فصل اول:ترسیم های هندسی — ۱۴ سوال

۱ برای کدام گزاره، نمی‌توان مثال نقض ارائه کرد؟

۱) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، همنهشت‌اند.

۲) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث، کوچک‌تر است.

۳) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

۴) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه از ۴ برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲ با استفاده از کدام روش رسم زیر، می‌توانیم نقطه‌ای در فاصله بین دو ضلع یک زاویه بیابیم به طوری‌که فاصله آن نقطه از یک ضلع زاویه دو برابر فاصله آن نقطه از ضلع دیگر زاویه باشد؟

۱) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

۲) رسم خط موازی با نیمساز یک زاویه، از نقطه‌ای روی آن

۳) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

۴) رسم خط موازی با یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

۳ با استفاده از کدام روش رسم زیر، می‌توانیم نقطه‌ای در فاصله بین دو ضلع یک زاویه بیابیم به طوری‌که فاصله آن نقطه از یک ضلع زاویه ۱/۵ برابر فاصله آن نقطه از ضلع دیگر زاویه باشد؟

۱) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

۲) رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

۳) رسم خط موازی با نیمساز یک زاویه، از نقطه‌ای روی آن

۴) رسم خط موازی با یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴ مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}$ محیط شده است. برای رسم عمودمنصف یکی از ساق‌های این مثلث، باید دهانهٔ پرگار را حداقل بیشتر از کدام عدد زیر باز کرد؟

۱) $۲-\sqrt{۲}$

۲) $۲+\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt{۲}-۱$

۴) $\sqrt{۲}+۱$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۵ در یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ قاعده ۱۶ و اندازهٔ میانه وارد بر آن، نصف قاعده است. اندازه میانه نظیر هر ساق کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۲}\sqrt{۵}$

۲) $\frac{۷}{۲}\sqrt{۱۰}$

۳) $۶\sqrt{۵}$

۴) $۴\sqrt{۱۰}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۶ فاصله کدام نقطه از سه ضلع مثلث ABC، همواره یکسان است؟

۱) تلاقی سه ارتفاع ۲) تلاقی سه میانه ۳) تلاقی سه نیمساز ۴) تلاقی سه عمودمنصف

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۷ برای کدام گزاره، می‌توان مثال نقض ارائه کرد؟

۱) هر چهارضلعی که قطرها یکدیگر را نصف کنند، متوازی‌الاضلاع است.

۲) اندازه میانه‌های وارد بر اضلاع مساوی در هر مثلث، با هم برابرند.

۳) هر چهارضلعی با قطرهای برابر و عمود بر هم، مربع است.

۴) نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۸ در مثلث ABC، $AB = AC$ و عمودمنصف AB، ضلع AC را در نقطه M قطع می‌کند. اگر $B\widehat{A}M = ۲۴^\circ$ باشد، اندازه زاویه $B\widehat{M}C$ چند درجه است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۷۸

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۹ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $\widehat{A} = ۸۰^\circ$ و عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در نقاط M و N قطع می‌کند. کوچک‌ترین زاویه مثلث AMN چند درجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ M وسط ساق AB و عمودمنصف آن، ساق AC را در نقطه N قطع می‌کند. اگر $N\widehat{B}C = ۵۴^\circ$ باشد، اندازه زاویه $M\widehat{N}B$ چند درجه است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۶ ۴) ۷۸

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۱ مثلث ABC یک مثلث حاده‌الزاویه است. عمودمنصف ضلع BC و نیمساز زاویه‌ی B در نقطه‌ی M در خارج مثلث متقاطع‌اند. کدام گزینه درست است؟

۱) $\widehat{A} > \widehat{B}$ ۲) $\widehat{B} < \widehat{A}$ ۳) $\widehat{B} > ۲\widehat{C}$ ۴) $\widehat{B} < ۲\widehat{C}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲ در یک مثلث با زاویه‌ی ۱۳۸°، کوچک‌ترین زاویه‌ی بین دو نیمساز خارجی به درجه، کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۱/۵ ۳) ۳۴/۵ ۴) ۴۲

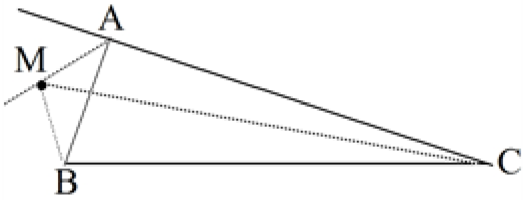
سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳ چند نقطه‌ی متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحه‌ی مختصات، می‌توان یافت که فاصله‌ی رأس C از نقطه‌ی A و پاره‌خط AB، به‌ترتیب ۷ و ۵ واحد، باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۴ در شکل روبه‌رو، نقطه‌ی M روی نیم‌ساز خارجی زاویه‌ی A است. نسبت $\dfrac{MB+MC}{AB+AC}$ ، چگونه است؟



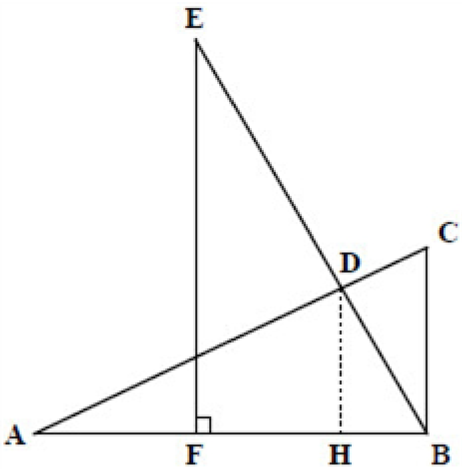
۱) بزرگ‌تر از ۱
۲) کم‌تر از ۱
۳) برابر با ۱
۴) غیرمشخص

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

فصل دوم : قضیه تالس

۳۳ سوال

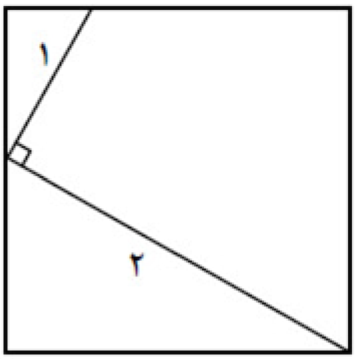
۱۵ در شکل مقابل، دو مثلث ABC و BEF همنهشت هستند. اگر $BC=۱$، $AB=۲$ و $EF \parallel DH$ باشد، اندازه DH کدام است؟



۱) $۰/۵۵$
۲) $۰/۶$
۳) $۰/۷۵$
۴) $۰/۸$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

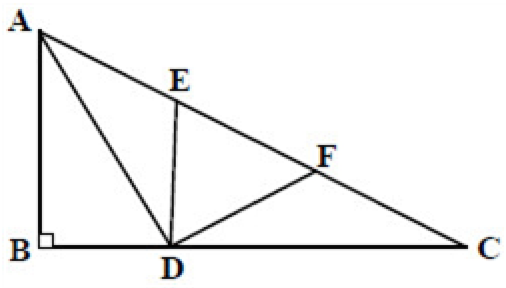
۱۶ مساحت مربع شکل مقابل، چقدر است؟



۱) $۴/۹$
۲) $۴/۵$
۳) $۳/۶$
۴) $۳/۲$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

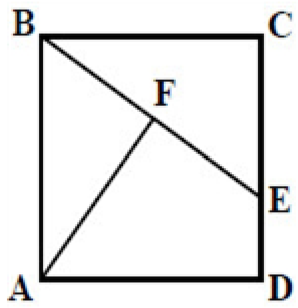
۱۷ در مثلث شکل مقابل، اگر مثلث DEF متساوی‌الاضلاع و مثلث‌های ADE و CFD متساوی‌الساقین باشند، آنگاه $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$ کدام است؟



۱) ۲
۲) $۱/۵$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

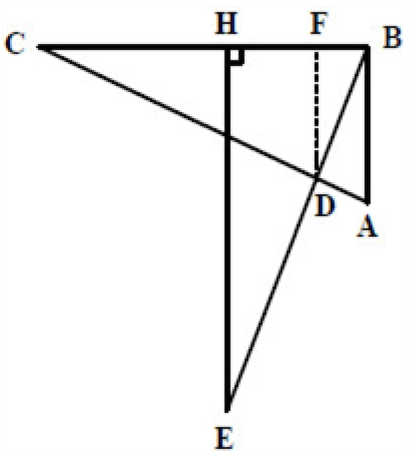
۱۸ در مربع شکل مقابل، $\mathrm{CD} = ۳\,\mathrm{ED}$ و نقطهٔ F، وسط پاره‌خط BE قرار دارد. اگر $\mathrm{AF} = ۵$ باشد، مساحت چهارضلعی ADEF کدام است؟



۱) ۱۰
۲) ۱۵
۳) ۲۰
۴) ۲۵

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

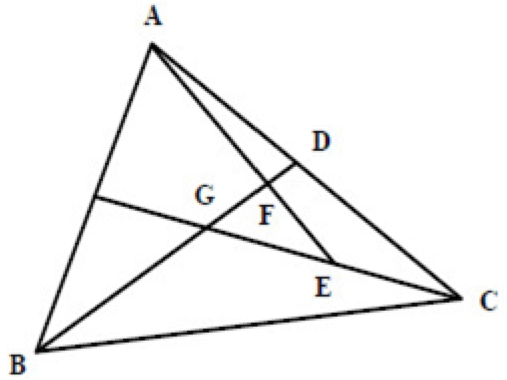
۱۹ در شکل مقابل، دو مثلث ABC و BEH همنهشت هستند. اگر $\mathrm{AB} = ۴$، $\mathrm{EH} = ۸$ و $\mathrm{EH} \parallel \mathrm{DF}$ باشد، اندازه BF کدام است؟



۱) $۱/۴$
۲) $۱/۶$
۳) $۲/۴$
۴) $۲/۶$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

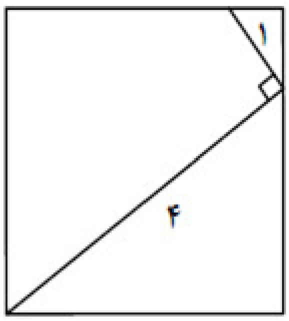
۲۰ در شکل مقابل، G مرکز ثقل مثلث ABC است. اگر $\mathrm{GE} = \mathrm{EC}$ باشد، مقدار $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{FD}}$ کدام است؟



۱) ۹　　۲) ۸　　۳) ۶　　۴) ۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

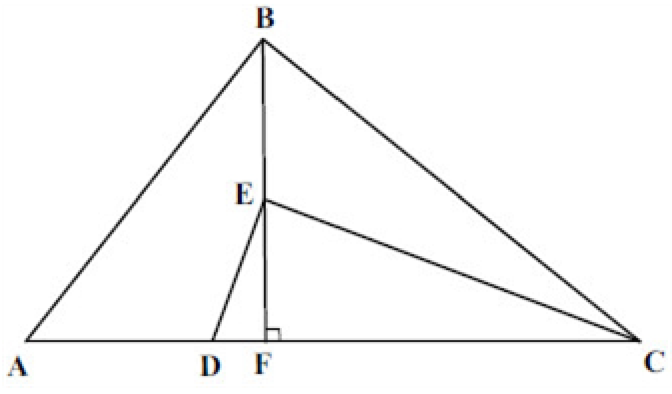
۲۱ مساحت مربع شکل زیر، چقدر است؟



۱) ۱۳/۳۱　　۲) ۷/۲۹　　۳) ۸/۴۱　　۴) ۱۰/۲۴

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

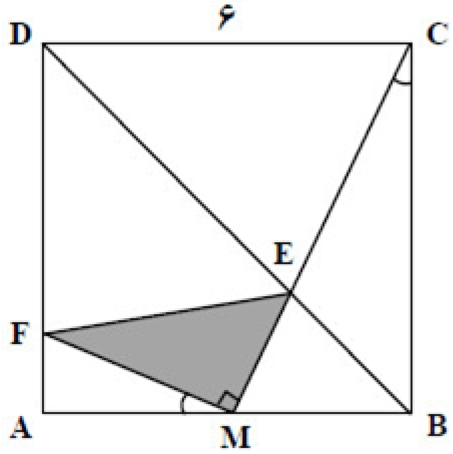
۲۲ در شکل مقابل، $A\widehat{B}C = C\widehat{E}D = ۹۰^\circ$ است. اگر $\mathrm{AD} = ۳$، $\mathrm{EF} = ۴$ و $\mathrm{DF} = ۱$ باشد، اندازه BC کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۶}$　　۲) $۱۰\sqrt{۲}$　　۳) $۶\sqrt{۳}$　　۴) $۸\sqrt{۵}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

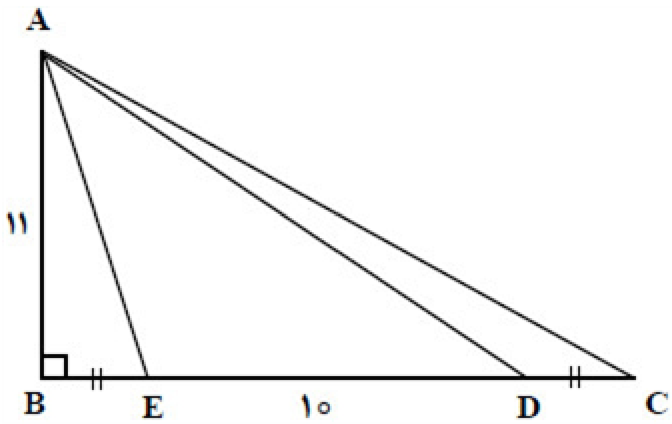
۲۳ در مربع شکل مقابل، نقطه M وسط ضلع AB و $B\widehat{C}E = A\widehat{M}F$ است. مساحت مثلث سایه‌خورده کدام است؟



۱) ۴/۷۵ ۲) ۴/۲۵ ۳) ۳/۷۵ ۴) ۳/۲۵

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

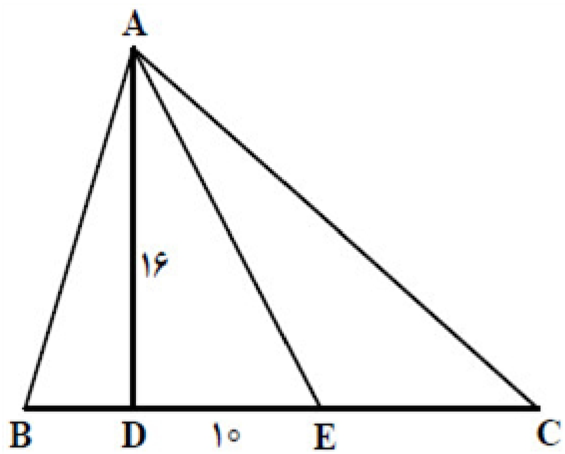
۲۴ در شکل مقابل، $D\widehat{A}E = A\widehat{C}D$ و $\mathrm{BE} = \mathrm{DC}$ است. اندازه DC کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۲۵ در شکل مقابل، $B\widehat{A}D = E\widehat{A}C$ و $\mathrm{BA} = \mathrm{BE}$ است. طول EC کدام است؟



۱) ۸/۷ ۲) ۱۲/۴ ۳) ۹/۳ ۴) ۱۵/۶

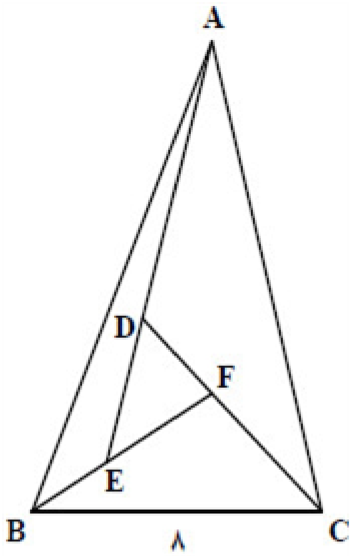
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۶ در یک مستطیل، خط‌هایی از دو رأس مقابل بر یک قطر عمود می‌شوند و آن قطر به سه قسمت طوری تقسیم می‌شود که قسمت وسط دو برابر هریک از قسمت‌های کناری است. مساحت این مستطیل چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ایجاد شده در مستطیل است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۲ ۴) ۸

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

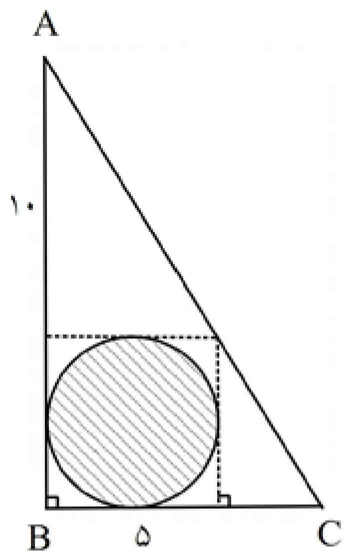
۲۷ در شکل مقابل، $A\widehat{B}F = C\widehat{A}E = B\widehat{C}D$، $\mathrm{DF} = ۲/۵$ و $\mathrm{EF} = ۳$ است. طول AB کدام است؟



۱) $۸/۶$ ۲) $۷/۵$ ۳) $۱۰/۵$ ۴) $۹/۶$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

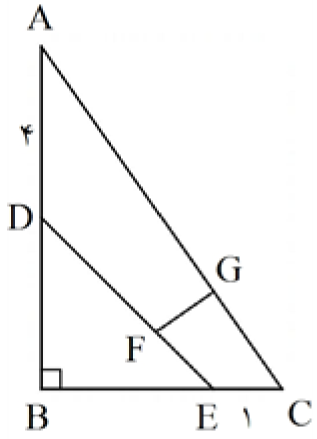
۲۸ اگر اندازه اضلاع قائمه مثلث ABC، ۵ و ۱۰ باشد، مساحت ناحیه هاشورخورده، کدام است؟



