarrow f'_+(a) \neq \cdot \Rightarrow m(a - a)^{m-1} \neq \cdot \Rightarrow m = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۰۲

$$f' \left(\frac{7\pi}{6} \right) - 2g' \left(\frac{7\pi}{6} \right) = (f - 2g)' \left(\frac{7\pi}{6} \right)$$

$$= \left(\frac{(\cancel{\cos x + 2})(\cos^2 x - 2 \cos x + 4)}{(2 - \cos x)(2 + \cos x)} - \frac{4}{2 - \cos x} \right)' = \left(\frac{\cos x (\cos x - 2)}{-(\cos x - 2)} \right)'$$

$$= -(\cos x)' = \sin x = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع باید در $x = a$ نیز مشتق پذیر باشد. پس در این نقطه در ابتدا باید پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = ab + c, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{a} = f(a) \xrightarrow{\text{پیوستگی}} ab + c = \frac{1}{a} \quad (*)$$

تابع مشتق را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} b & ; x < a \\ -\frac{1}{x^2} & ; x > a \end{cases} \Rightarrow f'_-(a) = b, f'_+(a) = -\frac{1}{a^2}$$

مشتق های چپ و راست نیز باید با هم برابر باشند:

$$b = -\frac{1}{a^2} \xrightarrow{(*)} a \left(-\frac{1}{a^2} \right) + c = \frac{1}{a} \Rightarrow c = \frac{2}{a} \Rightarrow ac = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} = \frac{1}{1} f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} = 0 \xrightarrow{x=1} f'(1) \cdot g(1) - g'(1) f(1) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = x^2 - 1$$

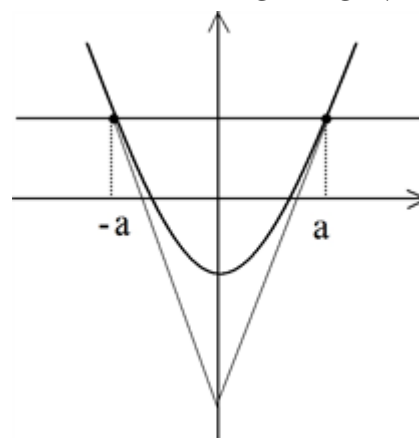
$$y' = 2x \begin{cases} 2a \\ -2a \end{cases}$$

$$2a \times (-2a) = -1$$

$$a = +\frac{1}{2} \rightarrow y = \left(+\frac{1}{2} \right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$a = -\frac{1}{2} \rightarrow y = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$\text{مجموع} = -\frac{3}{2}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} \xrightarrow{f'(x)} f'(x) = \frac{-\Delta \sin x (1 - \sin x) + \cos x (\Delta \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$f(x) = xg(x) - 2x + 5 \Rightarrow \frac{f(x) + 2x - 5}{x} = g(x)$$

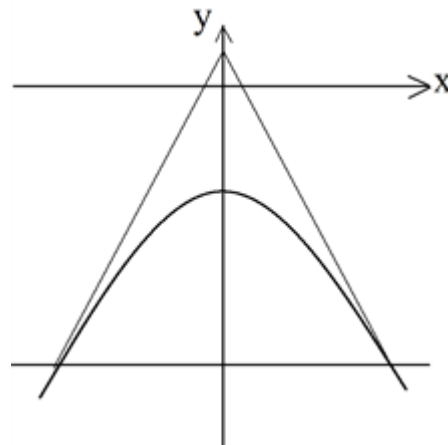
$$\lim_{x \rightarrow \cdot} g(x) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x) + 2x - f(\cdot)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} + 2 = f'(\cdot) + 2 = 5 + 2 = 7$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط d سهمی $y = -x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع کرده است. (۱۰۷)

برای اینکه دو خط مماس بر هم عمود باشند، لازم است که شیب‌های آن‌ها $+1$ و -1 باشند، زیرا نسبت به خط $x = 0$ متقارن هستند، پس مشتق تابع را برابر ± 1 قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد حاصل شود:

$$y' = -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{y = -x^2 - 1} y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

این همان عرض خط d است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $1/25$ است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۰۸)

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0)$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right) \left(\frac{\cos x (\sin x + 1 - \sin x + 1)}{(\sin x + 1)^2} \right) \Rightarrow f'(0) = 2(-1)(2) = -4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۰۹)

$$y = \frac{\pi}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} \cos 2x; \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\pi}{2} (\cos^2(\frac{\pi}{2}) - \cos^2(\frac{\pi}{4}))}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = -2$$

$$f'(x) = -\pi \sin 2x \Rightarrow f' \left(\frac{3\pi}{8} \right) = -\pi \sin 2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \pi; \quad \frac{\text{آهنگ متوسط}}{\text{آهنگ لحظه ای}} = \frac{-2}{-\frac{\sqrt{2}}{2} \pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۱۰)

$$h'(x) = f' \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2f' \left(2x - \frac{23\pi}{24} \right) \Rightarrow h' \left(\frac{\pi}{2} \right) = f' \left(\frac{\pi}{6} \right) + 2f' \left(\frac{\pi}{24} \right)$$

$$\otimes \rightarrow h' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$$f' \left(\frac{\pi}{24} \right) = f' \left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{8} \right) = f' \left(\frac{\pi}{6} \right) \otimes$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۱۱)

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt{x^2} - 2 = -\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x^2} + \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ناحیه چهارم} \\ \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x = -8 \text{ ناحیه دوم} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow m = g'(-8) = \frac{2}{3}(-8)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}, y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 8) \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| = \frac{2}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۱۲)

$$f(x) = 4\sqrt{ax} \left| x - \frac{3}{4} \right| \Rightarrow \begin{cases} f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = 4\sqrt{a\left(\frac{3}{4}\right)} = 2\sqrt{3a} \\ f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = -4\sqrt{a\left(\frac{3}{4}\right)} = -2\sqrt{3a} \end{cases}$$

$$f'_+\left(\frac{3}{4}\right) - f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = 4\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \xrightarrow{\text{توان } 2} 16 \times 3a = 4 \times 6 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آهنگ متوسط تابع اول: (۱۱۳)

آهنگ متوسط تابع دوم:

$$y = \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$b = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از g مشتق می‌گیریم: (۱۱۴)

$$g'(x) = (2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \sqrt{2} \sin x) f'(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2} \cos x) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{4}}$$

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2f'(2) = \sqrt{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط $1 = 6y - 3x$ برابر $\frac{1}{6}$ است، پس در نقطه مطلوب، شیب خط مماس باید برابر ۲- باشد. (۱۱۵)

$$\Rightarrow y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

نقطه مطلوب (۱, ۲) است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مشتق را بدست آورید: (۱۱۶)

$$f(x) = (x - 4)\sqrt{x + 3} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x + 3} + (x - 4) \times \frac{1}{2(\sqrt{x + 3})^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(\delta - h) - 3f(\delta - h) + 2}{h(\delta - h)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\delta - h) - 1}{\delta - h} \right) \times \left(-\frac{f(\delta - h) - 2}{-h} \right)$$

$$= \left(\frac{f(\delta) - 1}{\delta} \right) (-f'(\delta)) = \frac{1}{\delta} \times \frac{-25}{12} = \frac{-5}{12}$$

تذکر: این مسأله با قاعده‌ی هوییتال نیز قابل حل است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۱۷

$$g(x) = f(x+1) + f(2x+1) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) + 2f'(2x+1)$$

$$g'(-2) = f'(-1) + 2f'(1)$$

چون دوره تناوب ۵ است پس:

$$f(x+5) = f(x) \Rightarrow f'(x+5) = f'(x) \xrightarrow{x=-1} f'(1) = f'(-1)$$

$$g'(-2) = \frac{3}{2} + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون خط مماس بر هر دو رسم شده پس: ۱۱۸

$$\frac{3}{2} \sin x = \sin x + \frac{1}{2} \cos x \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

پس نقطه تماس: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{2}\right)$ و شیب خط مماس:

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} m = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{y=0} x = \frac{\pi}{4} - 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است، پس محل تقاطع آن با f^{-1} روی خط $y = x$ قرار دارد: ۱۱۹

$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = x \Rightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس محل تلاقی f و f^{-1} نقطه $(4, 4)$ است:

$$f(x) = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m = f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$(f^{-1})'(4) = 4$$

اگر یک خط را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، شیب آن عکس می‌شود، پس:

زاویه‌ی بین دو خط با شیب‌های m و m' از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 1} \right| = \frac{15}{8}$$

$$\operatorname{Sin} 2\alpha = \frac{2 \left(\frac{15}{8}\right)}{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{\frac{15}{4}}{1 + \frac{225}{64}} = \frac{240}{289}$$

با استفاده از اتحاد $\operatorname{Sin} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1 - \cos x)^m}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x (n \cos x \sin^{n-1} x)}{(1 - \cos x)^m}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۲۰)