۱) $\frac{۲۵}{۹}\pi$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}\pi$ ۳) $\frac{۹}{۴}\pi$ ۴) $\frac{۵}{۴}\pi$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

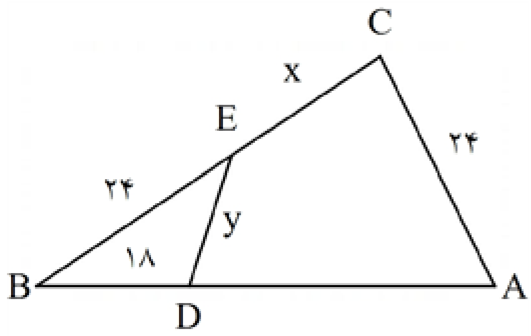
۲۹ در شکل مقابل، اگر $\frac{DE}{EF} = \frac{AC}{CG} = ۴$ باشد، اندازه FG کدام است؟



۱) ۱
۲) ۱/۲۵
۳) ۱/۵
۴) ۱/۷۵

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۳۰ در شکل مقابل، $B\widehat{D}E = E\widehat{C}A$ و $AB = ۴۸$ است. مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۱ در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر ایجاد می‌کند ۲/۵ و ۱۴/۴ سانتی‌متر است. طول ارتفاع وارد بر وتر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴/۸
۲) ۶
۳) ۷/۲
۴) ۸

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۳۲ در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱، طول یکی از ارتفاع‌ها برابر $AH = ۸$ است. اگر M، N و P وسط اضلاع باشند، مساحت چهارضلعی که M، N، P و H رأس‌های آن هستند، کدام است؟

۱) ۲۷
۲) ۲۸
۳) ۲۹
۴) ۳۰

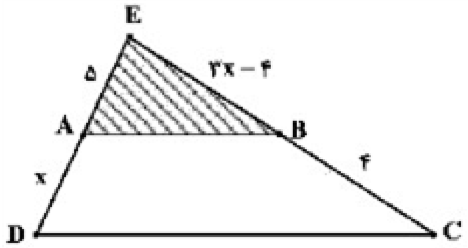
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۳ رأس‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی اضلاع یک مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر قرار دارد، به طوری‌که اضلاع آن بر یک‌دیگر عمودند. نسبت مساحت مثلث بزرگ‌تر به مساحت مثلث کوچک‌تر، کدام است؟

۱) ۳
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۳/۵
۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

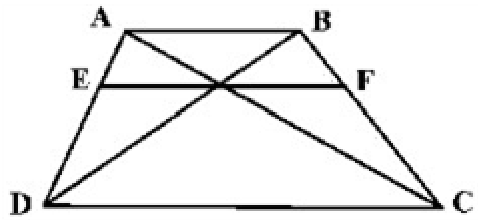
۳۴ در شکل زیر، مساحت ذوزنقه‌ی $ABCD$، چند برابر مساحت مثلث EAB است؟



۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۵ در شکل زیر، $AB \parallel EF \parallel DC$ و اندازه‌ی پاره‌خط های AB و DC، به‌ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازه‌ی پاره‌خط EF، کدام است؟



۱) $\frac{۴۵}{۷}$ ۲) $\frac{۴۵}{۶}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) ۷

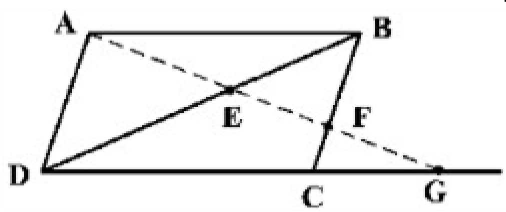
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۶ اندازه‌ی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای، به صورت $x+۱$، $۲x+۱$ و $۲x+۳$ است. مساحت مثلث، کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۵۶ ۳) ۴۵ ۴) ۳۹

سراسری-ریاضی-۹۹

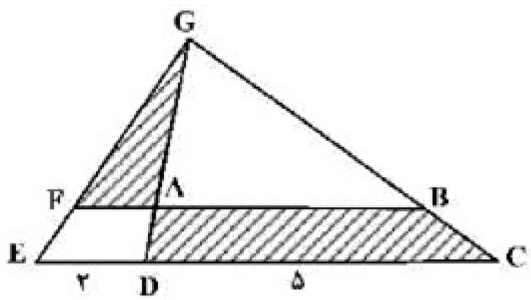
۳۷ در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟



۱) $EA^۲$ ۲) $ED^۲$ ۳) $EB \times ED$ ۴) $FB \times FC$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

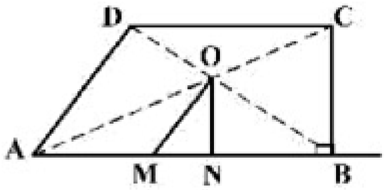
۳۸ در شکل زیر، $DG = ۳DA$ و اندازه‌ی پاره‌خط های DE و DC، به‌ترتیب، ۲ و ۵ واحد هستند. مساحت مثلث AFG، چند درصد مساحت ذوزنقه‌ی ABCD است؟



۱) ۴۰ ۲) ۳۶ ۳) ۳۲ ۴) ۲۴

سراسری-ریاضی-۹۹

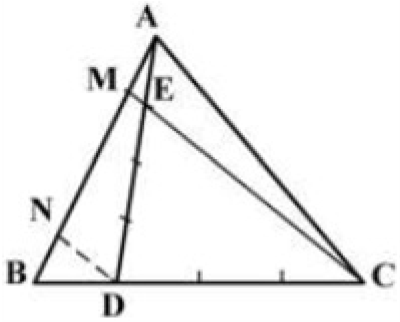
۳۹ مطابق شکل زیر، از محل تلاقی قطرهای ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ی $ABCD$ $(\widehat{B} = ۹۰^\circ)$، پاره‌خط های OM و ON به‌ترتیب موازی با AD و BC رسم شده‌اند. نسبت $\frac{AM}{BN}$، کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) کوچک‌تر از ۱
۴) بزرگ‌تر از ۱ کوچک‌تر از ۲

سراسری-ریاضی-۹۹

۴۰ در شکل زیر، $BD = \frac{۱}{۴}BC$ و $AE = \frac{۱}{۴}AD$ و $CM \parallel DN$، اندازه‌ی AB چند برابر AM است؟



۱) ۴
۲) $۴/۵$
۳) ۵
۴) ۶

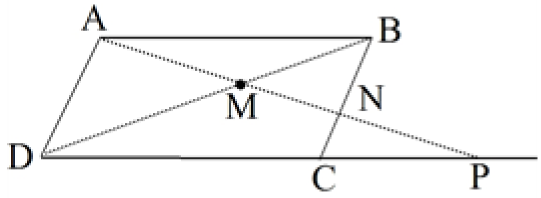
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۱ مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

۱) $۲/۲۵$
۲) $۲/۵$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

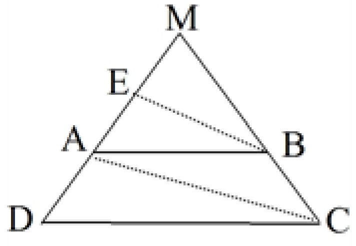
۴۲ در شکل روبه‌رو، ABCD متوازی‌الاضلاع است. حاصل $MN \times MP$ برابر کدام است؟



۱) $AB^۲$
۲) $AD^۲$
۳) $MD^۲$
۴) $MA^۲$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

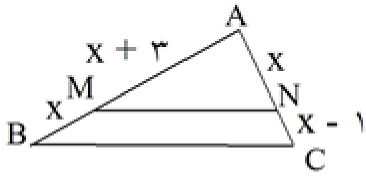
۴۳ در ذوزنقه ABCD ، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر $AD = ۷$ و $AE = ۳$ باشد، فاصله‌ی MD کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۲/۲۵
۳) ۱۲/۵
۴) ۱۲/۷۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

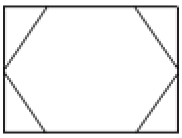
۴۴ در شکل مقابل، MN موازی BC است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟



۱) $۱\frac{۲}{۳}$ ۲) $۱\frac{۵}{۹}$ ۳) $۱\frac{۷}{۹}$ ۴) $۱\frac{۸}{۹}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

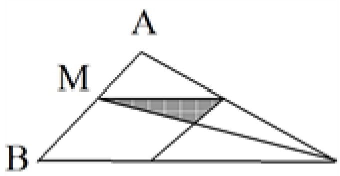
۴۵ در شکل مقابل محیط شش ضلعی منتظم چند برابر محیط مستطیل، محیط بر آن است؟



۱) $۳(\sqrt{۲}-۱)$ ۲) $۳(۳-۲\sqrt{۲})$ ۳) $۲(\sqrt{۳}-۱)$ ۴) $۳(۲-\sqrt{۳})$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۶ در شکل مقابل $\frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۳}$، مساحت مثلث سایه‌زده چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



۱) ۲۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۷ در مثلث ABC داریم $AC=\frac{\sqrt{۵}}{۲}AB$, $\widehat{A}=۹۰$، ارتفاع AH و میانه AM رسم شده‌است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث AMH است؟

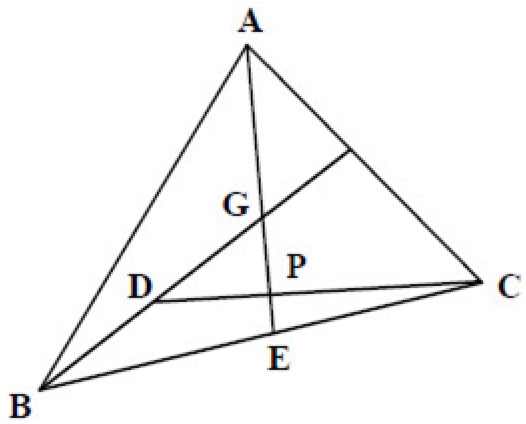
۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

فصل سوم : چند ضلعی ها

۱۶ سوال

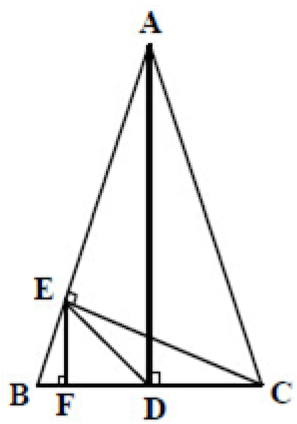
۴۸) در شکل مقابل، نقطه G مرکز ثقل مثلث ABC است. اگر $BD = DG$ باشد، مقدار $\frac{AG}{GP}$ کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۳/۵ ۳) ۴ ۴) ۴/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۹) در شکل مقابل، مثلث ABC متساوی‌الساقین بوده و $AB = ۲CE$ است. اگر $DE = ۲\sqrt{۳} + ۴$ باشد، اندازهٔ BF کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۵۰) در مثلث ABC، طول دو میانه عمود بر هم رسم شده از رأس‌های B و C به ترتیب، ۱۲ و ۹ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۵۴ ۳) ۶۴ ۴) ۷۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۱) از رئوس دو سر قطر کوچک یک متوازی‌الاضلاع، خط‌هایی عمود بر قطر بزرگ رسم می‌کنیم تا سه پاره‌خط روی آن ایجاد شود و امتداد این خطوط ضلع مقابل را قطع کند. اگر طول پاره‌خط وسطی روی قطر بزرگ نصف طول پاره‌خط‌های کناری باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع کوچک حاصل از دو عمود رسم شده چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث ساخته شده در شکل است؟

۱) ۳ ۲) ۲/۵ ۳) ۲ ۴) ۱/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۲ در یک لوزی، هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه بزرگ‌تر لوزی، چند درجه است؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۱۵

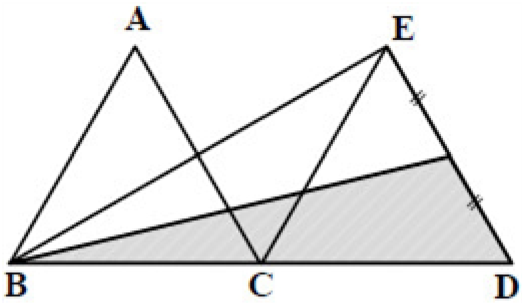
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۳ در مثلث ABC، میانه‌های رسم شده از رأس‌های B و C بر هم عمودند. اگر طول میانه رسم شده از رأس C برابر ۴/۵ و مساحت این مثلث برابر ۱۸ باشد، نسبت طول میانه‌های رسم شده از دو رأس B و C کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۹}$ ۲) $\frac{۱۹}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۵۴ در شکل مقابل، مثلث‌های ABC و CDE متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ سانتی‌متر هستند. مساحت ناحیه هاشورخورده چند سانتی‌متر مربع است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $۴\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۵ در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازه دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر ایجاد می‌کند، ۶/۴ و ۳/۶ سانتی‌متر است. مجموع اندازه‌های دو ضلع زاویه قائمه در این مثلث، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۶ در یک nضلعی، با کم شدن یک ضلع، ۱۶ قطر از تعداد قطرهای آن کم می‌شود. اگر دو ضلع کم شود، چند قطر از تعداد قطرها کم می‌شود؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

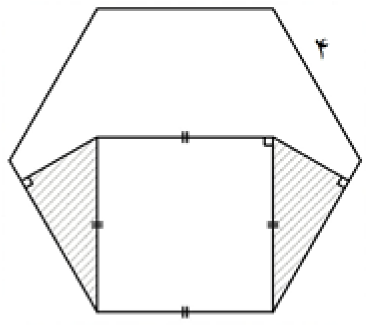
سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۵۷ در یک لوزی هر ضلع واسطه هندسی دو قطر لوزی است. اندازه زاویه کوچک‌تر در هر مثلث حاصل از رسم قطرهای این لوزی چند درجه است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۳۰ ۴) ۴۵

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

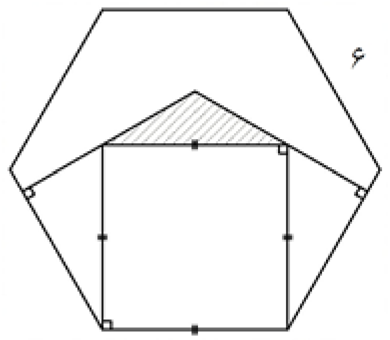
۵۸ در شش‌ضلعی منتظم زیر، مساحت ناحیه هاشورخورده چند سانتی‌متر مربع است؟



۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $۳\sqrt{۳}$
۴) $۴\sqrt{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

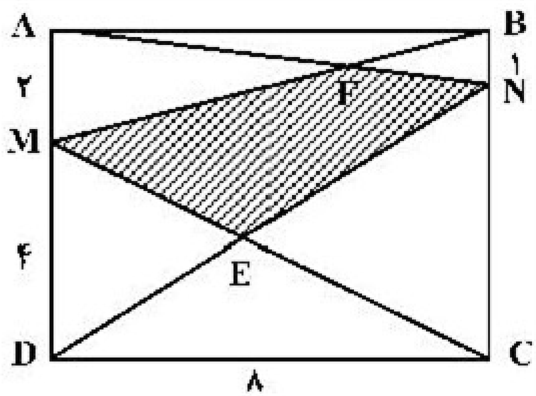
۵۹ در شش‌ضلعی منتظم زیر، مساحت ناحیه هاشورخورده چند سانتی‌متر مربع است؟



۱) $۳\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) ۳
۴) ۲

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۶۰ مستطیل ABCD مطابق شکل زیر مفروض است. مساحت چهارضلعی MENF، کدام است؟



۱) $\frac{۱۰۴}{۹}$
۲) ۱۳
۳) $\frac{۴۷}{۳}$
۴) ۱۶

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۶۱ طول یک مستطیل ۲ واحد کم‌تر از ۱/۵ برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۱۹۲ واحد مربع باشد، محیط آن کدام است؟

۱) ۵۲
۲) ۵۶
۳) ۶۰
۴) ۶۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۲ اندازه‌ی قاعده‌های ذوزنقه‌ای ۵ و ۹ واحد است. پاره‌خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه چنان رسم می‌کنیم که ذوزنقه را به دو قسمت با مساحت مساوی، تقسیم کند. اندازه‌ی پاره‌خط ، کدام است؟

۱) ۷ ۲) $\sqrt{۵۳}$ ۳) $\sqrt[۴]{۳}$ ۴) $\sqrt{۵۷}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۶۳ در یک چهارضلعی، از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن، یک مربع ایجاد شده است. الزاماً نوع این چهارضلعی کدام است؟

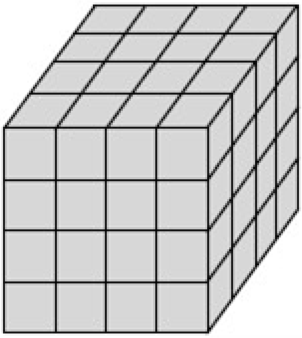
۱) محاطی ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) محیطی ۴) مستطیل

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

فصل چهارم : تجسم فضایی

۱۳ سوال

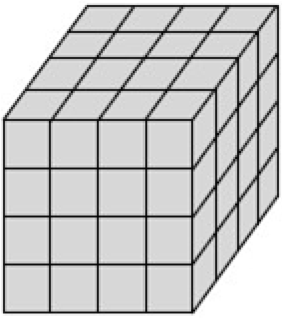
۶۴ تمام وجه‌های مکعب به ابعاد ۴×۴×۴ شکل مقابل، رنگ‌آمیزی شده است. چند مکعب به ابعاد ۱×۱×۱ وجود دارد که فقط یک وجه‌شان رنگ شده است؟



۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

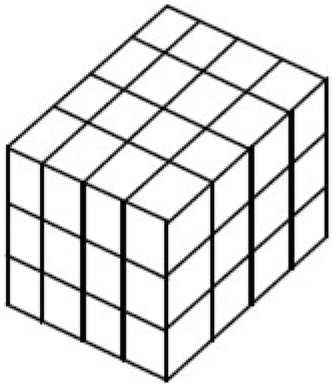
۶۵ تمام وجه‌های مکعب شکل مقابل رنگ‌آمیزی شده است. تعداد مکعبات کوچک رنگ شده چند برابر تعداد مکعبات کوچک رنگ نشده است؟

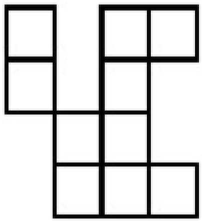


۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۶ حداکثر چند مکعب کوچک باید از مکعب سمت چپ برداشته شود تا نمای بالا به صورت شکل سمت راست باشد؟





۱) ۲۴ ۲) ۳۸ ۳) ۱۸ ۴) ۱۴

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۶۷ در فضا، دو خط L_1 و L_2 موازی هستند. اگر خط d خط L_1 را در یک نقطه قطع کند، کدام مورد در خصوص وضعیت خط d و L_2 همواره درست است؟

۱) متنافرند ۲) موازی‌اند ۳) غیرمتقاطع‌اند ۴) غیرموازی‌اند

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۶۸ دو کره به شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، که مرکزهای آن‌ها با یک‌دیگر ۵ واحد فاصله دارند، متقاطع‌اند. مساحت مکان هندسی نقاط مشترک این دو کره، کدام است؟

۱) $۳/۲۴\pi$ ۲) $۴/۴۱\pi$ ۳) $۴/۸\pi$ ۴) $۵/۷۶\pi$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۹ حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به‌ترتیب با اندازه‌های ۵ و $۲\sqrt{۶}$ واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

۱) ۶۰π ۲) ۷۰π ۳) ۷۵π ۴) ۸۰π

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۰ در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۱ خط d و صفحه‌ی P و نقطه‌ی A در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطه‌ی A، موازی صفحه‌ی P و متقاطع با خط d، در کدام وضعیت، خط و صفحه مفروض، تنها یک جواب دارد؟

۱) الزاماً عمود ۲) منطبق ۳) موازی ۴) متقاطع

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۲ چهار نقطه‌ی A و B و C و D در فضا مفروض است به طوری‌که امتدادهای AB و CD متنافرند. تصاویر این نقاط بر صفحه‌ی عمود بر خطی که از وسط AC و وسط BD بگذرد، رأس‌های کدام چهارضلعی است؟

۱) متوازی‌الاضلاع ۲) لوزی ۳) ذوزنقه ۴) غیرمشخص

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۳ در یک هرم منتظم با قاعده‌ی مربع، ارتفاع هرم ۴ و ارتفاع مثلث جانبی آن $۲\sqrt{۷}$ واحد است. حجم این هرم، چند واحد مکعب است؟

۱) ۳۶ ۲) ۴۸ ۳) ۵۴ ۴) ۶۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۴ قاعده‌ی منشور قائم، شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ واحد و طول یال قائم آن ۷/۵ واحد است. حجم بزرگ‌ترین استوانه که در داخل این منشور جای گیرد، چند برابر π است؟

۱) ۷۵ ۲) ۸۴ ۳) ۹۰ ۴) ۱۰۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۷۵ از داخل یک استوانه‌ی قائم توپُر، به شعاع قاعده‌ی ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده‌ی مخروط به فاصله‌ی ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

۱) $۱۰/۳۶\pi$ ۲) $۱۱/۲۸\pi$ ۳) $۱۲/۵۶\pi$ ۴) $۱۳/۴۴\pi$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

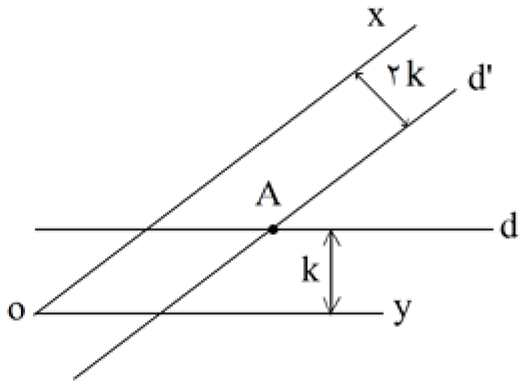
۷۶ در یک مکعب مستطیل، با امتداد تمام یال‌ها، هر یال با چند یال دیگر، متنافر است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

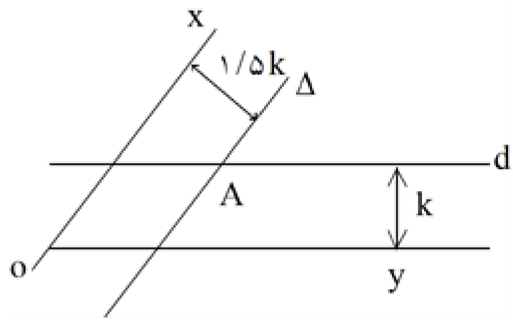
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. گزینهٔ ۳ یک گزاره همیشه درست پس یک قضیه است. پس برای‌آن مثال نقض وجود ندارد.
توجه کنید سایر گزینه‌ها قضیه نیستند پس برای آنها مثال نقض وجود دارد.

۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زاویهٔ xoy را در نظر بگیرید. خط d را موازی ضلع oy به فاصلهٔ k از آن و خط d' را موازی ضلع ox به فاصلهٔ $۲k$ از آن رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی این خط یعنی نقطهٔ A جواب سؤال است.



۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. زاویهٔ xoy را در نظر بگیرید خط d را موازی ضلع oy به فاصلهٔ معلوم k و خط Δ را موازی ضلع ox به فاصلهٔ معلوم $۱/۵k$ از آن رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی دو خط d و Δ یعنی A نقطه مورد نظر سؤال است. پس برای پیدا کردن نقطه مطلوب از رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن استفاده می‌کنیم.

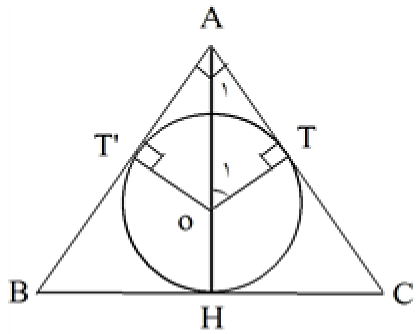


۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد. برای رسم عمودمنصف AC باید کمانی بزرگ‌تر از نصف AC بزنیم. با توجه به شکل اگر O مرکز دایرهٔ محاطی باشد پس $\mathrm{OT} = \mathrm{OT}' = \sqrt{۲}$. در نتیجه OA نیمساز زاویهٔ A است بنابراین مثلث $\overset{\triangle}{OAT}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. یعنی $\widehat{A}_۱ = \widehat{O}_۱ = ۴۵^\circ$ پس $\mathrm{AT} = \mathrm{OT} = \sqrt{۲}$ پس $\mathrm{OA} = ۲$ بنابراین $\mathrm{AH} = ۲ + \sqrt{۲}$. در نتیجه:

$$\overset{\triangle}{AHC} : \widehat{C} = ۴۵^\circ \Rightarrow \mathrm{AH} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathrm{AC} \Rightarrow ۲ + \sqrt{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathrm{AC} \Rightarrow \sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathrm{AC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{۲}+۱ = \frac{۱}{۲}\mathrm{AC}$$

پس طول کمان برای رسم عمودمنصف AC باید از $\frac{۱}{۲}\mathrm{AC}$ یعنی از $\sqrt{۲}+۱$ بزرگ‌تر باشد.



۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده میانه هم هست. پس مثلث‌های ACH و ABH قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین هستند بنابراین $A_۱ = A_۲ = \widehat{C} = \widehat{B} = ۴۵^\circ$ در نتیجه $\widehat{A} = ۹۰^\circ$.

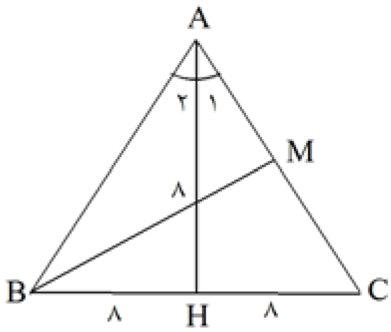
در صورتی‌که BM میانه نظیر ساق AC باشد، داریم:

$$\overset{\triangle}{AHC} : \mathrm{AC}^۲ = \mathrm{AH}^۲ + \mathrm{CH}^۲ = ۸^۲ + ۸^۲ = ۲\times ۸^۲$$

$$\Rightarrow \mathrm{AC} = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow \mathrm{AM} = ۴\sqrt{۲}$$

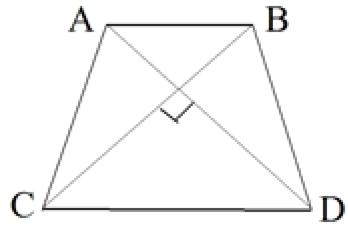
$$\overset{\triangle}{ABM} : \mathrm{BM}^۲ = \mathrm{AB}^۲ + \mathrm{AM}^۲ \Rightarrow \mathrm{BM}^۲ = (۸\sqrt{۲})^۲ + (۴\sqrt{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \mathrm{BM}^۲ = ۱۲۸ + ۳۲ = ۱۶۰ \Rightarrow \mathrm{BM} = ۴\sqrt{۱۰}$$



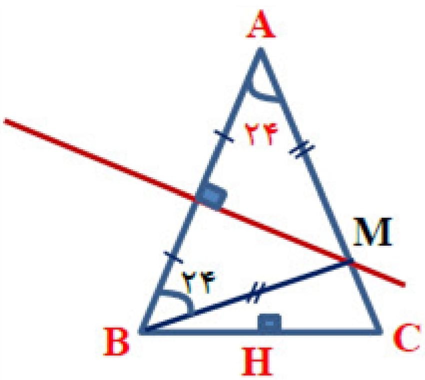
۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی نیمسازها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD دو قطر AD و BC بر هم عمودند و اندازهٔ این دو قطر برابرند ولی ABCD مربع نیست. توجه کنید گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ گزاره‌های همیشه درست هستند پس برای آنها نمی‌توان مثال نقض ارائه کرد.



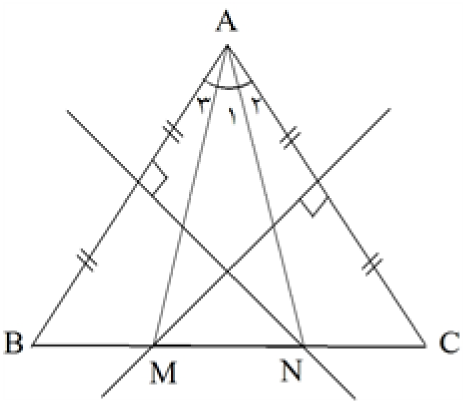
۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطهٔ M روی عمودمنصف AB است.

پس $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$ در نتیجه $A\widehat{B}M=B\widehat{A}M=۲۴^\circ$ بنابراین:



زاویه خارجی : $\mathrm{BMC}=۲۴+۲۴ \Rightarrow B\widehat{M}C=۴۸^\circ$

۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر داده‌های سؤال شکل زیر را خواهیم داشت. می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.



$$\left.\begin{array}{l} M \text{ روی عمودمنصف } \mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{MA}=\mathrm{MC} \Rightarrow \widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲=\widehat{C} \\ N \text{ روی عمودمنصف } \mathrm{AB} \Rightarrow \mathrm{NA}=\mathrm{NB} \Rightarrow \widehat{A}_۱+\widehat{A}_۳=\widehat{B} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} \widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{A}_۳+\widehat{A}_۱=\widehat{B}+\widehat{C}$$

$$\xrightarrow{\widehat{A}_۱+\widehat{A}_۲+\widehat{A}_۳=۸۰^\circ} ۸۰^\circ+\widehat{A}_۱=۱۸۰^\circ-۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{A}_۱=۲۰^\circ$$

۱۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت.

نقطه‌ی N روی عمودمنصف AB است پس N از دو سر ضلع AB به یک فاصله است. یعنی $\mathrm{NA}=\mathrm{NB}$. بنابراین:

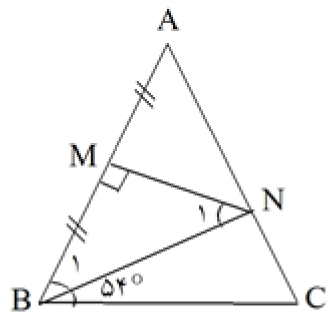
$\widehat{B}_۱=\widehat{A}=\alpha$ در ضمن $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ پس $\widehat{C}=\widehat{B}_۱+۵۴^\circ$ بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ABC}:\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\widehat{B}_۱+۵۴^\circ+\widehat{B}_۱+۵۴^\circ=۱۸۰^\circ$$

$$\xrightarrow{\widehat{B}_۱=\alpha} ۳\alpha=۱۸۰^\circ-۱۰۸^\circ \Rightarrow ۳\alpha=۷۲^\circ \Rightarrow \alpha=\frac{۷۲^\circ}{۳}=۲۴$$

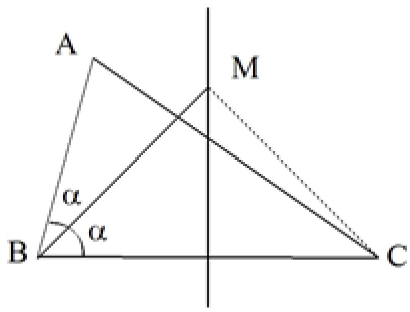
در نتیجه:

$$\overset{\triangle}{BMN}:\widehat{M}+\widehat{N}_۱+\widehat{B}_۱=۱۸۰ \xrightarrow{\widehat{B}_۱=۲۴^\circ} ۹۰^\circ+\widehat{N}_۱+۲۴^\circ=۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{N}_۱=۶۶^\circ$$

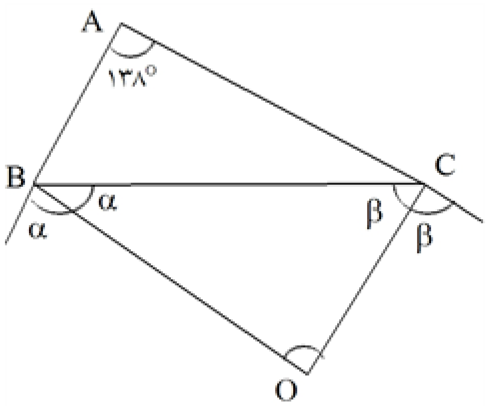


۱۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. حال از M به C وصل کرده چون M روی عمودمنصف ضلع BC قرار دارد. پس $\mathrm{MB}=\mathrm{MC}$ پس $\alpha=M\widehat{C}B$.

از طرف دیگر $M\widehat{C}B>\widehat{C}$ پس $\alpha>\widehat{C}$ در نتیجه $۲\alpha>۲\widehat{C}$ بنابراین $\widehat{B}>۲\widehat{C}$.



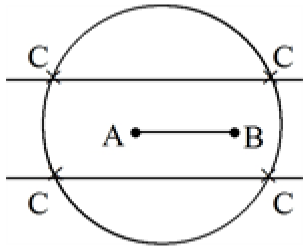
۱۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در صورتی که O زاویه‌ای بین دو نیم‌ساز خارجی B و C باشد، آن‌گاه می‌دانیم:



$$\widehat{O}=۹۰^\circ-\frac{\widehat{A}}{۲}=۹۰^\circ-\frac{۱۳۸^\circ}{۲}=۲۱^\circ$$

۱۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مجموعه نقاطی که از نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۷ هستند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ قرار دارند و مجموعه نقاطی که از AB به فاصله‌ی ۵ هستند دو خط موازی AB در طرفین آن هستند.

نقاط تلاقی این دو خط موازی با دایره چهار نقطه است که جواب این سؤال هستند.



۱۴ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در امتداد ضلع AC نقطه‌ی D را طوری انتخاب می‌کنیم تا $\mathrm{AD}=\mathrm{AB}$ باشد در این‌صورت دو مثلث AMD و AMB به حالت (ض ز ض) همنهشت می‌شوند پس $\mathrm{MD}=\mathrm{MB}$ داریم.

$$\overset{\triangle}{CMD}:\mathrm{CD}<\mathrm{MD}+\mathrm{MC}\Rightarrow \mathrm{CA}+\mathrm{AD}<\mathrm{MD}+\mathrm{MC}\xrightarrow[\mathrm{AD=AB}]{\mathrm{MD=MB}}$$
$$\mathrm{CA}+\mathrm{AB}<\mathrm{MB}+\mathrm{MC}$$

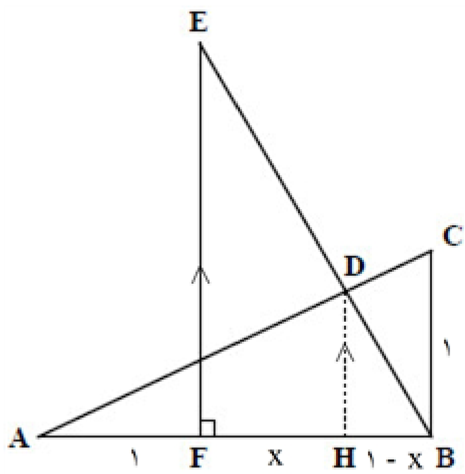
بنابراین $\dfrac{\mathrm{MB}+\mathrm{MC}}{\mathrm{CA}+\mathrm{AB}}>۱$

۱۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث ABC و BEF همنهشت‌اند پس $\mathrm{BF}=\mathrm{BC}=۱$ و $\mathrm{AB}=\mathrm{EF}=۲$ پس $\mathrm{AF}=۱$.