با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^n)^n (n \cos x (x^n)^{n-1})}{\left(\frac{x^n}{2}\right)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} n 2^{m+1} x^{2n-2m-1} = 22\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n - 2m - 1 = 0 \Rightarrow n = \frac{2m+1}{2} \quad (*) \\ n 2^{m+1} = 22\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{2m+1}{2}\right) 2^{m+1} = 22\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right) 2^m = 22\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow n = 2 \Rightarrow 2m + n = 9 \quad \text{به ازای } m = \frac{7}{2} \text{ تساوی بالا برقرار می‌شود.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قضیه‌ی تقسیم را برای تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + 2x$ می‌نویسیم: (۱۲۱)

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$$

از طرفین تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

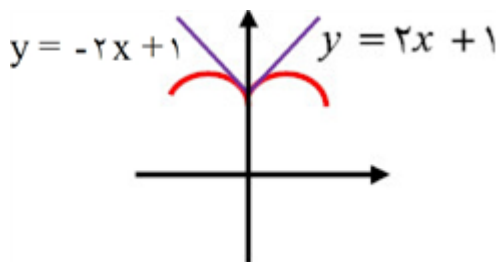
$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + 3$$

حال $x = -2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P'(-2) = (-2)Q(-2) + 0 + 3 = -2(2) + 3 = -1$$

این مقدار همان باقی‌مانده $P'(x)$ بر $x + 2$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۲۲)



$$\begin{cases} 2x + 1 = -x \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ -2x + 1 = -x \Rightarrow B = (1, -1) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۲۳)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 2x + ax^2 + b}{x} = 0 \Rightarrow \text{حد صورت} = 0 \Rightarrow 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

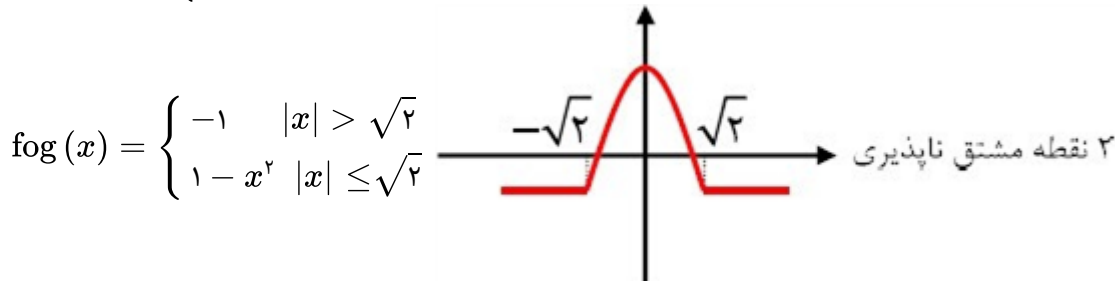
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-6 \cos^2 2x \sin 2x + 2ax}{x} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(-6 \cos^2 2x \left(\frac{\sin 2x}{x}\right) + \frac{2ax}{x} \right) = 2 \Rightarrow -6 \times 2 + 2a = 2 \Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 7$$

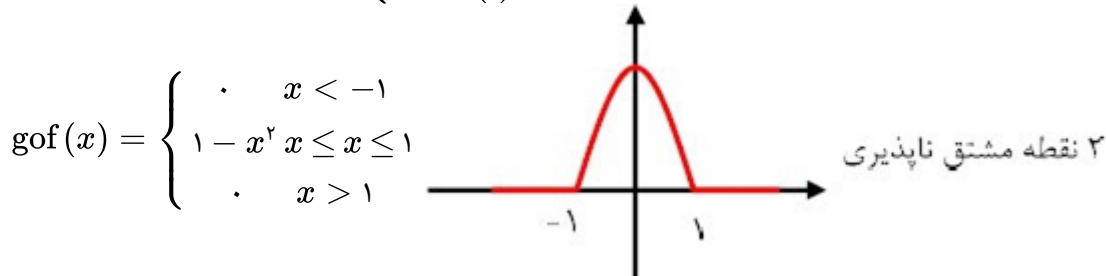
$$\Rightarrow a + b = 7 + (-1) = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۴

$$f(g(x)) = \begin{cases} -1 & 1 - x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow |x| > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2} \\ 1 & 1 - x^2 > 1 \times \end{cases}$$



$$gof(x) = 1 - (f(x))^2 = \begin{cases} 1 - (-1)^2 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - (1)^2 & x > 1 \end{cases}$$



در کل ۴ نقطه مشتق ناپذیر دارد.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۵

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b) \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) - 2 \Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{1}{2}bx + b - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{1}{2}b \right)x + b - 2 \Rightarrow b = 2a + \frac{1}{2}b \Rightarrow 2a = \frac{1}{2}b \Rightarrow 4a = b$$

$$\left. \begin{matrix} c = b - 2 \\ b = 4a \end{matrix} \right\} \Rightarrow c = 4a - 2 \Rightarrow p(x) = ax^2 + 4ax + 4a - 2 \Rightarrow p(1) = 9a - 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \min = 7$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲۶

$$f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$\left[\frac{5}{4} \right] = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. x را در تابع $y = x\sqrt{x}$ قرار داده و y را حساب می‌کنیم. (۱۲۷)

$$y = 4\sqrt{4} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

در نقطه A ، y ها و همچنین y' ها برابر هستند.

$$A(4, 8) \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a + b = 8 \Rightarrow 4a + b = -8 \\ 2x + a = \frac{2}{y}\sqrt{x} \Rightarrow 8 + a = 3 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow -20 + b = -8 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن جواب از مشتق تابع مرکب استفاده می‌کنیم: (۱۲۸)

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

$$g'(x) = \left(\frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \right) f' \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right)$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} g' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{-2 \cos \frac{\pi}{6}}{(1 + \sin \frac{\pi}{6})^2} \right) f' \left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \right) \Rightarrow \frac{\cancel{2}^{\cancel{2}}}{3} = \frac{-\cancel{2}^{\cancel{2}}}{\frac{3}{2}} f' \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow f' \left(\frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۲۹)

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x - 4)}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow m = \frac{2}{2}$$

$$y - 8 = \frac{2}{2}(x - 4) \xrightarrow{x=0} y = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۳۰)

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = f'(x) \Rightarrow -1 = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{21 - x^2 + 4x}} \Rightarrow \sqrt{21 - x^2 + 4x} = x - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Delta' = 50$$

$$x = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{2}, x = \frac{4 - 5\sqrt{2}}{2} \otimes$$

$$g(x) = f(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x})$$

$$g'(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} f'(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \times f'(2)$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۳۱)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۲

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\left(3 + \frac{1}{5}\right) - (1 + 1)}{4} = \frac{6}{20} = 0.3$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50} = 0.34$$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.34 - 0.3 = 0.04$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۳

$$f(x) = \frac{|x(x^2 - 2)|}{x} = \frac{|x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})|}{x} = \frac{|x| |x - \sqrt{2}| |x + \sqrt{2}|}{x}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ندارد چون $D_f \notin 0$.

در $x = \pm\sqrt{2}$ نقطه‌ی گوشه (شکسته) است چون ریشه‌ی ساده قدرمطلق است. پس f در ۳ نقطه مشتق ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در $x = 2$ بر منحنی $g(x)$ مماس است. پس: ۱۳۴

$$\begin{cases} g(2) = 3(2) - 5 = 1 \\ g'(2) = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2) f'(g(2)) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۵

$$f(x) = \frac{x^2}{|1-x|} \cdot [x] \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = ? = f'_-(3)$$

$$x \rightarrow 3^- : f(x) = \frac{x^2}{x-1} \cdot [3^-] = \frac{2x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(4x)(x-1) - (1)(2x^2)}{(x-1)^2} \xrightarrow[x=3]{\text{جایگذاری}}$$

$$f'_-(3) = \frac{(12)(2) - (1)(18)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

تذکر: در اصل این حد وجود ندارد چون f در $x = 3$ پیوستگی چپ ندارد ولی متأسفانه غلط مورد علاقه کنکور سراسری است که منظور طراح سؤال همین راه حل است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۶

$$(x^2 f(x))' = 2x f(x) + x^2 f'(x) \xrightarrow{x=-2} -4f(-2) + 4f'(-2) = -4(-3) + 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases} = 12 + 2 = 14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 9 \\ f'(2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۳۷)

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \times x$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} \times 2 = 3 + \frac{\frac{2}{3}}{6} \times 2 = 3\frac{1}{9}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط مماس بودن آن است که y ها و y' ها برابر باشد و همچنین وقتی دو منحنی بر هم مماس هستند، با مساوی قرار دادن آنها باید $\Delta = 0$ باشد. (۱۳۸)

$$\frac{x^2 + a}{x - 2} = -2x + 2 \Rightarrow 4x^2 - 8x + a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow a = 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون بر $(x - 1)^2$ بخش پذیر است بنابراین مشتق آن نیز بر $x - 1$ بخش پذیر است. یعنی $P(1) = 0$ و $P'(1) = 0$. (۱۳۹)

$$P(x) = x^3 + ax^2 - bx + 4 \Rightarrow P(1) = 1 + a - b + 4 = 0 \Rightarrow a - b = -5$$

$$P'(x) = 3x^2 + 2ax - b \Rightarrow P'(1) = 4 + 2a - b = 0 \Rightarrow 2a - b = -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 10 \\ 2a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow b = 6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۴۰)

$$y = g \circ f(x) = \frac{3}{4}(3x + |x|) + a|3x + |x|| = \begin{cases} 3x + 4ax & x \geq 0 \\ \frac{3}{4}x - 2ax & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = 0 \text{ پیوسته است.}$$

$$y' = \begin{cases} 3 + 4a & x > 0 \\ \frac{3}{4} - 2a & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_+ (0) = y'_- (0) \Rightarrow 3 + 4a = \frac{3}{4} - 2a \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ به راحتی به دست می‌آید و داریم $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ برای محاسبه $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ابتدا

ضابطه‌ی تابع را کمی تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 1}$$

مشتق توابع به فرم $f(x) = \frac{au + b}{cu + d}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{au + b}{cu + d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad - bc}{(cu + d)^2} u'$$

$$f(x) = \frac{-\sin^2 x + 1}{\sin^2 x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1 \times 1) - (1 \times 1)}{(\sin^2 x + 1)^2} \times 2 \sin x \cos x = \frac{-2 \sin x \cos x}{(\sin^2 x + 1)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}}{\left(\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 + 1\right)^2} = \frac{-2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right)^2} = \frac{-2}{\frac{9}{4}} = \frac{-8}{9}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} - 2 \times \frac{-8}{9} = \frac{1}{3} + \frac{16}{9} = \frac{19}{9} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = \sin(\pi \cos x)$$

در نقطه‌ی تلاقی gof با محور x ها مقدار $\text{gof}(x)$ صفر می‌شود، پس داریم:

$$\text{gof}(x) = 0 \rightarrow \sin(\pi \cos x) = 0 \rightarrow \pi \cos x = k\pi \xrightarrow[-1 \leq \cos x \leq 1]{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\rightarrow \cos x = k \quad ; \quad k = 0, 1, -1$$

اگر $\cos x = 1$ یا -1 باشد، آن‌گاه معادله در بازه‌ی $(0, \pi)$ جواب ندارد، اما اگر $\cos x = 0$ باشد، آن‌گاه در فاصله‌ی $(0, \pi)$ ،

$$\text{جواب } x = \frac{\pi}{2} \text{ می‌شود پس نقطه‌ی تلاقی } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ است.}$$

برای محاسبه‌ی شیب خط مماس کافی است مشتق را در این نقطه محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} (\text{gof})'(x) &= (-\pi \sin x) \cdot \cos(\pi \cos x) \rightarrow (\text{gof})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\pi \cos \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\pi(\cos(\cdot)) = -\pi \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که تابع داده شده مجموع دو تابع $y_1 = [x]$ و $y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right]$ می باشد، ابتدا نقاط مشتق ناپذیر دو تابع اخیر را در بازه $(0, 3)$ مشخص می کنیم. با توجه به ساختار توابع y_1 و y_2 ، نقاط ناپیوستگی این دو تابع، همان نقاط مشتق ناپذیرشان هم هست:

$$y_1 = [x] \Rightarrow k \in Z \xrightarrow{x \in (0, 2)} x = 1, 2 \text{ در آن ها پیوسته است}$$

$$y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right] \Rightarrow x + \frac{1}{3} = k \in Z \Rightarrow x = k - \frac{1}{3} \xrightarrow{x \in (0, 2)} x = \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$$

y_1 در این سه نقطه ناپیوسته ولی y_2 در آن ها پیوسته است. در هر یک از نقاط به طول $1, 2, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$ یکی از دو تابع

y_1 و y_2 پیوسته و دیگری ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x) = y_1 + y_2$ در هر یک از این پنج نقطه ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۴۴)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x}}{x - 2} = \text{مبهم} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + \sqrt{2x}) \cos \frac{\pi}{x}}{(x-1)(x-2) \sin \frac{\pi}{x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{2x}}{(x-1) \sin \frac{\pi}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} &= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} \xrightarrow{\text{HOP}} 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}}{1} = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi \end{aligned}$$

روش دوم: از آنجا که حد مورد نظر سوال، تعریف مشتق تابع f در $x = 2$ می باشد، پس کافی است $f'(2)$ را محاسبه کنیم. از طرف دیگر چون $f(2) = 0$ می شود یعنی $x = 2$ ریشه ی تابع f می باشد، کافی است مقدار مشتق عامل صفرشونده در $x = 2$ (یعنی $\cot \frac{\pi}{x}$) را محاسبه کرده و در مقدار مابقی تابع به ازای $x = 2$ ضرب کنیم.

$$\begin{aligned} \left(\cot \frac{\pi}{x}\right)' &= \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \left[-\left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x}\right)\right] = \frac{\pi}{x^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x}\right) \\ f'(2) &= \frac{\pi}{(2)^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{2}\right) \left(\frac{2 + \sqrt{2 \times 2}}{2-1}\right) = \pi \end{aligned}$$

بنابراین $f'(2)$ برابر است با:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ریشه های ساده ی داخل قدر مطلق طول نقاط زاویه دار منحنی تابع می باشند، پس نقطه ی مورد نظر $x = 0$ می باشد. (۱۴۵)

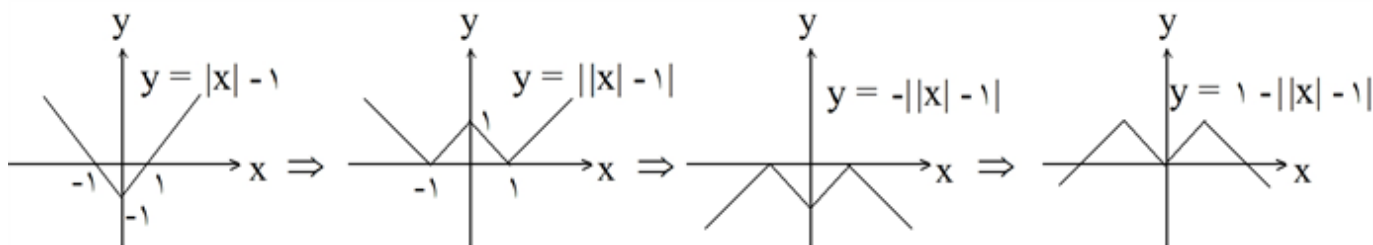
$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{\sqrt{1+|x|} - 1}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{\cancel{\sqrt{1+x}} + \frac{x}{2} - \cancel{\sqrt{1+x}}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{\sqrt{1+|x|} - 1}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{\cancel{\sqrt{1-x}} - \frac{x}{2} - \cancel{\sqrt{1-x}}}{x} = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه مقدار عبارت $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ برابر با 1 با $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ می باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴۶

$$y = f(f(x)) = 1 - |1 - |x|| = 1 - ||x| - 1|$$



تابع در ۳ نقطه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ مشتق ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع در نقطه به طول ۲ واقع بر منحنی را به دست آوریم. ۱۴۷

ابتدا محاسبه‌ی شیب مماس:

$$y = \frac{x^2}{x-1} \rightarrow y' = \frac{2x(x-1) - (1)(x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=2} f'(2) = 0$$

با توجه به این که شیب خط مماس بر منحنی در نقطه به طول ۲ برابر با صفر به دست آمده، پس خط مماس بر منحنی در این نقطه، خطی افقی می‌باشد که عرض از مبدا آن، همان عرض نقطه‌ی تماس است.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \xrightarrow{x=2} f(2) = \frac{4}{2-1} \rightarrow y = 4$$

عرض نقطه‌ی تماس و معادله‌ی خط مماس:

این مماس افقی، محور لایها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی مشتق تابع مرکب، ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم. ۱۴۸

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (*)$$

حال با توجه به این که ضابطه‌ی مشتق تابع f در صورت تست داده شده، داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \quad (**)$$

و با جایگذاری (***) در رابطه‌ی (*) داریم:

$$y' = \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right) \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۹

$$f(x) = x + \cos^5(g(x)) \rightarrow f'(x) = 1 - 5\cos^4(g(x)) \sin(g(x))g'(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(\cdot) = 1 - 5g'(\cdot) \sin(g(\cdot)) \cos^4(g(\cdot))$$

$$\xrightarrow{f'(\cdot)=1} g'(\cdot) \sin(g(\cdot)) \cos^4(g(\cdot)) = 0 \xrightarrow{g(\cdot)=\frac{\pi}{6}} g'(\cdot) \sin \frac{\pi}{6} \cos^4 \frac{\pi}{6} = 0 \rightarrow g'(\cdot) = 0$$

حال برای محاسبه‌ی $f''(\cdot)$ باید از $f'(x)$ مشتق گرفته و $x = 0$ را در آن قرار دهیم. از آنجا که در عبارت $f'(x) = 1 - 5\cos^4(g(x)) \sin(g(x)) \cdot g'(x)$ عامل $x = 0$ در $g'(x)$ عامل صفرشونده است ($g'(0) = 0$)، بنابراین کافی است از $g'(x)$ مشتق گرفته و در بقیه‌ی عبارت ضرب کنیم و در نهایت $x = 0$ را در آن قرار دهیم. داریم:

مشتق عامل صفر شونده

$$f'(x) = 1 - 5\cos^4(g(x)) \sin(g(x)) \cdot g'(x) \rightarrow f''(\cdot) = 0 - 5\cos^4(g(\cdot)) \sin(g(\cdot)) \cdot g''(\cdot)$$

$$\xrightarrow{g(\cdot)=\frac{\pi}{6}} f''(\cdot) = -5\cos^4 \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot g''(\cdot) = -5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) \cdot g''(\cdot)$$

$$\rightarrow f''(\cdot) = \frac{-45}{32} g''(\cdot)$$

$$f'(x) g'(f(x)) = (g(f(x)))'$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۰

$$g(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \Rightarrow (g(f(x)))' = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. معادله‌ی خط گذرا از دو نقطه‌ی $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ برابر است با $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$ با توجه به ۱۵۱این که این خط در $x = 3$ بر منحنی f مماس است. پس:

$$\begin{cases} f(3) = y(3) = \frac{-1}{2} \times 3 + \frac{5}{2} = 1 & (1) \\ f'(3) = m = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{-(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} -(f(x) + 5)$$

$$= f'(3) \times (-f(3) - 5) \xrightarrow{(1)} -\frac{1}{2} \times (-1 - 5) = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون مشتق در $x = 1$ وجود دارد پس تابع پیوسته است و $f'_-(1) = f'_+(1)$ ۱۵۲

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{x} \right) = 0 \quad (1) \quad \text{شرط پیوستگی:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^r + ax + b) = a + b + 1 \xrightarrow{(1)} a + b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a + b = -1 \quad (2)$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \quad \text{شرط}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^r} & x > 1 \\ rx + a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 + 1 = r + a \Rightarrow a = 0 \xrightarrow{(2)} b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^r - 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(1 - \sqrt{r}) = (1 - \sqrt{r})^r - 1$$

$$= 1 - r\sqrt{r} + r - 1 = r - r\sqrt{r}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۳

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow b + 1 = 1 + a \cos \pi \Rightarrow b = -a$$

$$f'(x) = \begin{cases} -a\pi \sin \pi x & x > 1 \\ rx + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow -a\pi \sin \pi x = rx + 1 \Rightarrow rx + 1 = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{r} \Rightarrow a = \frac{1}{r}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۴

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^\delta \Rightarrow f'(x) = 1 + \delta(g(x))^{\delta-1} g'(x) \Rightarrow f'(\cdot) = 1 + \delta(g(\cdot))^{\delta-1} g'(\cdot)$$

$$\Rightarrow 1 = 1 + \delta g'(\cdot) \Rightarrow g'(\cdot) = 0$$

$$f''(x) = r \cdot (g(x))^{r-1} (g'(x))^r + \delta(g(x))^{\delta-1} g''(x) \Rightarrow f''(\cdot) = 0 + \delta g''(\cdot)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۵

$$f(x) = \begin{cases} \frac{r}{\sqrt{x}} & x \geq 1 \\ ax^r + bx & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی در } x=1} a + b = r$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow ra + b = \frac{-1}{1\sqrt{1}} \Rightarrow ra + b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = -r \\ b = r \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۶

$$y = f(f(x)) \rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \rightarrow y'\left(\frac{1}{r}\right) = f'\left(\frac{1}{r}\right) \cdot f'\left(f\left(\frac{1}{r}\right)\right) = f'\left(\frac{1}{r}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$f'(x) = \pi \sin(2\pi x) + \frac{\pi}{r} \sin \pi x \Rightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\pi\sqrt{r}}{r} + \frac{\pi}{r} \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{r\pi}{r} \sqrt{r} \\ f'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\pi}{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{r}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\pi^r}{r} (r\sqrt{r})$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۵۷)

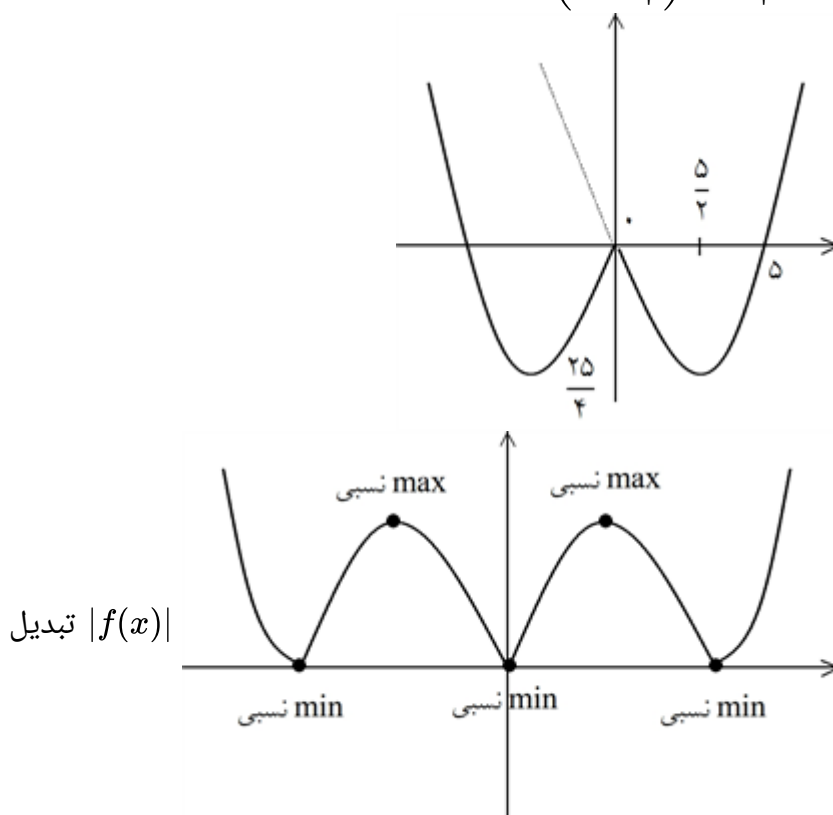
$$y = |f(x)| = |x|(|x| + 3) = \begin{cases} x(x+3) & ; x \geq 0 \\ -x(-x+3) & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 3x & ; x \geq 0 \\ x^2 - 3x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & ; x > 0 \\ 2x - 3 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = |f(x)| \text{ تابع در } R \text{ پیوسته است}$$

و $f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$ ، لذا تنها نقطهٔ بحرانی این تابع $x = 0$ می‌باشد.

$$f(x) = |x|^2 - 5|x| = \left(|x| - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \quad \text{گزینه ۱ پاسخ صحیح است.} \quad (158)$$

تابع $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ که خاصیت $f(|x|)$ روی آن اجرا شده



$$\begin{aligned} \text{تعداد max نسبی} = 2 = m \\ \text{تعداد min نسبی} = 3 = n \end{aligned} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{3}{2}$$

$$f(\cdot) = f(a) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ابتدا و انتهای بازه مقدار تابع صفر می‌شود. (۱۵۹)

پس در نقطه بحرانی درون بازه ماکزیمم می‌شود بنابراین:

$$f(x) = \pm \sqrt{x^2}(x-a) \Rightarrow f'(x) = \pm \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}(x-a) + \sqrt{x^2}(1)$$

$$= \pm \frac{2x - 2a + 3x}{3\sqrt{x}} = \pm \frac{5x - 2a}{3\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 5x = 2a \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$$

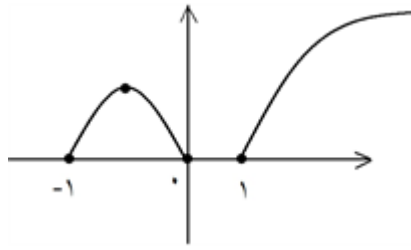
$$f\left(\frac{2a}{5}\right) = 1/5$$

$$\text{استفاده از گزینه‌ها: } a = \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right) = 1/5 \Rightarrow f(1) = 1/5 \checkmark$$

پس $a = \frac{5}{2} = 2/5$ می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۰

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & x \geq 0 \Rightarrow D: x \geq 1 \\ \sqrt{-x^2 - x} & x < 0 \Rightarrow D: -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$



$$m = 1 \quad n = 0 \quad k = 4$$

$$\frac{km + n}{k - n} = \frac{4}{4} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶۱

$$x(|x| - 1) \leq 0 \Rightarrow x \leq -1, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x + x^2} & x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} & x < -1 \end{cases}$$

$$\text{نقاط بحرانی} \begin{cases} x = 0, x = 1, x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

این تابع ۴ نقطه بحرانی دارد که فقط $x = \frac{1}{2}$ ماکزیمم نسبی است. پس:

$$\left. \begin{matrix} m = 1 \\ n = 0 \\ k = 4 \end{matrix} \right\} m + n + k = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه $(-1, -4)$ نقطه عطف نمودار تابع است. ۱۶۲

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{a}{3} = -1 \Rightarrow a = 3 \\ &\xrightarrow{x=-1, y=-4} -4 = (-1)^2 + 3(-1)^2 + b(-1) - 1 \Rightarrow b = 5 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{a}{3} = -1 \Rightarrow a = 3 \\ &\xrightarrow{x=-1, y=-4} -4 = (-1)^2 + 3(-1)^2 + b(-1) - 1 \Rightarrow b = 5 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = 0.6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ابتدا، بازه $(1, +\infty)$ باید زیرمجموعه دامنه تابع باشد، یعنی مجانب قائم نمودار در این بازه ۱۶۳