اکنون فرض کنیم $\mathrm{FH}=x$ پس $\mathrm{BH}=۱-x$ داریم:

$$\overset{\triangle}{ABC}:\mathrm{DH}\,||\,\mathrm{BC}\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{BC}}\Rightarrow\frac{۱+x}{۲}=\frac{\mathrm{DH}}{۱}$$
$$\Rightarrow \mathrm{DH}=\frac{۱+x}{۲}$$
$$\overset{\triangle}{BEF}:\mathrm{DH}\,||\,\mathrm{EF}\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BF}}\Rightarrow\frac{\mathrm{DH}}{۲}=\frac{۱-x}{۱}$$
$$\Rightarrow \mathrm{DH}=۲-۲x$$

بنابراین:
$$\frac{۱+x}{۲}=۲-۲x\Rightarrow ۱+x=۴-۴x\Rightarrow ۵x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}$$
$$\mathrm{DH}=۲-۲x=۲-\frac{۶}{۵}=\frac{۴}{۵}=\frac{۸}{۱۰}=۰/۸$$



۱۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض چهارضلعی ABCD مربع است. با توجه به شکل می‌نویسیم

$$\left.\begin{array}{l} M\widehat{N}C = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{N}_۱ + \widehat{N}_۲ = ۹۰^\circ \\ \overset{\triangle}{DNC} : \widehat{D} = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{N}_۲ + \widehat{C}_۱ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{N}_۱ = \widehat{C}_۱$$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMN و NDC با داشتن دو زاویهٔ مساوی متشابهند پس:

$$\frac{\mathrm{NC}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AN}} \Rightarrow \frac{۲}{۱} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AN}} \xrightarrow{\mathrm{AN}=x} \mathrm{DC} = ۲x$$

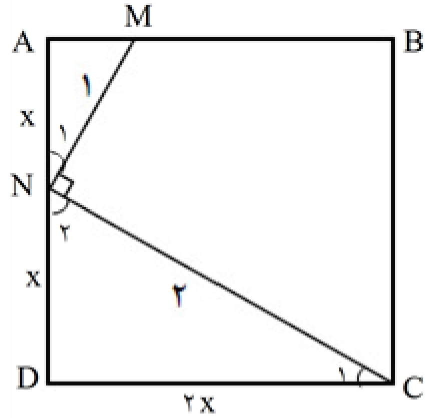
در نتیجه:

$$\mathrm{AD} = \mathrm{DC} = ۲x \xrightarrow{\mathrm{AN}=x} \mathrm{ND} = x$$

$$\overset{\triangle}{DNC} : \mathrm{NC}^۲ = \mathrm{ND}^۲ + \mathrm{DC}^۲ \Rightarrow ۲^۲ = (۲x)^۲ + x^۲ \Rightarrow ۵x^۲ = ۴ \Rightarrow x^۲ = \frac{۴}{۵} \Rightarrow x = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

پس طول ضلع مربع مساوی $۲x = \frac{۴}{\sqrt{۵}}$ پس:

$$S_{\mathrm{ABCD}} = (۲x)^۲ = \left(\frac{۴}{\sqrt{۵}}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲$$

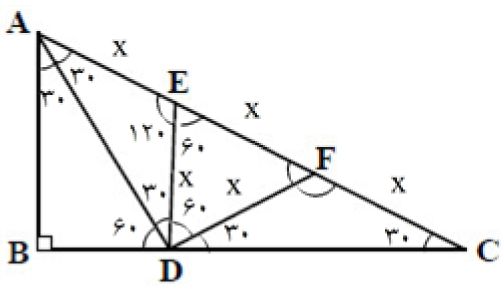


۱۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $\mathrm{DF} = x$، چون مثلث‌های $\overset{\triangle}{DFC}$ و $\overset{\triangle}{AED}$ متساوی‌الساقین و مثلث $\overset{\triangle}{DEF}$ متساوی‌الاضلاع است نتیجه می‌گیریم:

$$\mathrm{AE} = \mathrm{DE} = \mathrm{DF} = \mathrm{EF} = \mathrm{FC} = x$$

پس زاویه‌های روی شکل را خواهیم داشت:

$$\overset{\triangle}{ABD} : \widehat{A} = ۳۰ \Rightarrow \mathrm{BD} = \frac{\mathrm{AD}}{۲} \Rightarrow \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = ۲$$



۱۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از فرض $\text{CD} = ۳\,\text{ED}$ نتیجه می‌گیریم $\text{ED} = x$ و $\text{CE} = ۲x$. پس $\text{CD} = ۳x$ در نتیجه $\text{AB} = \text{CD} = ۳x$.

اکنون از نقطهٔ F عمود FH را بر AD وارد می‌کنیم. در ذوزنقه ABED پاره‌خط FH وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل کرده است. پس:

$$\text{FH} = \frac{\text{AB} + \text{DE}}{۲} = \frac{۳x + x}{۲} = ۲x$$

در نتیجه:

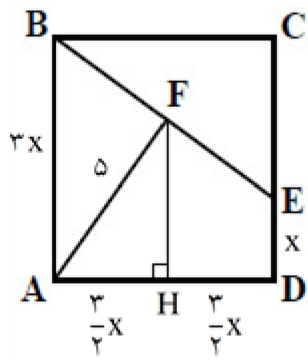
$$\overset{\triangle}{AFH} : \text{AF}^۲ = \text{AH}^۲ + \text{FH}^۲ \Rightarrow ۲۵ = \frac{۹}{۴}x^۲ + ۴x^۲$$

$$\Rightarrow ۲۵ = \frac{۲۵}{۴}x^۲ \Rightarrow x = ۲$$

بنابراین:

$$S_{\text{AFED}} = S_{\text{AFH}} + S_{\text{DEFH}} = \frac{۱}{۲}\text{AH} \times \text{FH} + \frac{۱}{۲}\text{DH}\,(\text{DE} + \text{FH})$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳}{۲}x\right)(۲x) + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳}{۲}x\right)(x + ۲x) = \frac{۳}{۲}x^۲ + \frac{۹}{۴}x^۲ = \frac{۱۵x^۲}{۴} \xrightarrow{x=۲} S_{\text{AFED}} = \frac{۱۵(۲)^۲}{۴} = ۱۵$$



۱۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{BEH}$ همنهشت‌اند پس $\overset{\triangle}{ABC}$ قائم‌الزاویه است و $BC = EH = ۸$ و $AB = BH = ۴$

همچنین: $$AC = \sqrt{۸^۲ + ۴^۲} = ۴\sqrt{۵}$$

پس:

$$\overset{\triangle}{BEH} : DF \,||\, EH \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{DF}{EH} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow \frac{DF}{۸} = \frac{BF}{۴}$$
$$\Rightarrow DF = ۲BF \quad (۱)$$

از طرف دیگر دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و BEH همنهشت‌اند، پس $\widehat{E} = \widehat{C}$ داریم:

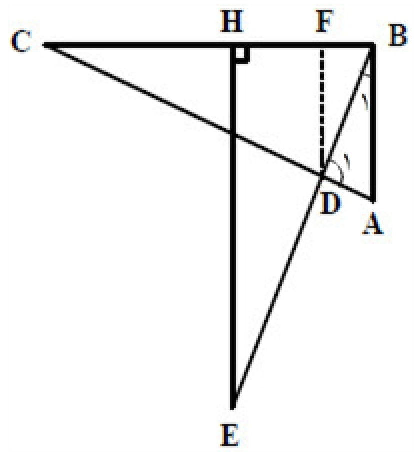
$$\left.\begin{matrix} AB \,||\, EH \\ \text{مورب } BE \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{B}_۱ = \widehat{E} \xrightarrow{\widehat{E}=\widehat{C}} \widehat{B}_۱ = \widehat{C} \xrightarrow{\widehat{A}+\widehat{C}=۹۰^\circ} \widehat{B}_۱ + \widehat{A} = ۹۰ \Rightarrow \widehat{D}_۱ = ۹۰^\circ$$

در نتیجه BD ارتفاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است پس با استفاده از رابطهٔ طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.

$$\overset{\triangle}{ABC} : AB \times BC = BD \times AC \Rightarrow ۴\times۸ = BD \times ۴\sqrt{۵} \Rightarrow BD = \frac{۸}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین: $$\overset{\triangle}{BDF} : BD^۲ = BF^۲ + DF^۲ \xrightarrow{\text{از } (۱)} \left(\frac{۸}{\sqrt{۵}}\right)^۲ = BF^۲ + (۲BF)^۲ \Rightarrow \frac{۶۴}{۵} = ۵BF^۲$$

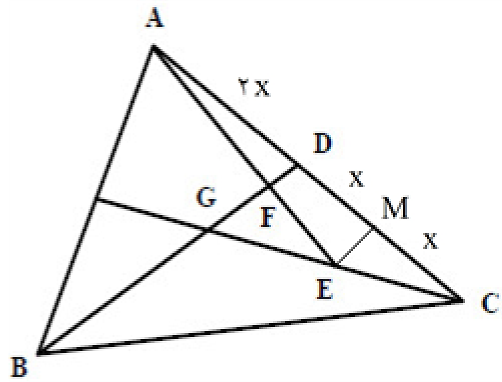
$$\Rightarrow BF^۲ = \frac{۶۴}{۲۵} \Rightarrow BF = \frac{۸}{۵} = ۱/۶$$



۲۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون G مرکز ثقل مثلث ABC است پس BD میانه این مثلث است. در نتیجه:

$$\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{BD}}=\frac{۱}{۳}\,,\mathrm{AD}=\mathrm{DC}$$

اکنون از نقطه E خطی موازی میانهٔ BD رسم می‌کنیم تا AC را در M قطع کند.



$$\overset{\triangle}{GDC}:\mathrm{EM}\,||\,\mathrm{GD}\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{EG}}=\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{DM}}\xrightarrow{\mathrm{EC=EG}}۱=\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{DM}}\Rightarrow \mathrm{CM}=\mathrm{DM}$$

با فرض $\mathrm{CM}=\mathrm{DM}=x$ نتیجه می‌گیریم $\mathrm{AD}=۲x$. بنابراین:

$$\overset{\triangle}{AEM}:\mathrm{FD}\,||\,\mathrm{EM}\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AM}}=\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{EM}}\Rightarrow\frac{۲x}{۳x}=\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{EM}}\Rightarrow \mathrm{EM}=\frac{۳}{۲}\mathrm{FD}\quad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$\overset{\triangle}{GDC}:\mathrm{EM}\,||\,\mathrm{DG}\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{CD}}=\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{GD}}\Rightarrow\frac{x}{۲x}=\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{GD}}\Rightarrow \mathrm{GD}=۲\mathrm{EM}\xrightarrow{(۱)}\mathrm{GD}=۲\left(\frac{۳}{۲}\mathrm{FD}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{GD}=۳\,\mathrm{FD}$$

چون $\frac{۱}{۳}=\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{BD}}$ پس $\frac{۱}{۳}=\frac{۳\,\mathrm{FD}}{\mathrm{BD}}$ در نتیجه $۹=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{FD}}$.

۲۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض چهارضلعی ABCD مربع است. با توجه به شکل می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} M\widehat{N}D = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{N}_۱ + \widehat{N}_۲ = ۹۰^\circ \\ \overset{\triangle}{DNC} : \widehat{C} = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{D}_۱ + \widehat{N}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{D}_۱ = \widehat{N}_۱$$

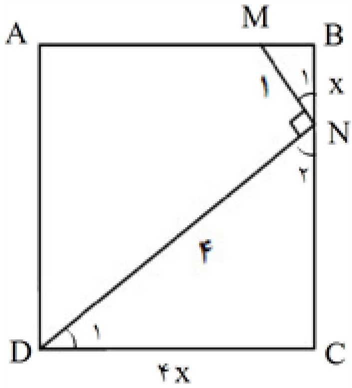
بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{BMN}$ و $\overset{\triangle}{DNC}$ با داشتن دو زاویهٔ مساوی متشابه هستند پس:

$$\frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BN}} \Rightarrow \frac{۴}{۱} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BN}} \xrightarrow{\mathrm{BN}=x} \mathrm{DC} = ۴x$$

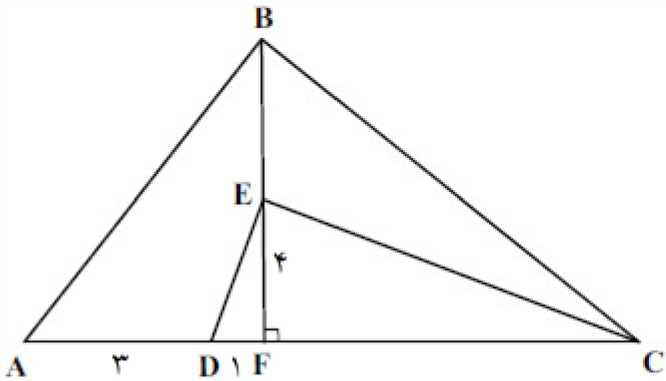
در نتیجه: $\mathrm{BC} = \mathrm{DC} = ۴x \xrightarrow{\mathrm{BN}=x} \mathrm{NC} = ۳x$

$$\overset{\triangle}{DNC} : \mathrm{DN}^۲ = \mathrm{DC}^۲ + \mathrm{NC}^۲ \Rightarrow ۴^۲ = (۴x)^۲ + (۳x)^۲ \Rightarrow ۱۶ = ۲۵x^۲ \Rightarrow x = \frac{۴}{۵}$$

پس طول ضلع مربع مساوی $\frac{۱۶}{۵}$. پس: $S_{\mathrm{ABCD}} = \mathrm{DC}^۲ = \left(\frac{۱۶}{۵}\right)^۲ = \frac{۲۵۶}{۲۵} = ۱۰/۲۴$



۲۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.



$$\overset{\triangle}{DEC} : \mathrm{EF}^۲ = \mathrm{DF} \times \mathrm{FC} \Rightarrow ۴^۲ = ۱ \times \mathrm{FC}$$
$$\Rightarrow \mathrm{FC} = ۱۶$$
$$\overset{\triangle}{ABC} : \mathrm{BF}^۲ = \mathrm{AF} \times \mathrm{FC}$$
$$\Rightarrow \mathrm{BF}^۲ = ۴ \times ۱۶ = ۶۴ \Rightarrow \mathrm{BF} = ۸$$

$$\overset{\triangle}{BFC} : \mathrm{BC}^۲ = \mathrm{BF}^۲ + \mathrm{FC}^۲ \Rightarrow \mathrm{BC}^۲ = ۸^۲ + ۱۶^۲ = ۸^۲(۱+۴) \Rightarrow \mathrm{BC} = ۸\sqrt{۵}$$

۲۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه M وسط ضلع مربع است پس $\mathrm{AM} = \mathrm{BM} = ۳$.

از طرف دیگر:

$$\mathrm{BM} \parallel \mathrm{DC} \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} B\overset{\triangle}{M}E \sim D\overset{\triangle}{E}C$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{CE}} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{DC}} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad (۱)$$

$$B\overset{\triangle}{C}M : \mathrm{CM}^۲ = \mathrm{BC}^۲ + \mathrm{BM}^۲ = ۶^۲ + ۳^۲ = ۴۵$$

$$\Rightarrow \mathrm{CM} = ۳\sqrt{۵} \quad (۲)$$

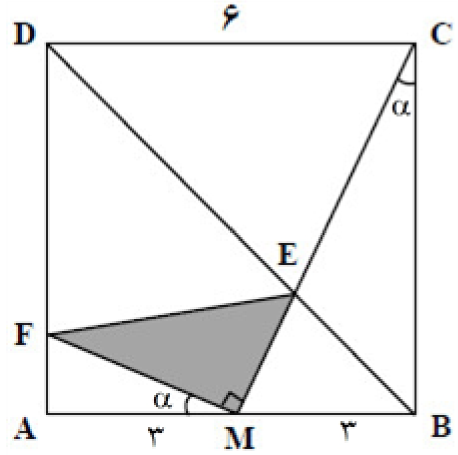
$$(۲), (۱) \text{ از } \Rightarrow \mathrm{ME} = \sqrt{۵}\,, \mathrm{CE} = ۲\sqrt{۵}$$

در ضمن دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCM و AMF دارای زاویهٔ حاده مساوی α هستند پس متشابهند داریم.

$$A\overset{\triangle}{M}F \sim B\overset{\triangle}{C}M \Rightarrow \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MC}} \Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{\mathrm{MF}}{۳\sqrt{۵}} \Rightarrow \mathrm{MF} = \frac{۳}{۲}\sqrt{۵}$$

بنابراین:

$$S_{\mathrm{MFE}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{ME} \times \mathrm{MF} = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{۵} \times \frac{۳}{۲}\sqrt{۵}\right) = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$



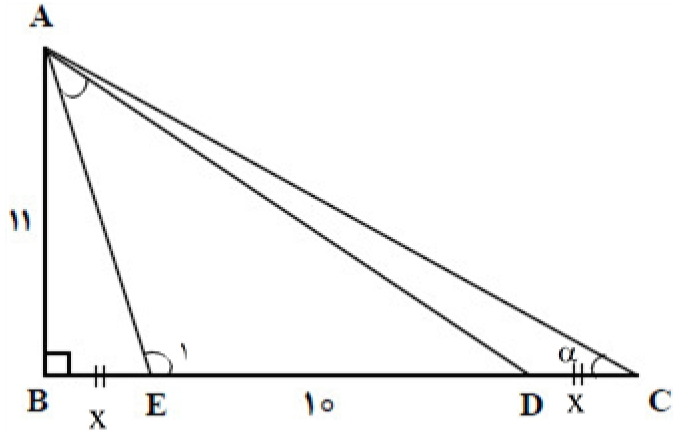
۲۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overset{\triangle}{ABE}: \mathrm{AE}^۲ = \mathrm{AB}^۲ + \mathrm{BE}^۲ = ۱۱^۲ + x^۲$$
$$\Rightarrow \mathrm{AE} = \sqrt{۱۲۱ + x^۲} \ (۱)$$

از طرف دیگر دو مثلث AED و AEC متشابهند زیرا:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{E}_۱ = \widehat{E}_۱ \\ D\widehat{A}E = A\widehat{C}D = \alpha \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{زز})}$$
$$\overset{\triangle}{AEC} \sim \overset{\triangle}{AED} \Rightarrow \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}} \Rightarrow \mathrm{AE}^۲ = \mathrm{ED} \times \mathrm{EC} \xrightarrow{\text{از } (۱)} ۱۲۱ + x^۲ = ۱۰(۱۰ + x)$$
$$\Rightarrow ۱۲۱ + x^۲ = ۱۰۰ + ۱۰x \Rightarrow x^۲ - ۱۰x + ۲۱ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = ۷ \end{cases}$$

در گزینه‌ها $x = ۷$ وجود دارد.