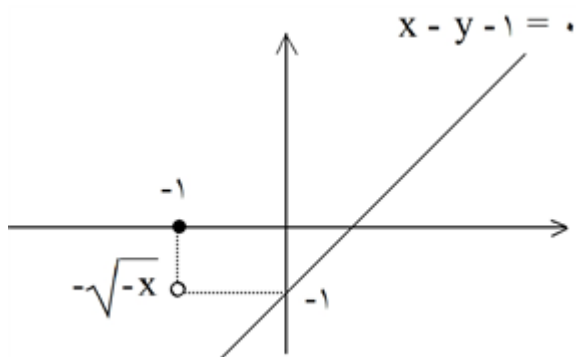
$$\Rightarrow 1 - m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0 \quad (1) \quad \text{نباشد:}$$

از طرفی تابع باید نزولی باشد:

$$\Rightarrow y' = \frac{m(m-1) - 2}{(x+m-1)^2} < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1) < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 0 \leq m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 0, m = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۴



$$y = -\sqrt{-x - [x^2]}$$

$$-x - [x^2] \geq 0 \Rightarrow x + [x^2] \leq 0$$

فقط در $[-1, 0]$

$$A(a, -\sqrt{-a})$$

نقطه A را روی $-\sqrt{-x}$ در نظر بگیرید پس داریم:

فاصله نقطه A از خط برابر است با:

$$\frac{|a + \sqrt{-a} - 1|}{\sqrt{2}}$$

مشتق

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{-a}} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{|-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۵

$$y = \frac{k}{2}x^2 - (k+2)x^2 \Rightarrow x_{\text{عطف}} = \frac{k+2}{2(\frac{k}{2})} = \frac{2(k+2)}{2k} < 0 \Rightarrow -2 < k < 0$$

تنها مقدار صحیح $k = -1$ است پس:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2 - x^2 \\ x_{\text{عطف}} &= -\frac{2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_{\text{عطف}} = -\frac{1}{2} \times \frac{-8}{27} - \frac{4}{9} = \frac{4}{27} - \frac{12}{27} = \frac{-8}{27} < 0$$

پس به ازای $k = -1$ نقطه‌ی عطف در ناحیه سوم است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۶

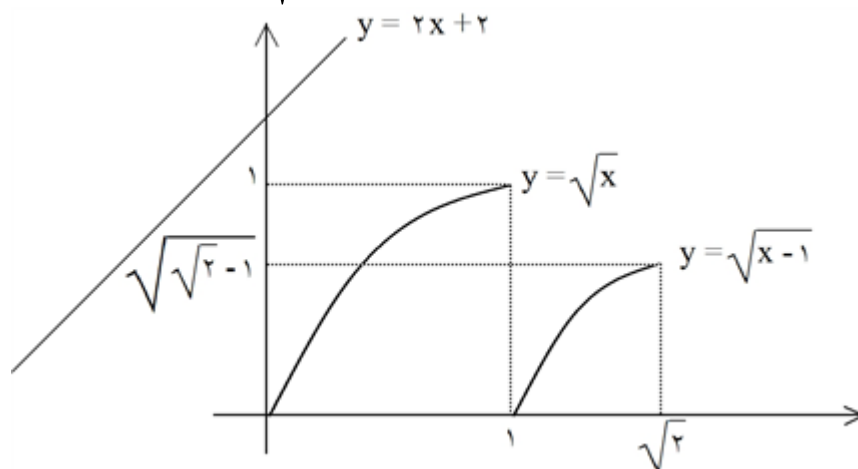
اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد پس $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

$$\frac{\frac{a}{c}}{-\frac{d}{c}} = \frac{-\frac{d}{c}}{\frac{a}{c}} \Rightarrow a^2 = d^2 \Rightarrow a = \pm d$$

$$\text{پس گزینه ۳ جواب می‌تواند باشد} \left\{ \begin{aligned} \xrightarrow{a=d} \frac{ax+b}{cx+a} &\Rightarrow \left(-\frac{a}{c}, \frac{a}{c}\right) \Rightarrow y = -x \text{ خط} \\ \xrightarrow{a=-d} f = f^{-1} &\Rightarrow y = x \text{ خط است} \end{aligned} \right.$$

* متوجه نشدید طراح، گزینه ۱ را از کجا آورده! شما می‌توانید حدس بزنید؟

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = \sqrt{x - [x^2]}$ و خط $y = 2x + 2$ را در شکل زیر می‌بینیم: ۱۶۷



کمترین فاصله نقاط تابع از خط موردنظر، کمترین فاصله نقاط روی نمودار $y = \sqrt{x}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ است. نقط

$$d = \frac{|2\alpha - \sqrt{\alpha} + 2|}{\sqrt{5}} \quad \text{را در نظر می‌گیریم؛ فاصله برابر است با:}$$

در نقطه بحرانی $d(\alpha)$ ، کمترین مقدار رخ می‌دهد:

$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{\left| \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2 \right|}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه عطف نمودار تابع $y = ax^r + bx^r$ نقطه $I\left(-\frac{b}{ra}, \frac{2}{2r}, \left(\frac{b^r}{a^r}\right)\right)$ است، برای اینکه ۱۶۸

این نقطه در ربع دوم قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{b}{a} < 0 \\ 0 \\ \frac{b^r}{a^r} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a, b > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} k > 0 \\ k + 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow k > -1$$

حال در این سؤال داریم:

که این بازه شامل هیچ عدد صحیح و منفی نمی‌باشد.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۹

$$g(x) = \frac{cx + d}{ax + b} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-bx + d}{ax - c}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}} = -\frac{a^2}{bc} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{a^2}{bc} = -\frac{b}{c} \xrightarrow{c \neq 0} \frac{a^2}{b} = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow a = \pm b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \cdot^+} f^{-1}(x) = -\frac{b}{a} = \pm 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۷۰)

$$f(x) = \frac{(1-\alpha)x - 3}{(1-\alpha)x - \alpha} \Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow (1-\alpha)(-\alpha) + 3(1-\alpha) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha = 3 &\Rightarrow f(x) = 1 \xrightarrow{y+3=0 \Rightarrow y=-3} 1 - (-3) = 4 \\ \alpha = 1 &\Rightarrow f(x) = 3 \xrightarrow{y+1=0 \Rightarrow y=-1} 3 - (-1) = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مجموع} = 8$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۷۱)

$$x < 0 \Rightarrow y = ax^2 - bx \Rightarrow y' = 2ax - b \xrightarrow{y'(-1)=0} -2a - b = 0 \quad \otimes$$

$$A(-1, 2) \in y \Rightarrow 2 = a + b \xrightarrow{\otimes} a = -2, b = 4 \Rightarrow ab = -8$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{m-2}{m^2+1}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۷۲)

$$S'(m) = -\frac{m^2 - 4m - 1}{(m^2 + 1)^2} \xrightarrow{s'(m)=0} m^2 - 4m - 1 = 0 \Rightarrow m = 2 \pm \sqrt{5}$$

جدول تغییرات رفتار تابع $S(m)$ را می‌نویسیم:

m	$2 - \sqrt{5}$	$2 + \sqrt{5}$	
S'	-	+	-
S			
	نسبی		نسبی

پس در $m = 2 + \sqrt{5}$ تابع S بیشترین مقدار است.

تذکر:

اصل سؤال به صورت $f(x) = (m^2 - 1)x^2 + (2 - m)x + 5$ بوده که در آن حالت، سؤال غلط می‌شد. چون نه

ماکزیم داشت و نه حتی به ازای $m = 2 + \sqrt{3}$ که ماکزیم نسبی ایجاد می‌شد، معادله درجه ۲، ریشه $\frac{m-2}{m^2-1}$ می‌داشت.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع روی دامنه‌اش یعنی $R - \{1\}$ پیوسته است: (۱۷۳)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & ; x < 0 \\ \frac{x}{1-x^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & ; x < 0 \\ \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ مشتق دارد و برابر یک است. ($f'(0) = 1$)

$$f'(-1) = 0$$

و با توجه به دامنه هر ضابطه فقط در $x = -1$ مشتق برابر صفر دارد:

پس تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد.

دقت کنید که $x = 1$ عضو دامنه تابع نیست و نباید لحاظ شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه $A(0, 0)$ نقطه اکسترمم نمودار تابع است ($f'(0) = 0$ و $f(0) = 0$) پس تابع باید عامل x^2 را داشته باشد، در نتیجه $c = d = 0$ و $f(x) = ax^2 + bx^2$ است.

$$B \in f \Rightarrow f(1) = a + b = 1 \quad (I)$$

$$f'(x) = 2ax + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 2a + 2b = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} a = -2, b = 3 \Rightarrow ab = -6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. محل تلاقی مجانب‌ها همان مجانب‌های قائم و افقی تابع است.

$$y = \frac{a}{a+1} \text{ مجانب افقی و } x = \frac{-(a-1)}{a+1} \text{ مجانب قائم}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{3} \quad \text{طول نقطه مینیمم:}$$

$$\frac{-(a-1)}{a+1} = \frac{-1}{3} \Rightarrow a = 2 \quad \text{با مساوی قرار دادن دو تا x داریم:}$$

پس تابع هموگرافیک داده شده به صورت $y = \frac{2x+3}{2x+1}$ می‌باشد که محل تلاقی آن با محور طولها $x = \frac{-3}{2}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = x^2 |x| + 3ax^2 + b \xrightarrow{(-1,1)} 1 = 1 + 3a + b \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \Rightarrow \frac{b}{a} = -3$$

با فرض اول به جواب رسیدیم، ولی ادامه حل:

$$\Rightarrow y' = 2x|x| + 6ax = -3(-1)^2 + 6a(-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3 \quad \text{داریم: } b = \frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) \xrightarrow{f'(x)=0} x = 0 \text{ یا } \pm\sqrt{3}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 \xrightarrow{f''(x)=0} x = \pm 1$$

جدول تغییرات رفتار f را می‌نویسیم:

x		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$				
f''		+		+		0		-		0		+		+
f'		-		0		+		0		-		0		+
f				-4				5				-4		
				min				عطف				عطف		min

نقاط $A(-\sqrt{3}, -4)$ و $B(\sqrt{3}, -4)$ مینیمم نسبی و نقاط $C(-1, 0)$ و $D(1, 0)$ عطف نمودار تابع هستند. شیب هر دو پاره‌خط AB و CD برابر صفر است، بنابراین موازی هستند و زاویه بین آنها صفر است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. f' باید منفی باشد. (۱۷۸)

$$f'(x) = \frac{4x^2(x^2 - 2) - 2x(x^2 - 2)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x^5 - 8x^2 + 6x}{(x^2 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 - 2)}{(x^2 - 2)^2}$$

جدول تغییرات رفتار تابع را در بازه‌ی $(-2, 2)$ می‌نویسیم:

x	-2	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
f'	-	o	+	o	+	o	-	o	+
f	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow

پس نمودار تابع روی بازه‌های $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ و $(1, \sqrt{2})$ ، $(-1, 0)$ ، $(-2, -\sqrt{3})$ اکیداً نزولی است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی f را به صورت زیر می‌نویسیم: (۱۷۹)

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x} - x & ; x \leq 0 \\ 3\sqrt[3]{x} + x & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 & ; x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

روی بازه‌ی $(0, +\infty)$ ، مشتق تابع همواره مثبت است بنابراین تابع اکیداً صعودی است. حال برای مقادیر $x < 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1$$

داریم:

$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \xrightarrow{x < 0} -1 \leq x < 0$$

چون تابع f پیوسته است پس فاصله‌ی صعودی کل بازه‌ی $[-1, +\infty)$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۸۰)

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0$$

	-1		2	
+		-		+
\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow

$x = -1$ مینیمم و $x = 2$ ماکزیمم تابع است.

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ 8 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 2 \\ -19 \end{vmatrix} \quad m_{AB} = \frac{8 + 19}{-1 - 2} = \frac{27}{-3} \Rightarrow m_{AB} = -9$$

$$f'(x) = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0$$

$\Delta > 0$
 \rightarrow دو جواب دارد پس دو نقطه یافت می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۱

$$f(x) = \frac{x^r}{x^r - 8} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^r - 22x^r}{(x^r - 8)^2} = \frac{x^r(x^r - 22)}{(x^r - 8)^2} = .$$

$$\Rightarrow x = 0, x^r = 22 \Rightarrow x = \sqrt[r]{22} \approx 3/000$$

X	$-\infty$	0	2	$\sqrt[r]{22}$	$+\infty$
f'	+	-		-	+
f	↗	↘		↘	↗

فاصله‌های نزولی: (0, 2) و (2, $\sqrt[r]{22}$) که طول بازه‌ها به ترتیب 2 و $\sqrt[r]{22} - 2$ است که $\sqrt[r]{22} - 2$ کوچکتر است.

$$\text{جواب} = \sqrt[r]{22} - 2 = 2\sqrt[r]{4} - 2 = 2(\sqrt[r]{4} - 1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۲

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$$

X	0	1	$+\infty$
f'		+	
f		↗	↗

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

این تابع در فواصلی که تعریف شده است، صعودی است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۳

$$f'(x) = \frac{(2 - 2x)(x + 1)^2 - (2x - x^2)(2(x + 1))}{(x + 1)^4} = \frac{2(x + 1)((1 - x)(1 + x) - 2x + x^2)}{(x + 1)^4}$$

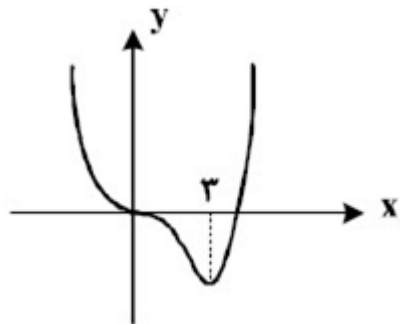
$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2 - 2x + x^2)}{(x + 1)^3} = \frac{2(1 - 2x)}{(x + 1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{3} \text{ ماکزیمم نسبی}$$

فاصله $y = -1$ مجانب افقی

$$\left. \begin{array}{l} \text{ماکزیمم نسبی} \\ \text{فاصله } y = -1 \text{ مجانب افقی} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله} = \left| \frac{1}{3} - (-1) \right| = \frac{4}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۴



$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx^3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6x + 4a + 2b$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

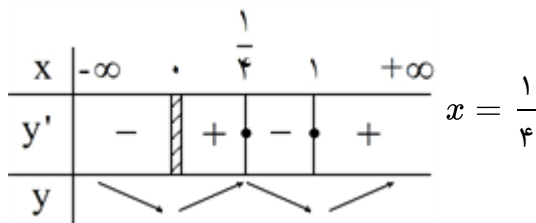
$$f'(3) = 0 \Rightarrow 3(3)^2 + 2a(3)^2 + 0 = 0 \Rightarrow 3^3(4 + a) = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 \Rightarrow f(-2) = 16 + 32 = 48$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸۵

$$y' = 2(x-1)\sqrt{x} + (x-1)^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x(x-1) + (x-1)^2}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{4x^2 - 4x + 2}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع $y = x|x^2 - 3|$ را ساده می‌کنیم. داریم: ۱۸۶

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 3) & |x| \geq \sqrt{3} \\ x(3 - x^2) & |x| < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & |x| \geq \sqrt{3} \\ 3x - x^3 & |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & |x| > \sqrt{3} \\ 3 - 3x^2 & |x| < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

با توجه به این که $x = \pm 1$ ، ریشه‌های ساده‌ی $f'(x)$ هستند، بنابراین هر دو اکسترم نسبی هستند و همچنین با توجه به

این که $f'_+(\sqrt{3}) = 6$ و $f'_-(\sqrt{3}) = -6$ (چرا؟) و $f'_-(-\sqrt{3}) = 6$ و $f'_+(-\sqrt{3}) = -6$ (چرا؟) است، لذا

دو نقطه‌ی $x = \pm\sqrt{3}$ نیز اکسترم‌های نسبی تابع f هستند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $y = \frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}$ را رسم می‌کنیم. (نیم‌بیضی) (۱۸۷)

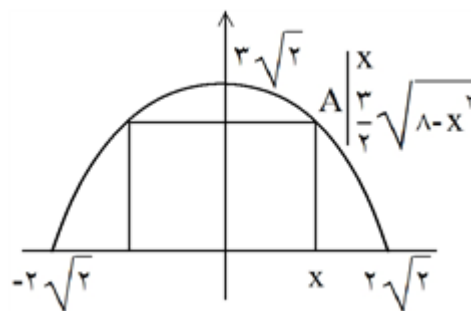
حال یک مستطیل فرضی را با شرایط مسأله در این نیم‌بیضی محاط می‌کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود، رأس A از این مستطیل بر روی نیم‌بیضی است و در نتیجه مختصات آن به صورت $(x, \frac{3}{2}\sqrt{8-x^2})$ می‌باشد. بنابراین طول و عرض

مستطیل مطابق شکل، برابر $2x$ و $\frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}$ است و داریم:

$$S_{\text{مستطیل}} = 2x \times \frac{3}{2}\sqrt{8-x^2} = 3x\sqrt{8-x^2} \Rightarrow S = 3\sqrt{8x^2 - x^4}$$

$$S'_x = 3 \times \frac{16x - 4x^3}{2} \sqrt{8x^2 - x^4} = 0 \Rightarrow (4x - x^3) = 0 \Rightarrow (x)(4 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق غ} \\ x = 2 \\ x = -2 \text{ ق ق غ} \end{cases}$$

$$S_{\text{max}} = 3 \times 2 \times \sqrt{8 - 2^2} = 3 \times 2 \times 2 = 12$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۱۸۸)

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

برای این که این تابع صعودی باشد، باید $f'(x) > 0$ باشد، داریم:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow 1 > \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \text{ (I)}$$

برای این که این تابع دارای تقعر رو به پایین باشد، باید $f''(x) < 0$ باشد، داریم:

$$\frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow x < 0 \text{ (II)}$$