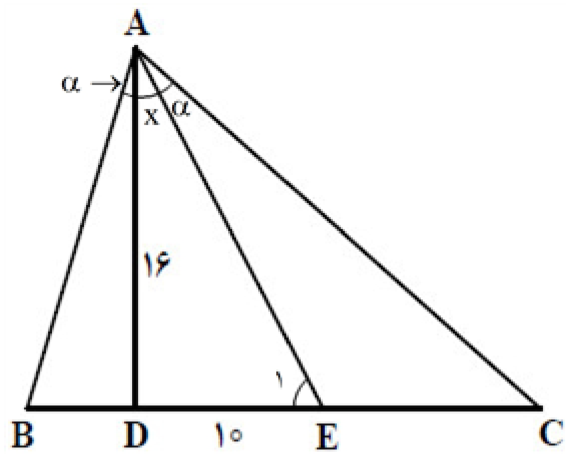


۲۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $B\widehat{A}D = E\widehat{A}C = \alpha$ و $D\widehat{A}E = x$ در این صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{BA} = \mathrm{BE} \Rightarrow \widehat{E}_۱ = B\widehat{A}E = x + \alpha \\ \overset{\triangle}{AEC} \text{ زاویه خارجی مثلث } \widehat{E}_۱ \Rightarrow \widehat{E}_۱ = \alpha + \widehat{C} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \widehat{C} = x$$

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{C} = D\widehat{A}E = x \\ \widehat{E}_۱ = D\widehat{A}C = x + \alpha \end{array}\right\}$$ بنابراین:

$$\Rightarrow \overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ADC} \Rightarrow \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}} \Rightarrow \frac{۱۶}{۱۰ + \mathrm{EC}} = \frac{۱۰}{۱۶} \Rightarrow ۱۰۰ + ۱۰\mathrm{EC} = ۲۵۶$$
$$\Rightarrow ۱۰\mathrm{EC} = ۱۵۶ \Rightarrow \mathrm{EC} = ۱۵/۶$$



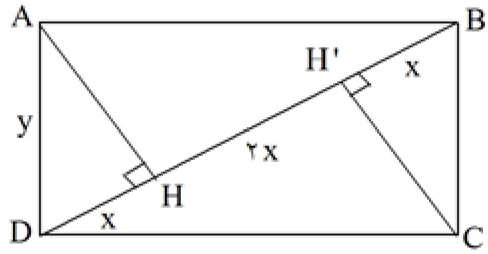
۲۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بنابر فرض سؤال $HH' = ۲DH = ۲BH' = ۲x$ در صورتی که AD را برابر y درنظر بگیریم آنگاه با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{ABD} : AD^۲ = DH \times DB \Rightarrow y^۲ = (x)(۴x)$$
$$\Rightarrow y = ۲x \ (۱)$$
$$\overset{\triangle}{ABD} : AB^۲ = BD^۲ - AD^۲ \xrightarrow{\text{از } (۱)} AB^۲ = (۴x)^۲ - (۲x)^۲ = ۱۲x^۲ \Rightarrow AB = ۲\sqrt{۳}x$$
$$\overset{\triangle}{ADH} : AH^۲ = AD^۲ - DH^۲ \xrightarrow{\text{از } (۱)} AH^۲ = (۲x)^۲ - (x)^۲ = ۳x^۲ \Rightarrow AH = \sqrt{۳}x$$

بنابراین:

$$\frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{مساحت مثلث ADH}} = \frac{AB \times AD}{\frac{۱}{۲}AH \times DH} = \frac{(۲\sqrt{۳}x)(۲x)}{\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}x)(x)} = ۸$$



۲۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال

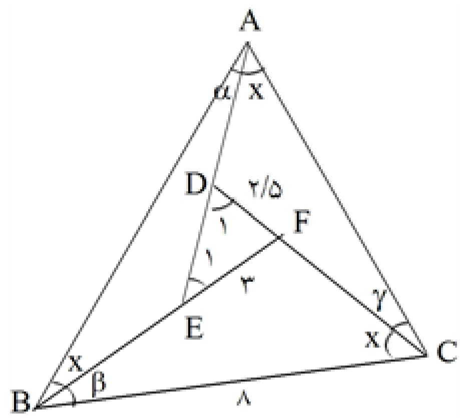
$$A\widehat{B}F = C\widehat{A}E = B\widehat{C}D = x$$

در این صورت داریم:

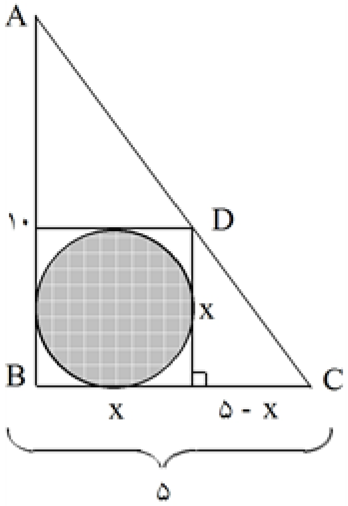
$$\overset{\triangle}{ABE} \text{ زاویه خارجی } \widehat{E}_۱ \Rightarrow \widehat{E}_۱ = x + \alpha = \widehat{A}$$
$$\overset{\triangle}{ADC} \text{ زاویه خارجی } \widehat{D}_۱ \Rightarrow \widehat{D}_۱ = x + \gamma = \widehat{C}$$

بنابراین دو مثلث $\overset{\triangle}{DEF}$ و $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابهند، زیرا دارای دو زاویهٔ مساویند.

$$\overset{\triangle}{DEF} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{۲/۵}{۸} = \frac{۳}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۲۴}{۲/۵} = ۹/۶$$



۲۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل فرض کنید طول قطر دایره برابر x باشد. در این صورت طبق تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:



$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{x}{۱۰} = \frac{۵-x}{۵} \Rightarrow ۵x = ۵۰ - ۱۰x$$

$$\Rightarrow ۱۵x = ۵۰ \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۳}$$

اگر شعاع دایره برابر R باشد، آنگاه داریم:

$$۲R = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow R = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \text{مساحت دایره} : S = \pi R^۲ = \frac{۲۵}{۹}\pi$$

۲۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

راه حل اول: بنابر فرض $\frac{DE}{EF}=\frac{AC}{CG}=۴$ در نظر می‌گیریم $CG=x$ پس $AG=۳x$ و $EF=y$ پس $DF=۳y$.

اکنون از C به F وصل کرده امتداد می‌دهیم تا خطی که از D موازی BC رسم می‌شود را در نقطه‌ی M قطع کند در این صورت دو مثلث FEC و MDF دارای دو زاویه مساویند پس متشابهند. بنابراین:

$$\overset{\triangle}{FEC} \sim \overset{\triangle}{DMF} \Rightarrow \frac{MD}{EC}=\frac{DF}{FE}=\frac{MF}{FC}\xrightarrow[EF=x]{DF=۳x}\frac{MD}{EC}=\frac{MF}{FC}=۳\xrightarrow{EC=۱}\begin{cases}MD=۳\\ \frac{MF}{FC}=۳\end{cases}$$

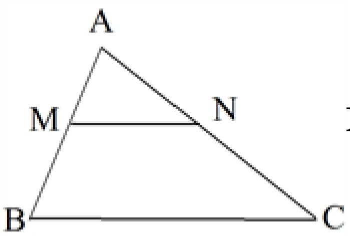
از طرف دیگر مثلث AMD قائم‌الزاویه است. پس:

$$AM^۲=AD^۲+MD^۲=۴^۲+۳^۲=۲۵\Rightarrow AM=۵$$

در نتیجه:

$$\overset{\triangle}{AMC}:\frac{AG}{GC}=\frac{MF}{FC}=۳\xrightarrow{\text{عکس تالس}}AM\,||\,FG\xrightarrow{\text{تالس}}\frac{FG}{AM}=\frac{CG}{AC}\Rightarrow\frac{FG}{۵}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow FG=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

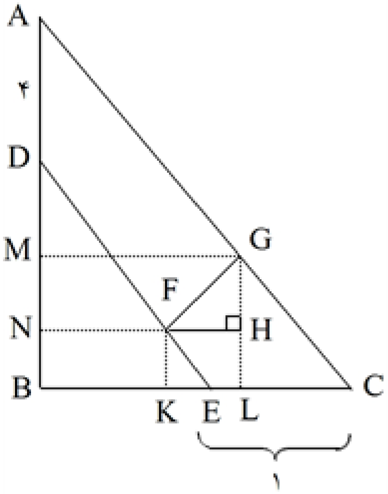
نکته: قضیه تالس و تعمیم آن: اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود بر دو ضلع دیگر پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کند و برعکس.



$$MN\,||\,BC\Leftrightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

خط فکری: با توجه به نسبت‌های بین اضلاع داده شده مسلماً باید از قضیهٔ تالس در حل سؤال استفاده کنیم ولی FG ضلع هیچ مثلثی نیست. برای ایجاد مثلث با رسم خط اضافه CF به این مقصود می‌رسیم.

راه حل دوم: مطابق شکل از نقاط F و G خطوطی موازی با اضلاع قائم مثلث ABC رسم می‌کنیم. طبق تعمیم قضیهٔ تالس داریم:



$$\overset{\triangle}{BDE}:FK\,||\,BD\Rightarrow\frac{FK}{BD}=\frac{EF}{DE}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow FK=\frac{۱}{۴}BD$$

$$\Rightarrow HL=\frac{۱}{۴}BD$$

$$\overset{\triangle}{ABC}:GL\,||\,AB\Rightarrow\frac{GL}{AB}=\frac{CG}{AC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow GL=\frac{۱}{۴}AB$$

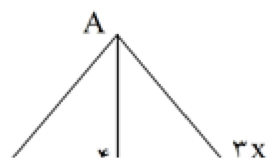
$$GH=GL-HL=\frac{۱}{۴}(AB-BD)=\frac{۱}{۴}AD=۱$$

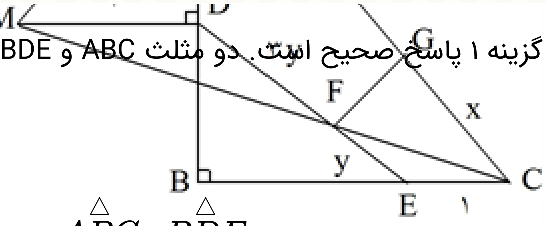
$$\overset{\triangle}{BDE}:FN\,||\,BE\Rightarrow\frac{FN}{BE}=\frac{DF}{DE}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow FN=\frac{۳}{۴}BE$$

$$\overset{\triangle}{ABC}:GM\,||\,BC\Rightarrow\frac{GM}{BC}=\frac{AG}{AC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow GM=\frac{۳}{۴}BC\Rightarrow NH=\frac{۳}{۴}BC$$

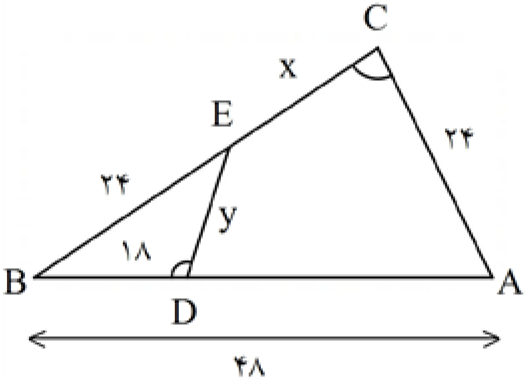
$$FH=NH-FN=\frac{۳}{۴}(BC-BE)=\frac{۳}{۴}EC=\frac{۳}{۴}$$

$$\overset{\triangle}{FGH}:FG^۲=GH^۲+FG^۲=۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۲۵}{۱۶}\Rightarrow FG=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$





۳۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث ABC و BDE متشابهند زیرا:



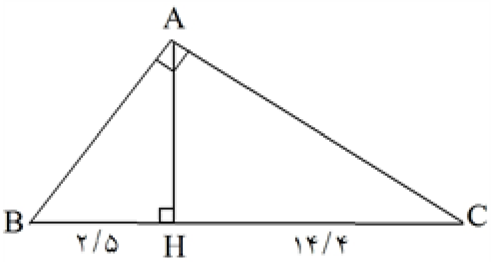
$$\left.\begin{array}{l} E\widehat{C}A = B\widehat{D}E \\ \widehat{B}=\widehat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{BDE}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{y}{۲۴}=\frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸} \Rightarrow \frac{y}{۲۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=۱۲ \\ \frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۲۴}{۴۸} \Rightarrow \frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۱۲ \end{cases}$$

بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ برابر ۱ است.

۳۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ارتفاع AH روی وتر BC پاره‌خطهایی به طول ۲/۵ و ۱۴/۴ جدا کرده است. با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$$AH^۲ = BH\times CH \Rightarrow AH^۲ = ۲/۵\times ۱۴/۴ = \frac{۲۵}{۱۰}\times\frac{۱۴۴}{۱۰}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{۵\times ۱۲}{۱۰}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

۳۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. M وسط AB و N وسط AC است. پس MN میان خط است پس $MN=\frac{BC}{۲}=\frac{۲۱}{۲}$ و در ضمن بنابر قضیه‌ی تالس MN ارتفاع AH را نیز نصف می‌کند پس:

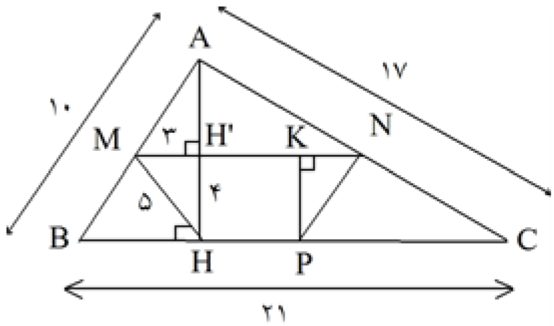
$$HH'=\frac{AH}{۲}=۴$$

درضمن در مثلث قائم‌الزاویه ABH پاره‌خط HM میانه ی وارد بر وتر است پس:

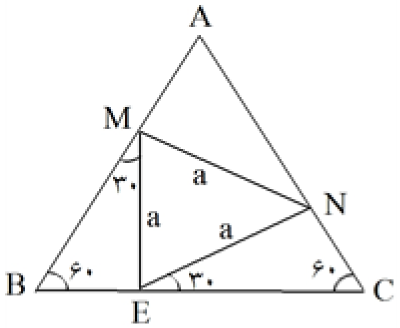
$$HM=\frac{AB}{۲}=۵$$

پس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی MHH' طول پاره‌خط MH' برابر ۳ می‌شود. در صورتی که عمود PK را بر MN وارد کنیم آن‌گاه $NK=۳$ پس $H'K=\frac{۲۱}{۲}-(۳+۳)=\frac{۹}{۲}$ پس $PH=H'K=\frac{۹}{۲}$ بنابراین:

$$S_{MHPN}=\frac{۱}{۲}HH'(MN+HP)=\frac{۱}{۲}(۴)\left(\frac{۲۱}{۲}+\frac{۹}{۲}\right)=۲\times\frac{۳۰}{۲}=۳۰$$



۳۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع MNE بر اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC عمود باشد. اگر طول اضلاع مثلث MNE برابر a باشد، داریم:



$$\overset{\triangle}{BME} : \widehat{B} = ۶۰^\circ \Rightarrow \text{ME} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\text{BM} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\text{BM}$$