با توجه به اشتراک مجموعه‌های (I) و (II)، می‌توان گفت که تابع f در بازه $(-\infty, -1)$ دارای تقعر رو به پایین بوده و صعودی است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ریشه‌های ساده‌ی درون قدرمطلق یعنی نقاط $x = 1$ و $x = -1$ بحرانی‌اند. حال به جستجوی سایر نقاط بحرانی می‌پردازیم:

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & ; x^2 \geq 1 \\ x(-x^2 + 1) & ; x^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - x & ; x^2 \geq 1 \\ -x^2 + x & ; x^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = x^2 - x \Rightarrow f'_1(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \neq 1 \text{ غ ق ق} \\ f_2(x) = -x^2 + x \Rightarrow f'_2(x) = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} < 1 \text{ ق ق} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

پس نقاط $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ نیز نقاط بحرانی تابع هستند. بنابراین این تابع در مجموع ۴ نقطه‌ی بحرانی در بازه‌ی $(-2, 2)$ دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با دقت در جدول تعیین علامت y'' درمی‌یابیم بازه‌ی مورد نظر، بازه‌ی $(1, 3)$ می‌باشد که طول آن $2 = 3 - 1 = b - a$ است.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y''	+	-	+	+
y		∪	∩	∪

$$y = \begin{cases} x^2 - 3x^2 & ; x \geq 3 \\ 3x^2 - x^2 & ; x < 3 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x^2 - 6x & ; x > 3 \\ 6x - 3x^2 & ; x < 3 \end{cases} \rightarrow y'' = \begin{cases} 4x - 6 & ; x > 3 \\ 6 - 6x & ; x < 3 \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \rightarrow y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 3x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \xrightarrow{y'=0}$$

$$\rightarrow x(-x^3 - 3x + 2) = 0$$

حال با توجه به این‌که $x = 0$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق تابع می‌باشد، با استفاده از آزمون مشتق اول به بررسی وضعیت منحنی تابع در مجاورت این نقطه می‌پردازیم که در نتیجه نقطه‌ی $x = 0$ طول Min نسبی منحنی تابع داده شده

x	0
y'	- +
y	↘ min ↗

می‌باشد.

روش دوم: اگر $0 < x < 1$ باشد، آن‌گاه $0 < x^2 < 1 < x^3 < -1$ ، یعنی $x^2 > x^3 > -1$ و در نتیجه $0 < x^2 + 1 > x^3 + 1 > 0$ باشد، آن‌گاه $x^2 > x^3 > 0$ و در نتیجه $x^2 + 1 > x^3 + 1 > 0$ است.

بنابراین در اطراف $x = 0$ ، $x^2 + 1 > x^3 + 1 > 0$ می‌باشد، پس $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} > 1$ یعنی $f(x) > 1$ از طرفی

بنابراین نقطه به طول $x = 0$ می‌نیمم تابع $f(x)$ است و گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. $f(0) = \frac{0+1}{0+1} = 1$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که در صورت تست قید شده که در یک طرف، رودخانه قرار دارد، پس طناب مورد استفاده فقط سه طرف زمین مستطیلی را پوشش می‌دهد. یعنی طول طناب برابر با محیط مستطیل (به جز طولی که کنار رودخانه قرار دارد) می‌باشد که برابر است با: $L = 2y + x$.

از طرفی خود مساله ماکزیم مقدار مساحت را با توجه به محدودیت‌های مساله تعیین کرده است که می‌توان با استفاده از آن، به عدد L دسترسی پیدا نمود.

$$S = xy \xrightarrow{x=L-2y} S = y(L - 2y) \Rightarrow S = Ly - 2y^2$$

$$S'_y = L - 4y \xrightarrow{S'_y=0} L - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{L}{4}$$

$$S_{\max} = \frac{L}{4} \left(L - \frac{L}{2} \right) = \frac{L^2}{8} \xrightarrow{S_{\max}=648} \frac{L^2}{8} = 648 \Rightarrow L^2 = 8 \times 648$$

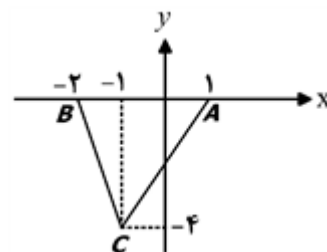
$$\Rightarrow L^2 = 16 \times 324 \Rightarrow L = 4 \times 18 = 72$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $x = 1$ و $x = -2$ نقاط بحرانی می‌باشند، برای تعیین نقطه‌ی بحرانی دیگر از تابع مشتق می‌گیریم: (برای تعیین $f' = 0$ می‌توانیم قدرمطلق را برداریم).

$$f(x) = (x-1)|x-1||x+2| \Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x+2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2$$

$$\Rightarrow (x-1)(3x+3) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(4 \times 3) = 6$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8$

جواب‌های معادله‌ی $f'(x) = 0$ طول نقاط اکسترم است.

$$x \in (1, 4) \xrightarrow{\text{بولتزانو}} f'(1) \cdot f'(4) < 0 \Rightarrow (2a - 5)(8a + 40) < 0 \Rightarrow -5 < a < 2/5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید نقطه‌ای به طول x ماکزیم نسبی باشد، پس طبق آزمون مشتق دوم، داریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{a}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 = a \Rightarrow 2a = 4x^2$$

9

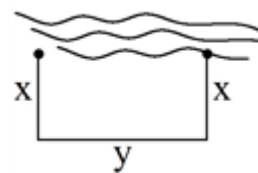
$$f''(x) < 0 \Rightarrow 2 + \frac{2a}{x^3} < 0 \Rightarrow 2 + 4 \frac{x^2}{x^3} < 0 \Rightarrow 6 < 0$$

امکان ندارد یعنی این تابع هیچ‌گاه ماکزیم نسبی نخواهد داشت.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹۶

$$\left. \begin{aligned} S &= xy \\ 2x + y &= 18 \Rightarrow y = 18 - 2x \end{aligned} \right\} S = x(18 - 2x) \Rightarrow S = -2x^2 + 18x$$

$$x_{\text{راس}} = \frac{-18}{-4} = 2.25 \Rightarrow y = 13.5 \Rightarrow S = 2.25 \times 13.5 = 30.375 = 968$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی C (عضو دامنه‌ی تابع) بحرانی است، هر گاه یکی از دو حالت زیر رخ دهد: $f'(C) = 0$ یا $f'(C)$ موجود نباشد. ۱۹۷

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \times x\right) - \sqrt{1+x^2}}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \neq 0$$

مخرج f' در $x = 0$ صفر می‌شود. ولی از آنجا که این نقطه عضو دامنه‌ی تابع نیست، بنابراین نقطه‌ی بحرانی نیست و در نتیجه تابع نقطه‌ی بحرانی ندارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آزمون مشتق اول برای حل استفاده می‌کنیم: ۱۹۸

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (*)$$

مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $x = 1$ است و با تقسیم عبارت $x^2 - 4x + 2$ بر $x - 1$ بقیه‌ی جواب‌ها را می‌یابیم:

$$x^2 - 4x + 2 \Big| \frac{x-1}{x^2+x-2} = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$(*) \rightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه ی مضاعف } x = 1 \\ \text{ریشه ی ساده } x = -2 \end{cases}$$

پس تابع تنها یک می‌نیمم نسبی دارد. دقت کنید چون $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف f' است، f' در این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۹۹

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x^2}{2} & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

دقت کنید که حدهای راست و چپ و مقدار تابع f در نقطه‌ی ۱ برابر ۱ هستند و f در این نقطه پیوسته است. همچنین طبق قضیه‌ی حد تابع مشتق $f'_+(1) = f'_-(1) = -1$ مشتق پذیر است و به همین دلیل در ضابطه‌ی f' نقطه‌ی ۱ تعریف شده است.

$$f'(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & x > 1 \end{cases}$$

توجه کنید که $f'_+(1) = 2$ و $f'_-(1) = -1$ و به همین دلیل f'' در ۱ وجود ندارد. حال جدول تعیین علامت f'' را رسم می‌کنیم.

x	-∞	۱	+∞	(علامت به معنی تعریف نشده است.)
f''	-		+	

بنابراین تقعر f در نقطه ۱ تغییر می‌کند و چون f در این نقطه مشتق پذیر است، مماس بر منحنی نیز وجود دارد و این نقطه‌ی عطف f محسوب می‌شود.

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

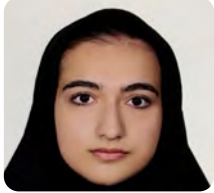
۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴

۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۲۸	۱	۲	۳	۴

۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴

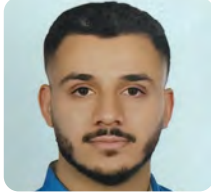
۱۶۱	۱	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	۴
۱۶۳	۱	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	۴
۱۶۵	۱	۲	۳	۴
۱۶۶	۱	۲	۳	۴
۱۶۷	۱	۲	۳	۴
۱۶۸	۱	۲	۳	۴
۱۶۹	۱	۲	۳	۴
۱۷۰	۱	۲	۳	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	۴
۱۷۲	۱	۲	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	۳	۴
۱۷۴	۱	۲	۳	۴
۱۷۵	۱	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	۲	۳	۴
۱۷۷	۱	۲	۳	۴
۱۷۸	۱	۲	۳	۴
۱۷۹	۱	۲	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	۴
۱۸۱	۱	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	۲	۳	۴
۱۸۳	۱	۲	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	۳	۴
۱۸۵	۱	۲	۳	۴
۱۸۶	۱	۲	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	۴
۱۸۸	۱	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	۳	۴
۱۹۰	۱	۲	۳	۴
۱۹۱	۱	۲	۳	۴
۱۹۲	۱	۲	۳	۴

۱۹۳	۱	۲	۳	۴
۱۹۴	۱	۲	۳	۴
۱۹۵	۱	۲	۳	۴
۱۹۶	۱	۲	۳	۴
۱۹۷	۱	۲	۳	۴
۱۹۸	۱	۲	۳	۴
۱۹۹	۱	۲	۳	۴



مهديس رفيعی

اعضای مصنوعی و وسایل کمکی
علوم پزشکی ایران



شایان جعفری

دندانپزشکی
علوم پزشکی بندرعباس



نرگس مردانی

پرستاری
علوم پزشکی ایران



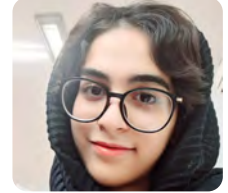
یاسینا نوروزی

پزشکی
جندی شاپور



هانیه مصدق

پرستاری
آزاد نیشابور



مهشید فاطمی

پزشکی
علوم پزشکی کاشان



مبینا گودرزی

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی سبزوار



مأده نظری

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی گرگان



ابوالفضل حسینی

دندانپزشکی
علوم پزشکی رشت



محمدحسین نظری

پزشکی
علوم پزشکی همدان



زهرا حمدي

علوم آزمایشگاهی
علوم پزشکی دزفول



ابراهیم هناره

دندانپزشکی
علوم پزشکی ارومیه



هستی عباسلو

هوشبری
علوم پزشکی رفسنجان



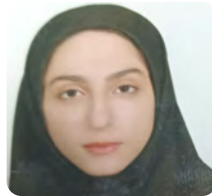
سارا مرادی

پرستاری
دانشگاه آزاد واحد شهرکرد



شنتیا زمانی

دندانپزشکی
علوم پزشکی شهید بهشتی



نگار دلاوری

پرستاری
آزاد رشت



سحر درخشان

پزشکی
آزاد نجف آباد



پریسا سادات موسوی

زیست شناسی سلولی و مولکولی
دانشگاه تهران



سوغند تیموری

پزشکی
علوم پزشکی کرمانشاه



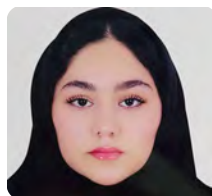
محدثه خان محمدی

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی زنجان



محمدصفا مارمائی

پزشکی
علوم پزشکی گرگان



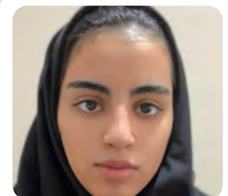
ملیکا ابراهیمی نژاد

دندانپزشکی
آزاد بروجرد



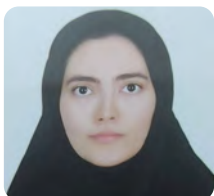
الینا بصیری

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی همدان



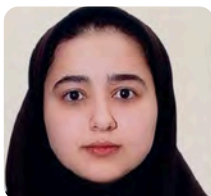
فاطمه حبیبی

پزشکی
علوم پزشکی سمنان



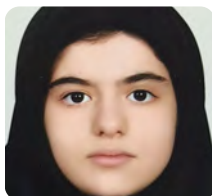
فاطمه محمد رحیمی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند



زینب رنجبر

پرستاری
آزاد اسلامی واحد ساری



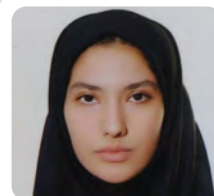
بهار اسلامی

پزشکی
علوم پزشکی رشت



محمدامین متین

پزشکی
علوم پزشکی دزفول



فاطمه شریفی پیرکوهی

فیزیوتراپی
دانشگاه علوم پزشکی جندی شاپور



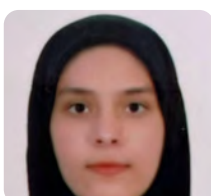
محمدفرحان کریمی

پرستاری
علوم پزشکی بابل



نرگس کلیج

پزشکی
علوم پزشکی سمنان



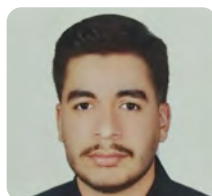
شایان جعفری

کار درمانی
علوم توانبخشی و سلامت اجتماعی تهران



فاطمه میرزایی

پزشکی
علوم پزشکی زنجان



محمدرضا اسپرانی

پزشکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان



مینو رسولی

پزشکی
علوم پزشکی شیراز



ساناز جعفری

علوم تغذیه
علوم پزشکی اصفهان



فاطمه علی پناه

پزشکی
علوم پزشکی مازندران



الهه غلامپور

پزشکی
علوم پزشکی مازندران



عرشیا نادری

پزشکی
آزاد اسلامی واحد نجف آباد



هانیه اعتمادی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری



زهرا حمدی

پزشکی
علوم پزشکی زنجان



سحر قنبری

داروسازی
علوم پزشکی کرمان



سجاد قویدل

مهندسی صنایع
دانشگاه صنعتی اصفهان



نرگس دهاقین

داروسازی
علوم پزشکی همدان



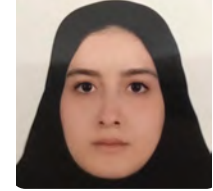
امیرعلی جهانشاهی

داروسازی
علوم پزشکی مازندران



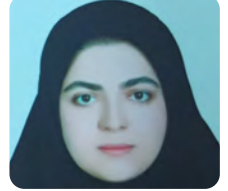
فاطمه رحمانی

دندانپزشکی
علوم پزشکی زنجان



پارمیس یوسفی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند



فرناز اقایبی

پرستاری
علوم پزشکی کاشان



محمد اکبری

مهندسی برق
دانشگاه صنعتی اصفهان



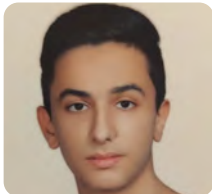
ثنا شریفی

آمار
دانشگاه علامه طباطبایی تهران



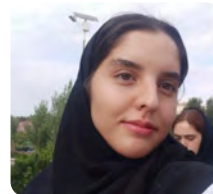
سوگند احمدی

مهندسی نفت
دانشگاه شیراز



علی فتاح

مهندسی صنایع
دانشگاه یزد



مهتاب سلیمی

ریاضیات و کاربرد ها
دانشگاه الزهراء(س)



عرشیا شفیع زاده

مهندسی برق
شهید باهنر کرمان



مهسا یاری

بیم سنجی
دانشگاه شهید بهشتی تهران



محمد شیرزایی

مهندسی مکانیک
دانشگاه فردوسی مشهد



ماهان استرکی

مهندسی شیمی
دانشگاه صنعت نفت آبادان



یاس سنجرانی

مهندسی مکانیک
دانشگاه کاشان



کوثر صحتی

مهندسی معماری
دانشگاه خوارزمی تهران



حمید رضا بهزادی

مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شریف



مهلا الهی

مهندسی علم و مواد
دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل



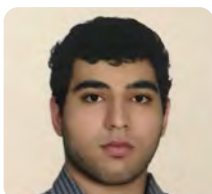
محمد هادی تاجیکی

مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید رجایی



آرمن دارابی

مهندسی مکانیک
دانشگاه قم



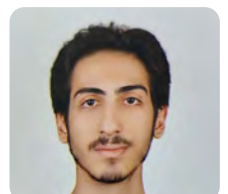
حامد لاوی

مهندسی شیمی
صنعتی نوشیروانی بابل



مبینا مروتی

حسابداری
دانشگاه تهران



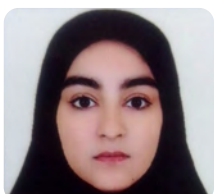
محمد حسن نوابی

مهندسی مکانیک
دانشگاه بوعلی همدان



ساره کریمی

اقتصاد
دانشگاه خوارزمی تهران



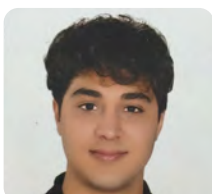
مبینا رودنی

حسابداری
دانشگاه زاهدان



زینب میرزائی

حسابداری
دانشگاه اراک



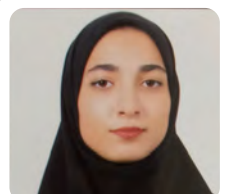
ایلید پورمهدی

سینما
دانشگاه دامغان



فهیمه امیری مقدم

نوازندگی موسیقی جهانی
دانشگاه تهران



نگار مشهدی

عکاسی
دانشگاه سمنان