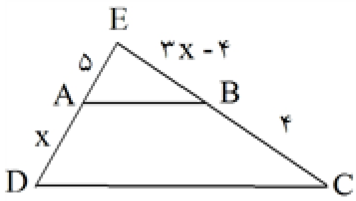
$$\Rightarrow \text{BM} = \frac{۲a}{\sqrt{۳}} \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{BME} : \widehat{M} = ۳۰^\circ \Rightarrow \text{BE} = \frac{\text{BM}}{۲} \xrightarrow{\text{از ۱}} \text{BE} = \frac{a}{\sqrt{۳}}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\text{EC} = \frac{۲a}{\sqrt{۳}}$ پس $\text{BC} = \frac{a}{\sqrt{۳}} + \frac{۲a}{\sqrt{۳}} = a\sqrt{۳}$ بنابراین:

$$\frac{S_{\text{ABC}}}{S_{\text{MNE}}} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}\text{BC}^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}\text{ME}^۲} = \frac{\text{BC}^۲}{\text{ME}^۲} = \frac{۳a^۲}{a^۲} = ۳$$

۳۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به کمک رابطه‌ی تالس x را به دست می‌آوریم.



$$\text{AB} \parallel \text{DC} \Rightarrow \frac{\text{EA}}{\text{AD}} = \frac{\text{EB}}{\text{BC}} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \frac{۳x - ۴}{۴} \Rightarrow ۳x^۲ - ۴x - ۲۰ = ۰$$

به کمک دستور 'b این معادله را حل می‌کنیم.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^۲ - \text{ac}}}{a} = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ + ۶۰}}{۳} = \frac{۲ \pm ۸}{۳} \Rightarrow x = \frac{۱۰}{۳} \text{ یا } x = -۲$$

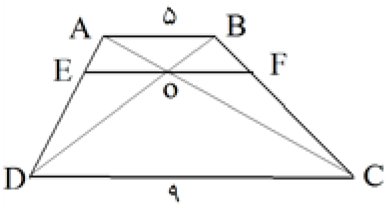
مسلماً $x = -۲$ قابل قبول نیست. پس با $x = \frac{۱۰}{۳}$ مسئله را حل می‌کنیم.

$$\text{AB} \parallel \text{DC} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABE} \sim \overset{\triangle}{DCE} \Rightarrow \frac{S_{\text{ABE}}}{S_{\text{EDC}}} = \left(\frac{\text{EA}}{\text{ED}}\right)^۲ = \left(\frac{۵}{۵ + x}\right)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{ABE}}}{S_{\text{EDC}}} = \left(\frac{۵}{۵ + \frac{۱۰}{۳}}\right)^۲ = \frac{۲۵}{\frac{۲۵ \times ۲۵}{۹}} = \frac{۹}{۲۵} \xrightarrow{\text{تفضیل از مخرج}} \frac{S_{\text{ABE}}}{S_{\text{ABCD}}} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\Rightarrow S_{\text{ABCD}} = \frac{۱۶}{۹} S_{\text{ABE}}$$

۳۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث OAB و ODC متشابه‌اند زیرا AB || DC است.



$$\overset{\triangle}{OAB} \sim \overset{\triangle}{ODC} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{۵}{۹}$$

$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD} = \frac{۵}{۱۴}$$

بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ADC} : OE \parallel DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{OA}{AC} \Rightarrow \frac{OE}{۹} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow OE = \frac{۴۵}{۱۴}$$

$$\overset{\triangle}{BDC} : OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{DC} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{OF}{۹} = \frac{۵}{۱۴} \Rightarrow OF = \frac{۴۵}{۱۴}$$

پس:

$$EF = OE + OF = \frac{۹۰}{۱۴} = \frac{۴۵}{۷}$$

۳۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وتر این مثلث $۲x + ۳$ است. پس بنابر قضیه‌ی فیثاغورس می‌نویسیم:

$$(۲x + ۳)^۲ = (۲x + ۱)^۲ + (x + ۱)^۲$$

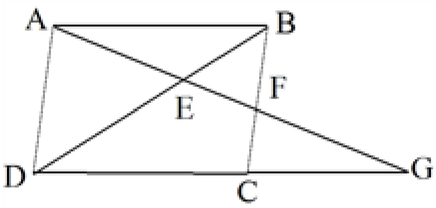
$$\cancel{۴x^۲} + ۹ + ۱۲x = \cancel{۴x^۲} + ۱ + ۴x + x^۲ + ۱ + ۲x \Rightarrow x^۲ - ۶x - ۷ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۷)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۷, x = -۱$$

مقدار $x = -۱$ قابل قبول نیست چون ضلع $x + ۱$ به ازای آن صفر می‌شود. به ازای $x = ۷$ اندازه ی اضلاع مثلث برابر ۱۷ و ۱۵ و ۸ هستند. بنابراین:

$$S = \frac{۱}{۲}(۸)(۱۵) = ۶۰$$

۳۷ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی اساسی تشابه می‌نویسیم.

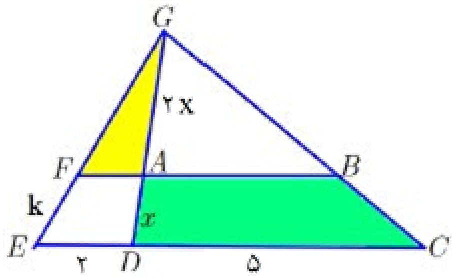


$$AD \parallel BF \Rightarrow \overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{BEF} \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{DE}{BE} (۱)$$

$$AB \parallel DG \Rightarrow \overset{\triangle}{AEB} \sim \overset{\triangle}{DEG} \Rightarrow \frac{DE}{EB} = \frac{EG}{AE} (۲)$$

از ۱, ۲ $\Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{EG}{AE} \Rightarrow AE^۲ = EF \times EG$

۳۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $DA = x$ باشد پس بنابر فرض $DG = ۳\,AD$ نتیجه می‌گیریم $AG = ۲x$. داریم:



$$AF \,||\, ED \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\triangle}{AFG} \sim \overset{\triangle}{GED}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{GED}} = \left(\frac{AG}{GD}\right)^{۲} = \left(\frac{۲x}{۳x}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹} \ (۱)$$

در ضمن دو مثلث GEC و AED دارای ارتفاع مشترک از رأس G هستند پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایشان است.

$$\frac{S_{GED}}{S_{GEC}} = \frac{ED}{EC} = \frac{۲}{۷} \Rightarrow S_{GED} = \frac{۲}{۷} S_{GEC} \ (۲)$$

حال از ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم $S_{AFG} = \frac{۸}{۶۳} S_{GEC}$.

از طرف دیگر:

$$AB \,||\, DC \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} \overset{\triangle}{AGB} \sim \overset{\triangle}{GDC} \Rightarrow \frac{S_{AGB}}{S_{GDC}} = \left(\frac{AG}{AD}\right)^{۲} = \left(\frac{۲x}{۳x}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow[\text{از صورت}]{\text{تفضیل}} \frac{S_{ABCD}}{S_{GDC}} = \frac{۵}{۹} \ (۳)$$

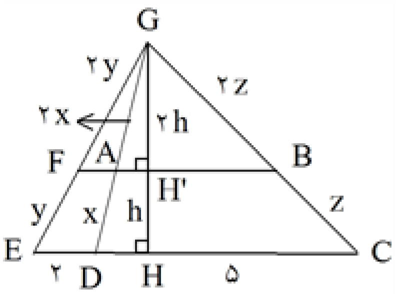
در ضمن دو مثلث GDC و GEC دارای ارتفاع مشترک از رأس A هستند پس:

$$\frac{S_{GDC}}{S_{GEC}} = \frac{DC}{EC} = \frac{۵}{۷} \ (۴)$$

حال از تساوی‌های ۳ و ۴ نتیجه می‌گیریم $S_{ABCD} = \frac{۲۵}{۶۳} S_{GEC}$. بنابراین:

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۸}{۳۶} S_{GEC}}{\frac{۲۵}{۶۳} S_{GEC}} = \frac{۸}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{۸}{۲۵} \times ۱۰۰ = ۳۲\%$$

راه حل دوم: با فرض $AD = x$ نتیجه می‌گیریم $AG = ۲x$ و با استفاده از تالس $۲ = \frac{۲x}{x} = \frac{FG}{FE} = \frac{GB}{BC}$. به همین علت اندازه‌های روی شکل را خواهیم داشت. با رسم ارتفاع GH نیز معلوم می‌شود $GH' = ۲HH'$ داریم:



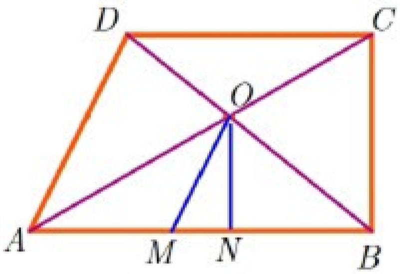
$$\overset{\triangle}{GED}: AF \,||\, ED \Rightarrow \frac{AF}{ED} = \frac{GF}{GE} \Rightarrow \frac{AF}{۲} = \frac{۲y}{۳y} \Rightarrow AF = \frac{۴}{۳}$$

$$\overset{\triangle}{GDC}: AB \,||\, DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{GB}{GC} \Rightarrow \frac{AB}{۵} = \frac{۲z}{۳z} \Rightarrow AB = \frac{۱۰}{۳}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}(۲h)(AF)}{\frac{۱}{۲}h(AB + DC)} = \frac{۲ \times \frac{۴}{۳}}{\frac{۱۰}{۳} + ۵} = \frac{۸}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{۸}{۲۵} \times ۱۰۰ = ۳۲\%$$

۳۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با دو بار استفاده از قضیه‌ی تالس می‌نویسیم:



$$ABC : ON \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{OA}{OC} \ (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : OM \parallel AD \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{OB}{OD} \ (۲)$$

از طرف دیگر:

$$DC \parallel AB \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} \overset{\triangle}{ODC} \sim \overset{\triangle}{OAB} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \ (۳)$$

بنابراین:

$$۱, ۲, ۳ \text{ از} \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{BM}{AM} \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{ترکیب در}} \frac{AB}{NB} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AM = NB \Rightarrow \frac{AM}{BN} = ۱$$

۴۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

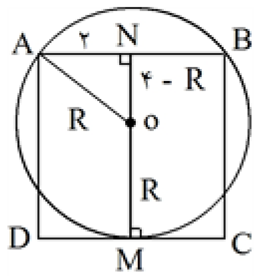
$$\left.\begin{array}{l} ND \parallel ME \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{DE} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow MN = ۳AM \\ ND \parallel MC \Rightarrow \frac{BN}{MN} = \frac{BD}{DC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow MN = ۳BN \end{array}\right\} \Rightarrow BN = AM$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AM + MN + NB}{AM} = \frac{۵\,AM}{AM} = ۵$$

۴۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دایره‌ی گذرا از دو رأس A و B در نقطه‌ی M بر ضلع DC مماس باشد. در این صورت اگر O مرکز دایره باشد آن‌گاه OM بر DC و امتداد آن بر AB عمود خواهد بود در مثلث قائم‌الزاویه OAN قضیه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم.

$$OA^۲ = AN^۲ + ON^۲ \Rightarrow R^۲ = ۲^۲ + (۴ - R)^۲ \Rightarrow R^۲ = ۴ + ۱۶ - ۸R + R^۲$$

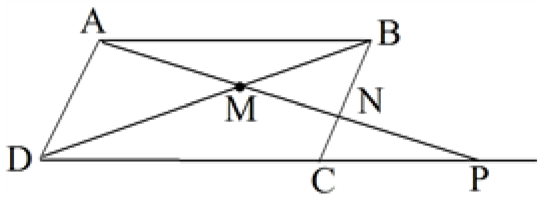
$$\Rightarrow R = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$



۴۲ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی تالس به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} BN \parallel AD \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{AM} = \frac{BM}{MD} \\ AB \parallel DP \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MD} = \frac{AM}{MP} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{AM}{MP}$$

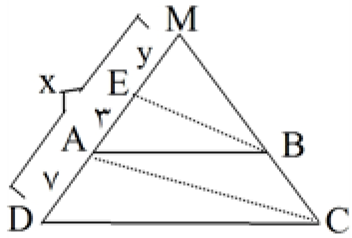
$$\Rightarrow AM^۲ = MN \times MP$$



۴۳ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} BE \parallel AC \Rightarrow \frac{y}{۳} = \frac{MB}{BC} \\ AB \parallel CD \Rightarrow \frac{y+۳}{۷} = \frac{MB}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{۳} = \frac{y+۳}{۷} \Rightarrow y = \frac{۹}{۴} = ۲/۲۵$$

$$x = y + ۱۰ = ۲/۲۵ + ۱۰ = ۱۲/۲۵$$

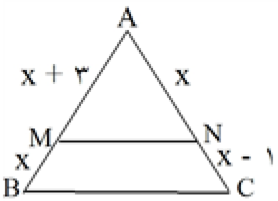


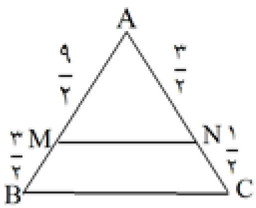
۴۴ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر MN موازی BC باشد، آن‌گاه بر اساس قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{x+۳}{x} = \frac{x}{x-۱} \Rightarrow \cancel{x^۲} + ۲x - ۳ = \cancel{x^۲} \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین شکل به صورت روبه‌رو درمی‌آید. از طرفی می‌دانیم نسبت مساحت دو مثلث متشابه برابر با مربع نسبت تشابه آن‌ها است، بنابراین:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMN}}} = \left(\frac{AC}{AN}\right)^۲ = \left(\frac{\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۲}}\right)^۲ = \left(\frac{۴}{۳}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۹} = ۱\frac{۷}{۹}$$

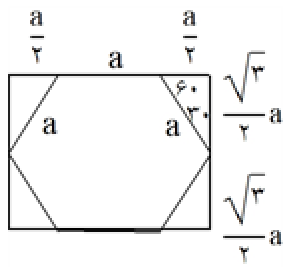




۴۵ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

اندازه‌ی ضلع شش ضلعی را a در نظر می‌گیریم، با توجه به شکل داریم:

$$\frac{\text{محیط شش ضلعی}}{\text{محیط مستطیل}} = \frac{۶a}{۴a + ۲\sqrt{۳}a} = \frac{۳}{۲+\sqrt{۳}} = \frac{۳(۲-\sqrt{۳})}{۱} = ۳(۲-\sqrt{۳})$$

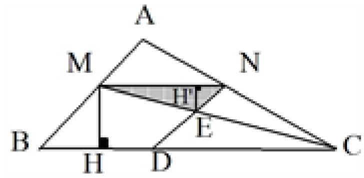


۴۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left(MN \| BC, \frac{AM}{MB} = \frac{۲}{۳}\right) \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}, \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{۲}{۲+۳} = \frac{۲}{۵}$$

$$(MN \| BC, EN \| MB) \Rightarrow \overset{\triangle}{EMN} \sim \overset{\triangle}{MBC} \Rightarrow \frac{EH'}{MH} = \frac{MN}{BC} = \frac{۲}{۵}$$

$$\frac{S_{MNE}}{S_{MNDB}} = \frac{\frac{۱}{۲}(MN \times EH')}{MN \times MH} = \frac{EH'}{۲MH} = \frac{۱}{۵} = ۲۰\%$$



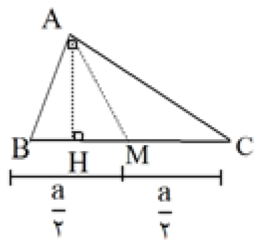
۴۷ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$AC = \frac{\sqrt{۵}}{۲}AB \quad (۱)$$

$$AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \xrightarrow{(۱)} AB^۲ + \left(\frac{\sqrt{۵}}{۲}AB\right)^۲ = a^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۴}AB^۲ = a^۲ \Rightarrow AB = \frac{۲}{۳}a$$

$$AB^۲ = BH.BC \Rightarrow \left(\frac{۲}{۳}a\right)^۲ = BH.a \Rightarrow BH = \frac{۴}{۹}a \Rightarrow HM = \frac{a}{۲} - \frac{۴a}{۹} = \frac{a}{۱۸}$$

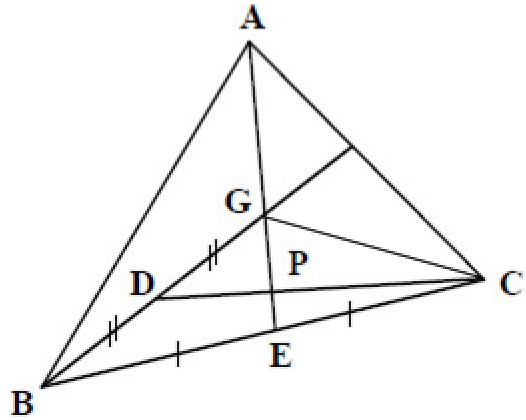
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{AMH}}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times BC}{\cancel{\frac{۱}{۲}AH} \times HM} = \frac{a}{\frac{a}{۱۸}} = ۱۸$$



۴۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون G مرکز ثقل مثلث ABC است پس AE میانه این مثلث است. یعنی E وسط ضلع BC است. پس اگر از C به G وصل کنیم آنگاه در مثلث BCG دو پاره‌خط GE و CD میانه هستند پس P مرکز ثقل مثلث BGC است.

از طرف دیگر مرکز ثقل مثلث هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند در نتیجه $\mathrm{GP} = ۲\,\mathrm{PE}$ یا $\mathrm{GP} = \frac{۲}{۳}\mathrm{GE}$.

در ضمن G مرکز ثقل مثلث ABC است پس $\mathrm{AG} = ۲\,\mathrm{GE}$ بنابراین:
$$\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{GP}} = \frac{۲\,\mathrm{GE}}{\frac{۲}{۳}\mathrm{GE}} = ۳$$

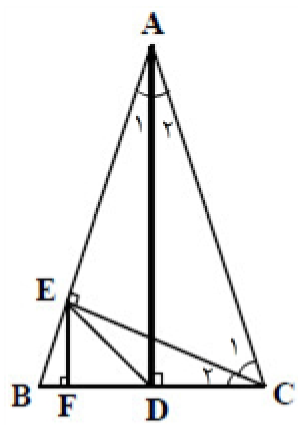


۴۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی‌الساقین است پس ارتفاع AD نیمساز زاویهٔ $\widehat{A}$ است.

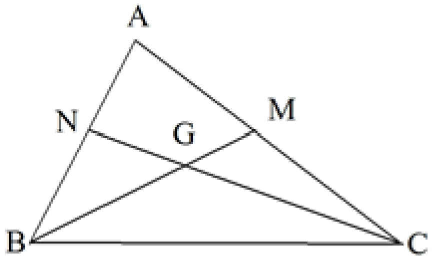
در ضمن:
$$\mathrm{CE} = \frac{\mathrm{AB}}{۲} \xrightarrow{\mathrm{AB}=\mathrm{AC}} \mathrm{CE} = \frac{\mathrm{AC}}{۲} \Rightarrow B\widehat{A}C = ۳۰^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{C}_۱ = ۶۰^\circ \xrightarrow{\widehat{C}=۷۵^\circ} \widehat{C}_۲ = ۱۵^\circ$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{BEC}$ ارتفاع EF مساوی $\frac{۱}{۴}\mathrm{BC}$ است چون $\widehat{C}_۲ = ۱۵^\circ$. همچنین در این مثلث قائم‌الزاویه DE میانه است پس نصف BC است داریم.
$$\mathrm{DE} = \frac{\mathrm{BC}}{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۳} + ۴ = \frac{\mathrm{BC}}{۲} \Rightarrow \mathrm{BC} = ۴\sqrt{۳} + ۸ \Rightarrow \mathrm{EF} = \frac{۴\sqrt{۳}+۸}{۴} = \sqrt{۳} + ۲$$

اکنون با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.
$$\overset{\triangle}{BEC} : \mathrm{EF}^۲ = \mathrm{BF} \times \mathrm{FC} \Rightarrow (\sqrt{۳}+۲)^۲ = \mathrm{BF}\,(\mathrm{BC} - \mathrm{BF}) \Rightarrow ۳ + ۴ + ۴\sqrt{۳}$$
$$= \mathrm{BF}\,(۴\sqrt{۳} + ۸ - \mathrm{BF}) \Rightarrow \mathrm{BF}^۲ - (۴\sqrt{۳}+۸)\mathrm{BF} + ۷ + ۴\sqrt{۳} = ۰ \xrightarrow[\text{است}]{\text{جمع ضرایب صفر}}$$
$$\mathrm{BF} = ۱$$



۵۰ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در صورتی‌که G محل تلاقی دو میانهٔ BM و CN باشد آنگاه خواهیم داشت:



$$BG = \frac{۲}{۳}BM = \frac{۲}{۳}(۱۲) = ۸\,,\ CG = \frac{۲}{۳}CN = \frac{۲}{۳}(۹) = ۶$$

$$S_{BGC} = \frac{۱}{۲}BG \times CG = \frac{۱}{۲}(۸)(۶) = ۲۴$$

در ضمن می‌دانیم:

$$S_{BGC} = \frac{۱}{۳}S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = ۳S_{BGC} = ۳\times ۲۴ = ۷۲$$

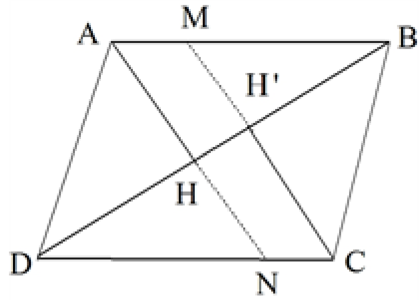
۵۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری که اگر $HH' = x$ آنگاه $BH' = DH = ۲x$. در ضمن AH و CH' بر قطر BD عمودند پس موازیند. با استفاده از قضیهٔ تالس می‌نویسیم:

$$AH \parallel MH' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MH'}{AH} = \frac{BH'}{BH} \Rightarrow \frac{MH'}{AH} = \frac{۲x}{۳x} = \frac{۲}{۳}\ (۱)$$

به همین ترتیب $\frac{NH}{CH'} = \frac{۲}{۳}$ پس دو ذوزنقهٔ AMH'H و CNHH' چون دارای ارتفاع مشترک HH' و قاعده‌های مساویند پس هم‌مساحتند، داریم:

$$\frac{\text{مساحت کوچکترین مثلث}}{\text{مساحت متوازی الاضلاع}} = \frac{S_{BMH'}}{S_{AMCN}} = \frac{\frac{۱}{۲}MH' \times BH'}{۲S_{AMH'H}} = \frac{\frac{۱}{۲}MH' \times BH'}{۲\left(\frac{۱}{۲}HH'(MH' + AH)\right)}$$

$$\xrightarrow{\text{از}(۱)} \frac{\frac{۱}{۲}MH'(۲x)}{(x)\left(MH' + \frac{۳}{۲}MH'\right)} = \frac{MH'}{\frac{۵}{۲}MH'} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \text{مساحت متوازی الاضلاع} = \frac{۵}{۲}(\text{مساحت مثلث})$$



۵۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. با توجه به شکل داریم:

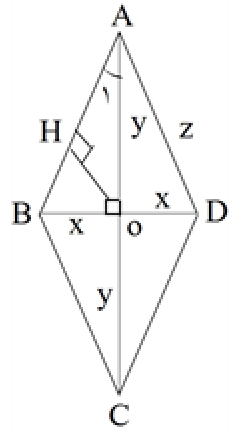
$$AB^{۲} = AC \times BD \Rightarrow z^{۲} = (۲x)(۲y) \Rightarrow z^{۲} = ۴xy \Rightarrow xy = \frac{z^{۲}}{۴} \quad (۱)$$

از طرف دیگر اگر ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویه AOB را رسم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}OH \times AB = \frac{۱}{۲}OA \times OB \Rightarrow OH \times z = xy \Rightarrow OH = \frac{xy}{z}$$

$$\xrightarrow{\text{از}(۱)} OH = \frac{\frac{z^{۲}}{۴}}{z} \Rightarrow OH = \frac{z}{۴} \Rightarrow OH = \frac{AB}{۴}$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه OAB ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است پس یک زاویهٔ حادهٔ این مثلث ۱۵° است پس $\widehat{A}_{۱} = ۱۵^\circ$ پس $\widehat{A} = ۳۰^\circ$ در نتیجه: $\widehat{B} = ۱۵۰^\circ$.



۵۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر G نقطه تلاقی میانه‌ها باشد آنگاه داریم:

$$CG = \frac{۲}{۳}CN \xrightarrow{CN=۴/۵} CG = \frac{۲}{۳}(۴/۵) = ۳$$

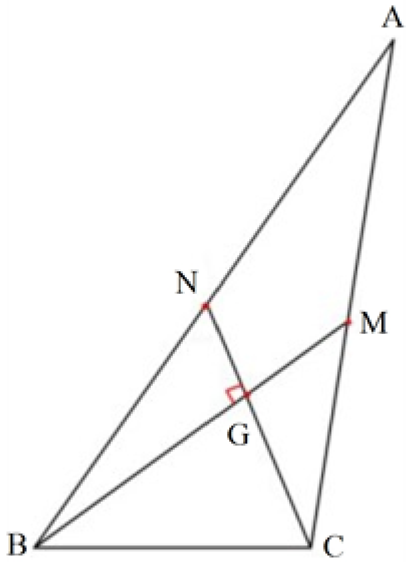
از طرف دیگر مساحت مثلث BGC مساوی $\frac{۱}{۳}$ مساحت مثلث ABC است.

$$S_{BGC} = \frac{۱}{۳}S_{ABC} = \frac{۱}{۳}(۱۸) = ۶$$

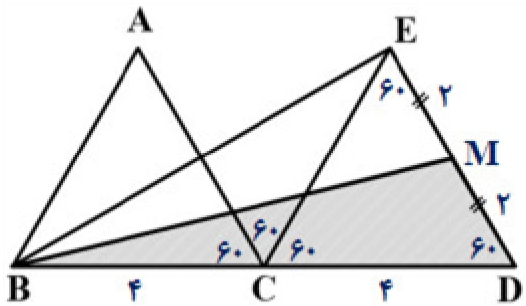
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}CG \times BG = ۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۳)\times BG = ۶ \Rightarrow BG = ۴$$

$$\xrightarrow{BG=\frac{۲}{۳}BM} BM = ۶$$

بنابراین: $\frac{BM}{CN} = \frac{۶}{۴/۵} = \frac{۴}{۳}$



۵۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

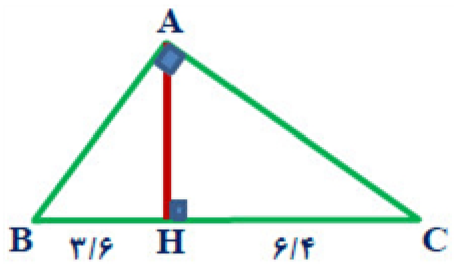


$$S_{\Delta BDM} = \frac{۱}{۲}\times MD \times BD \times \sin ۶۰$$

$$= \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۸\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{\Delta BDM} = ۳\sqrt{۳}$$

۵۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow AB^۲ = ۳/۶\times ۱۰ \Rightarrow AB = ۶ \\ AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow AC^۲ = ۶/۴\times ۱۰ \Rightarrow AC = ۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB + AC = ۱۴$$

۵۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد قطرهای یک nضلعی محدب از رابطهٔ $\frac{n(n-۳)}{۲}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}-\frac{(n-۱)(n-۴)}{۲}=۱۶\Rightarrow\frac{(n^۲-۳n)-(n^۲-۵n+۴)}{۲}=۱۶$$

$$\Rightarrow ۲n-۴=۳۲\Rightarrow ۲n=۳۶\Rightarrow n=۱۸$$

جواب مسئله برابر اختلاف تعداد قطرهای ۱۸ضلعی و ۱۶ضلعی است، بنابراین داریم:

$$\frac{۱۸\times۱۵}{۲}-\frac{۱۶\times۱۳}{۲}=۱۳۵-۱۰۴=۳۱$$

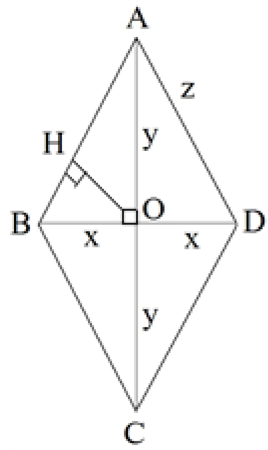
۵۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند. با توجه به شکل و فرض سؤال می‌نویسیم:

$$\mathrm{AB}^۲=\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}\Rightarrow z^۲=(۲x)(۲y)\Rightarrow z^۲=۴\mathrm{xy}\Rightarrow \mathrm{xy}=\frac{z^۲}{۴}\ (۱)$$

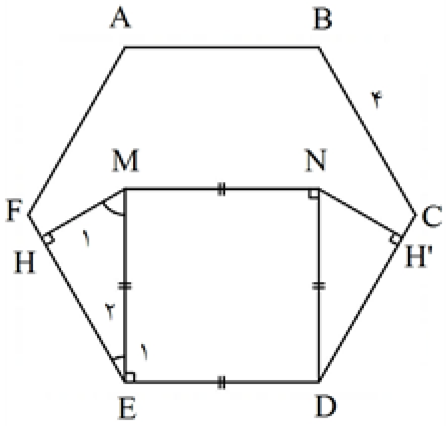
با رسم ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB نتیجه می‌گیریم.

$$\frac{۱}{۲}\mathrm{OH}\times z=\frac{۱}{۲}\mathrm{xy}\Rightarrow \mathrm{OH}=\frac{\mathrm{xy}}{z}\xrightarrow{\text{از }(۱)}\mathrm{OH}=\frac{\frac{z^۲}{۴}}{z}\Rightarrow \mathrm{OH}=\frac{z}{۴}$$

چون ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB مساوی $\frac{۱}{۴}$ وتر است پس یک زاویهٔ این مثلث ۱۵° است.



۵۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی MNDE مربع به ضلع ۴ است پس $\widehat{E}_۱ = ۹۰^\circ$. در ضمن هر زاویهٔ داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است پس $\widehat{E}_۲ = ۳۰^\circ$ در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویهٔ MHE زاویهٔ $\widehat{M}_۱$ برابر ۶۰° می‌شود بنابراین:



$$M\overset{\triangle}{E}H : \widehat{M}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow \mathrm{HE} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{ME} \xrightarrow{\mathrm{ME}=۴} \mathrm{HE} = ۲\sqrt{۳}$$

$$M\overset{\triangle}{E}H : \widehat{E}_۲ = ۳۰^\circ \Rightarrow \mathrm{MH} = \frac{۱}{۲}\mathrm{ME} \xrightarrow{\mathrm{ME}=۴} \mathrm{MH} = ۲$$

پس:

$$S_{\mathrm{MEH}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{MH} \times \mathrm{EH} = \frac{۱}{۲}(۲(۲\sqrt{۳})) = ۲\sqrt{۳}$$

به همین ترتیب مشخص می‌شود $S_{\mathrm{NDH'}} = ۲\sqrt{۳}$ بنابراین مجموع مساحت‌های دو مثلث MHE و NDH' برابر $۴\sqrt{۳}$ است.

۵۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال چهارضلعی BCFE مربع است. پس

$$\widehat{E}_۱ = ۹۰^\circ$$

از طرف دیگر هر زاویه داخلی شش‌ضلعی منتظم ۱۲۰° است. بنابراین:

$$\widehat{E}_۱ + \widehat{E}_۲ = ۱۲۰^\circ \xrightarrow{\widehat{E}_۱ = ۹۰^\circ} \widehat{E}_۲ = ۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{B}_۱ = ۶۰^\circ$$

چون $\widehat{B}_۳ = ۹۰^\circ$ و $\widehat{B}_۱ = ۶۰^\circ$ پس: $\widehat{B}_۲ = ۳۰^\circ$.

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\widehat{C}_۲ = ۳۰^\circ$ پس مثلث ABC متساوی‌الساقین با زاویه‌ی رأس ۱۲۰° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر قاعده‌ی BC را رسم کنیم. AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه

$$\mathrm{BK} = \mathrm{KC} = \frac{\mathrm{BC}}{۲} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$\widehat{A}_۱ = \frac{\widehat{A}}{۲} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰^\circ$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AKC ضلع KC روبرو به زاویه‌ی ۶۰° است. پس:

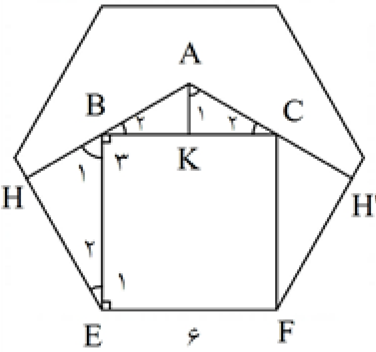
$$\mathrm{KC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{AC} \Rightarrow ۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{AC} = \frac{۶}{\sqrt{۳}} = ۲\sqrt{۳}$$

و AK روبرو به زاویه‌ی ۳۰° است. پس:

$$\mathrm{AK} = \frac{۱}{۲}\mathrm{AC} = \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳}) \Rightarrow \mathrm{AK} = \sqrt{۳}$$

بنابراین:

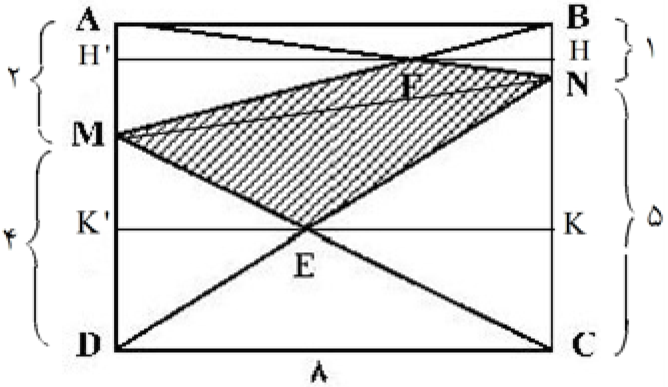
$$S_{\mathrm{ABC}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{AK} \times \mathrm{BC} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳})(۶) = ۳\sqrt{۳}$$



۶۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از نقطهٔ F عمود HH' و از نقطهٔ E عمود KK' را بر عرض‌های مستطیل وارد می‌کنیم.

$$BN \parallel AM \Rightarrow \overset{\triangle}{BFN} \sim \overset{\triangle}{AFM} \Rightarrow \frac{FH}{FH'} = \frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{FH}{HH'} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow{HH'=۸} FH = \frac{۸}{۳}$$



پس:
$$S_{BFN} = \frac{۱}{۲} FH \times BN = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۸}{۳}\right)(۱) = \frac{۴}{۳}$$

$$NC \parallel MD \Rightarrow \overset{\triangle}{ENC} \sim \overset{\triangle}{MDE} \Rightarrow \frac{EK}{EK'} = \frac{۵}{۴} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{EK}{KK'} = \frac{۵}{۹} \xrightarrow{KK'=۸} EK = \frac{۴۰}{۹}$$

پس:
$$S_{ENC} = \frac{۱}{۲} EK \times NC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۴۰}{۹} \times ۵ = \frac{۱۰۰}{۹}$$

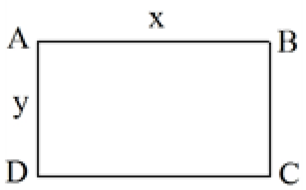
حال پاره‌خط MN را رسم می‌کنیم در این صورت دو ذوزنقه ABNM و MNCD ایجاد می‌شود. با استفاده از قضیه شبه پروانه داریم.

$$\text{ذوزنقه } ABNM \Rightarrow S_{MFN} = \sqrt{S_{FBN} \times S_{AFM}} = \sqrt{S_{FBN} \times ۴S_{FBN}} = ۲S_{FBN} = \frac{۸}{۳}$$

$$\text{ذوزنقه } MNCD \Rightarrow S_{MEN} = \sqrt{S_{ENC} \times S_{MED}} = \sqrt{S_{ENC} \times \frac{۱۶}{۲۵} S_{ENC}} = \frac{۴}{۵} S_{ENC} = \frac{۴}{۵}\left(\frac{۱۰۰}{۹}\right) = \frac{۸۰}{۹}$$

بنابراین:
$$S_{MENF} = S_{MFN} + S_{MEN} = \frac{۸}{۳} + \frac{۸۰}{۹} = \frac{۱۰۴}{۹}$$

۶۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طول مستطیل را x و عرض آن‌را y درنظر می‌گیریم. بنابر فرض سؤال $x = ۱/۵y - ۲$، داریم:



$$S_{ABCD} = ۱۹۲ \Rightarrow xy = ۱۹۲ \Rightarrow \left(\frac{۳}{۲}y - ۲\right)y = ۱۹۲$$

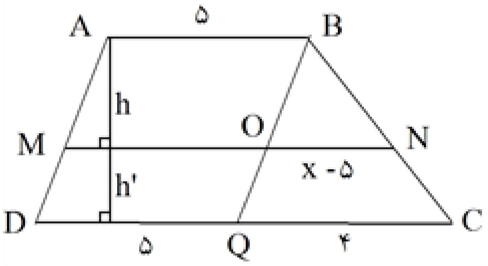
$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}y^{۲} - ۲y - ۱۹۲ = ۰ \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} ۳y^{۲} - ۴y - ۳۸۴ = ۰$$

این معادله را از دستور b' حل می‌کنیم.

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^{۲} - ac}}{a} = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۱۵۲}}{۳} = \frac{۲ \pm ۳۴}{۳} \Rightarrow y = ۱۲$$

پس $x = ۱۶$ در نتیجه: محیط مستطیل $= ۲(x + y) = ۲(۱۶ + ۱۲) = ۵۶$

۶۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ارتفاع ذوزنقه را رسم می‌کنیم و از رأس B پاره‌خط BQ را موازی AD ترسیم می‌کنیم تا ذوزنقه‌ی ABCD به متوازی‌الاضلاع ABQD و مثلث BQC تقسیم شود. در این صورت $DQ = ۵$ و $QC = ۴$ است. با فرض $MN = x$ نتیجه می‌گیریم $ON = x - ۵$ داریم:



$$S_{ABNM} = S_{MNCD} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(h)(۵+x) = \frac{۱}{۲}(h')(۹+x)$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{۹+x}{۵+x} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{h}{h+h'} = \frac{x+۹}{۲x+۱۴} \ (۱)$$

از طرف دیگر:

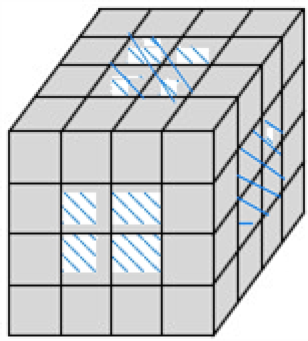
$$\overset{\triangle}{BQC} : ON \parallel QC \Rightarrow \overset{\triangle}{OBN} \sim \overset{\triangle}{BQC} \Rightarrow \frac{ON}{QC} = \frac{h}{h+h'} \Rightarrow \frac{x-۵}{۴} = \frac{h}{h+h'} \ (۲)$$

$$۲,۱ \text{ از } \Rightarrow \frac{x+۹}{۲x+۱۴} = \frac{x-۵}{۴} \Rightarrow ۲x^{۲} + ۴x - ۷۰ = ۴x + ۳۶ \Rightarrow ۲x^{۲} = ۱۰۶ \Rightarrow x^{۲} = ۵۳ \Rightarrow x = \sqrt{۵۳}$$

۶۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این‌که در مستطیل این اتفاق می‌افتد قضیه کتاب درسی است. مثال نقض هر سه گزینه‌ی دیگر مربع است که از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن یک نقطه به وجود می‌آید.

۶۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این مکعب از ۶۴ مکعب کوچک به ابعاد ۱×۱×۱ تشکیل شده است. مکعب‌های کوچکی فقط یک وجه آنها رنگ شده است. روی وجه‌های مکعب بزرگ قرار دارند، به جز مکعب‌های کوچکی که روی یال‌های آن هستند. در شکل مکعب‌های هاشورخورده مورد نظر سؤال هستند. بنابراین:

$$\text{تعداد مکعب‌های کوچک یک وجه رنگی} = ۶(۴-۲)(۴-۲) = ۲۴$$



۶۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکعب رنگی از $۶۴ = ۴×۴×۴$ مکعب کوچک تشکیل شده است. اگر از هر طرف یک ردیف حذف کنیم. آنگاه $۸ = ۲×۲×۲$ مکعب کوچک باقی می‌ماند که هیچ وجه رنگی ندارند.

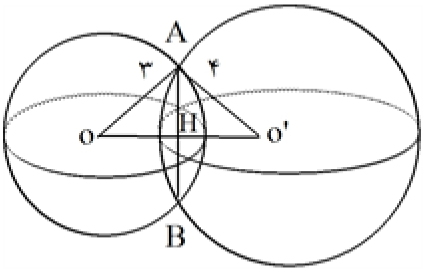
از طرف دیگر تعداد مکعب‌های کوچک رنگ شده برابر $۶۴ - ۸ = ۵۶$ است. بنابراین:

$$\frac{\text{تعداد مکعبات رنگ شده}}{\text{تعداد مکعبات رنگ نشده}} = \frac{۵۶}{۸} = ۷$$

۶۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکعب داده شده از $۴۸ = ۳×۴×۴$ مکعب کوچک ساخته شده است. نمای بالای خواسته شده شامل ۱۰ مکعب است پس حداکثر تعداد مکعب‌هایی که باید برداشته شود تا به نمای خواسته شده برسیم برابر $۴۸ - ۱۰ = ۳۸$ است.

۶۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو خط d و $L_{۲}$ قطعاً غیرموازی هستند، چون اگر $d \parallel L_{۲}$ باشد، آنگاه با توجه به موازی بودن $L_{۱}$ و $L_{۲}$، دو خط d و $L_{۱}$ نیز باید با هم موازی باشند (دو خط موازی با یک خط ، با یکدیگر موازی‌اند) که این خلاف فرض سؤال است.

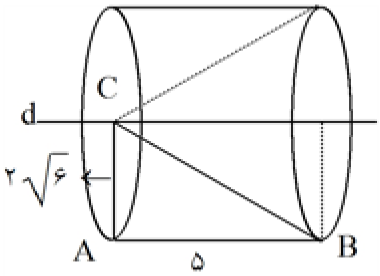
۶۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تلاقی دو کره یک دایره است. در شکل AH شعاع دایره‌ی موردنظر است. چون $OA=۳$ و $O'A=۴$ و $OO'=۵$ پس مثلث OAO' قائم‌الزاویه است. بنابراین با استفاده از رابطه‌ی طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم.



$$AH\times OO'=OA\times O'A\Rightarrow AH\times ۵=۳\times ۴\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}$$

$$\text{مساحت دایره}=\pi AH^۲=\pi\left(\frac{۱۲}{۵}\right)^۲=\frac{۱۴۴}{۲۵}\pi=۵/۷۶\pi$$

۶۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC حول خط d یک استوانه که از آن مخروطی جدا شده است به دست می‌آید. به طوری‌که ارتفاع استوانه و مخروط ۵ و شعاع قاعده‌ی هر دو آن‌ها $۲\sqrt{۶}$ است.



$$\text{حجم استوانه}=\pi R^۲h=\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)=۲۴\times ۵\pi$$

$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\pi R^۲h=\frac{۱}{۳}\pi(۲\sqrt{۶})^۲(۵)=\frac{۲۴\times ۵}{۳}\pi$$

بنابراین:

$$\text{حجم خواسته شده}=۲۴\times ۵\pi-\frac{۲۴\times ۵}{۳}\pi=\frac{۲\times ۲۴\times ۵}{۳}\pi=۸۰\pi$$

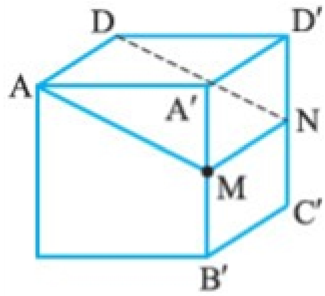
۷۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صفحه‌ای که از یال AD و از وسط یال $A'B'$ (یعنی نقطهٔ M) بگذرد از وسط یال $C'D'$ (یعنی نقطهٔ N) نیز می‌گذرد و مستطیل AMND سطح مقطع آن صفحه با مکعب است. اگر طول یال مکعب a باشد، آن‌گاه $D'N=\frac{a}{۲}$ و $DD'=a$ است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $DD'N$ داریم:

$$DN^۲=a^۲+\frac{a^۲}{۴}=\frac{۵a^۲}{۴}\Rightarrow DN=\frac{\sqrt{۵}}{۲}a$$

پس:

$$S_{\text{مقطع}}=S_{AMND}=AD.DD'=a\times\frac{a\sqrt{۵}}{۲}=\frac{a^۲\sqrt{۵}}{۲}$$

مساحت هر وجه مکعب $a^۲$ است، پس مساحت مقطع $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ برابر آن است.

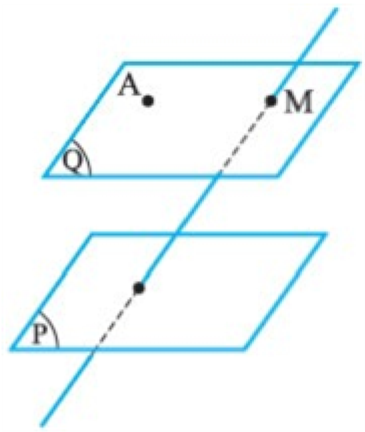


۷۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تمام خط‌هایی که از A می‌گذرند و موازی با صفحهٔ P هستند روی صفحه‌ای قرار دارند که شامل نقطهٔ A است و با صفحهٔ P موازی می‌باشد. (صفحهٔ Q)

اگر خط d موازی با P باشد ولی روی Q نباشد هر خطی که نقطهٔ A را به یک نقطه از d وصل کند، P را قطع می‌کند. در این صورت مسأله جواب ندارد.

اگر d روی Q باشد، آن‌گاه هر خطی که نقطهٔ A را به یک نقطه از d وصل کند جواب مسأله است و مسأله بی‌نهایت جواب دارد.

اما اگر d، صفحه P را قطع کند، Q را نیز در M قطع می‌کند و AM تنها جواب مسأله است. یعنی اگر خط d صفحهٔ P را قطع کند، آن‌گاه فقط یک خط وجود دارد که از A می‌گذرد، d را قطع می‌کند و با صفحهٔ P موازی است.



۷۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. جایی‌که خط واصل صفحه را قطع می‌کند، محل برخورد قطرهای چهارضلعی $A'B'C'D'$ است. این نقطه از طرفی وسط A'C' است زیرا تصویر نقطه وسط AC است. از طرفی وسط B'D' است باز به همان دلیل. بنابراین قطرهای این چهارضلعی یک‌دیگر را نصف کرده‌اند لذا چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

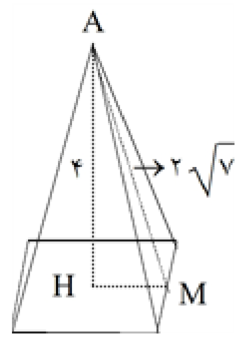
چهارضلعی می‌تواند لوزی نباشد. کافی است دو پاره‌خطی که با هم زاویهٔ ۶۰° درست می‌کنند درنظر بگیرید. یکی از آن‌ها را در جهت عمود بر صفحه دو خط ۱ واحد بالا ببرید. این یکی را AC و دیگری را BD بنامید. تصویری که سؤال می‌خواهد، برای این AC و BD یک متوازی‌الاضلاع است که زاویه بین دو قطر آن ۶۰° است. پس لوزی نیست.

۷۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ارتفاع هرم و ارتفاع مثلث کناری یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌کنند.

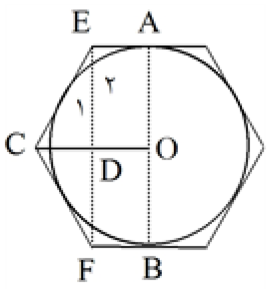
$$\text{HM} = \sqrt{(۲\sqrt{۷})^۲ - ۴^۲} = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\text{ضلع مربع قاعده} = ۲\text{HM} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\text{حجم هرم} : \frac{۱}{۳}a^۲h = \frac{۱}{۳}(۱۶\times۳)\times۴ = ۶۴$$



۷۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بزرگ‌ترین دایره‌ای که داخل ۶ ضلعی قرار می‌گیرد بر همه اضلاع آن مماس است.



$$\text{مجموع زوایای داخلی ضلعی۶} = ۷۲۰ \Rightarrow \text{هر زاویه} = ۱۲۰^\circ$$

$$E_۱ = ۱۲۰ - ۹۰ = ۳۰ \Rightarrow \mathrm{ED} = \frac{\mathrm{Cos}\ ۱۲۰}{۴} = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \mathrm{EF} = ۴\sqrt{۳} \xrightarrow{\mathrm{EF}=\mathrm{AB}} \mathrm{AB} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow r = \frac{۴\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

$$V = \pi \times (۲\sqrt{۳})^۲ \times ۷/۵ = ۹۰$$

۷۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل صفحه P به فاصلهٔ ۳ از قاعدهٔ مخروط جسم حاصل از حذف مخروط درون استوانه را در دو دایره به شعاع ۴ و $O'A$ قطع می‌کند.

برای به دست آوردن مساحت مقطع حاصل باید مساحت‌های این دو دایره را از هم کم کنیم.

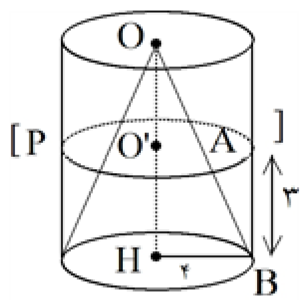
اکنون شعاع $O'A$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\overset{\triangle}{OBH} : O'A \parallel \mathrm{BH} \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{\mathrm{OO}'}{\mathrm{OH}} = \frac{O'A}{\mathrm{BH}} \xrightarrow{\mathrm{OO}'=۵-۳=۲} \frac{۲}{۵} = \frac{O'A}{۴} \Rightarrow O'A = \frac{۸}{۵}$$

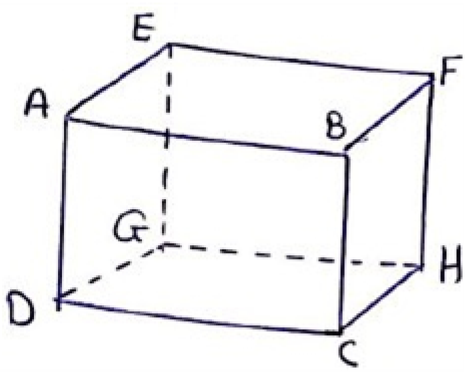
بنابراین:

$$\text{مساحت مقطع حاصل} = \text{مساحت دایره به شعاع ۴} - \text{مساحت دایره به شعاع } \frac{۸}{۵}$$

$$= \pi(۴)^۲ - \pi\left(\frac{۸}{۵}\right)^۲ = ۱۶\pi - \frac{۶۴}{۲۵}\pi = \frac{۳۳۶}{۲۵}\pi = ۱۳/۴۴\pi$$



۷۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



اگر یال AB را در مکعب مستطیل شکل مقابل درنظر بگیریم، آن‌گاه یال AB با یال‌های CH ، DG ، EG و FH متنافر است.

۱	۳
۲	۴
۳	۴
۴	۴
۵	۴
۶	۳
۷	۳
۸	۲
۹	۲
۱۰	۳
۱۱	۳
۱۲	۱
۱۳	۴
۱۴	۱
۱۵	۴
۱۶	۴
۱۷	۱
۱۸	۲
۱۹	۲
۲۰	۱
۲۱	۴
۲۲	۴
۲۳	۳
۲۴	۲
۲۵	۴
۲۶	۴
۲۷	۴
۲۸	۱
۲۹	۲
۳۰	۱
۳۱	۲
۳۲	۴
۳۳	۱
۳۴	۲
۳۵	۱
۳۶	۱
۳۷	۱
۳۸	۳
۳۹	۱
۴۰	۳
۴۱	۲
۴۲	۴
۴۳	۲
۴۴	۳
۴۵	۴
۴۶	۱
۴۷	۴
۴۸	۱
۴۹	۱
۵۰	۴
۵۱	۲
۵۲	۱
۵۳	۴
۵۴	۲
۵۵	۳
۵۶	۲
۵۷	۲
۵۸	۴
۵۹	۱
۶۰	۱
۶۱	۲
۶۲	۲
۶۳	۴
۶۴	۴
۶۵	۳
۶۶	۲
۶۷	۴
۶۸	۴
۶۹	۴
۷۰	۱
۷۱	۴
۷۲	۱
۷۳	۴
۷۴	۳
۷۵	۴
۷۶	۳