

شورتکات جاده نهایی

ریاضیات گسسته

فصل یک



Medical _ Stus



Kolyze



MEDICAL STUS

خوبیا برمیگرده

اشتراک

مدیکال پلاس

تمام آموزش‌های مدیکال، در یک اشتراک!

اشتراک MEDICAL PLUS فقط شامل محصولات آموزشی زیر است

73CORE

73 CORE



- آموزش پربازده کنگور
- به جای اتلاف وقت، برو سر اصل مطلب!
- جزوات هدفمند و به‌روز
- تدریس اسکرین رکورد
- تمرکز بر تیپ تست‌های پرتکرار

جاده نهایی



- روزی فقط ۱ ساعت برای ۲۰ نهایی
- برنامه تا خود امتحانات
- جزوه کامل و به‌روز
- فیلم آموزشی متناسب با جزوه
- تمرین + نمونه سوال + آزمون

جاده نهایی

کاملاً ویرایش شده برای ۲۰ نهایی

صد فرهنگیان



- ۲۵ ساعت آموزش کامل اختصاصی فرهنگیان
- هوش + تعلیم و تربیت + دین و زندگی
- جزوه و تدریس کامل (حدود ۲۵ ساعت)
- جزوه کامل مصاحبه (۱۰۰ صفحه)
- دسترسی به گروه VIP آزمون

مزایای اشتراک مدیکال پلاس



دسترسی کامل به سه محصول برتر آموزشی



آپدیت مداوم محتوا



دسترسی دائمی و نامحدود



پشتیبانی شروع کار (ویژه اشتراک ۳ ساله)



ضمانت عودت وجه تا ۱۴ روز



با یک اشتراک، سه محصول قدرتمند آموزشی را در اختیار شماست!



@medical_stus



medicalstus.ir



خوبیا برمیگرده





طرح‌های مشاوره

۳ سطح پشتیبانی، متناسب با نیاز تو



MENTORING

برای دانش‌آموزان
خودران و مستقل



تماس
هفتگی



گزارش
شبهانه



آزمونای مبحثی
و کویزای شبهانه



بدون
برنامه‌ریزی



اگه خودت برنامه می‌ریزی و فقط به همراه مطمئن
لازم داری تا ادامه بدی و بهتر بشی، این طرح برای تونه!



TASK PLAN

برای دانش‌آموزان
نیازمند برنامه کامل



تماس
هفتگی



گزارش
شبهانه



آزمونای مبحثی
و کویزای شبهانه



برنامه‌ریزی
شخصی



اگه می‌خوای از صفر تا صد، با یه برنامه شخصی دقیق
و منظم جلو بری و هیچ چیزی رو از دست ندی!



TASK PLAN PRO

برای دانش‌آموزان
با نیاز به پشتیبانی بالا



۲ تماس
در هفته



۲ گزارش
در روز



آزمونای مبحثی
و کویزای شبهانه



برنامه‌ریزی
شخصی



اگه می‌خوای پیشترین پیگیری و همراهی رو داشته باشی
و با قدرت و تمرکز کامل به هدفت برسی!



امکان تغییر مشاور
تغییر مشاور در صورت
نیاز، سریع و راحت



امکان خروج در صورت
کم‌کاری مشاور
اگه عملکرد مشاور رضایت‌بخش
نیود، می‌تونی خارج بشی



سیستم آزمونی مداوم
با سوالات به روز
سوالات مداوم و به‌روز متناسب
با سطح و برنامه‌ات



پشتیبانی واقعی
در کنار تو هستیم
تا به هدفت برسی



با هر طرح مشاوره، اشتراک **MEDICAL PLUS** با تخفیف ویژه در دسترسه!



۱ جواب عمومی معادله هم‌نهشتی $۷۵۰ \equiv ۴۶۳x \pmod{9}$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۲ در صورتی که دهم مهر در یک سال دوشنبه باشد، ۲۹ اسفند در همان سال چند شنبه است؟ (ذکر راه حل الزامی است).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۳ اگر a عدد صحیح بزرگ‌تر از یک و $a \mid ۱۱k + ۵$ و $a \mid ۷k + ۳$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۴ اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد صحیح a و b بر ۲۳ به ترتیب ۶ و ۷ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد $۳a - ۵b$ بر ۲۳ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۵ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، عبارت $n^2 - ۹n + ۱$ همواره عددی فرد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۶ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
حاصل عبارت $[(۴۸, ۷۲), ۱۵]$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
برای هر دو عدد حقیقی a و b ، اگر $a^2 + b^2 = ۰$ باشد، آنگاه $a = ۰$ و $b = ۰$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۸ نشان دهید شرط وجود جواب برای معادله $۲۰ \equiv ۱۶x \pmod{14}$ برقرار است، سپس جواب‌های عمومی آن را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۹ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $a \equiv b \pmod{n}$ ، ثابت کنید: $a \equiv b \pmod{mn}$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۰ اگر k عددی صحیح باشد به طوری که $۴ \mid ۳k + ۱$ ، ثابت کنید: $۱۶ \mid ۹k^2 + ۱۸k + ۵$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۱ اگر باقی مانده تقسیم دو عدد صحیح m و n بر ۱۹ به ترتیب ۴ و ۵ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد $(3m - 5n)$ بر ۱۹ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۲ برای هر دو عدد حقیقی a و b ، گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید.

$$5a^2 + b^2 \geq 4ab$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۳ به ازای چند مقدار a ، تساوی $(2a, 27) = a$ برقرار است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۴ اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab ۵ عددی فرد باشد، ثابت کنید حاصل $a^2 + b^2$ عددی زوج است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۵ شخصی در یک مسابقه پرتاب دارت، در هر پرتاب ۷ یا ۹ امتیاز و در مجموع ۱۸۳ امتیاز کسب کرده است. حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی او چقدر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۶ برای دو عدد حقیقی x و y نشان دهید:

$$3x^2 + y^2 \geq 6x - 3$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۷ اگر m, n دو عدد طبیعی و a, b دو عدد صحیح باشند و $a \equiv b \pmod{m}$ نشان دهید، $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۸ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و $4 \mid 3m - 2a$ ، $5 \mid m - 2a$ جواب‌های صحیح a را مشخص کنید؟ ($m \in \mathbb{Z}$)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۹ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.

- اگر α و β دو عدد گنگ غیرمساوی باشند، حاصل $\frac{\alpha + \beta}{2\beta}$ عددی گنگ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۲۰ جمله زیر را با نوشتن عدد مناسب در جای خالی تکمیل کنید.

اگر a, b دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشند و $27 \mid b, 9a \mid b$ آنگاه $a = \dots$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۲۱ معادله $1 + 2x \equiv 9x - 1 \pmod{13}$ را حل کنید و تعداد جواب‌های دو رقمی طبیعی آن را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۲ ثابت کنید اگر $p \geq 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود. ($k \in \mathbb{Z}$)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۳ اگر a, b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، باقی‌مانده $5 - a^2 + b^2$ بر ۸ را حساب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

هرگاه a, b, c سه عدد صحیح و $a \neq 0$ و $a|b$ و $a|c$ ثابت کنید: $a|b \pm c$ ۲۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست. ۲۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدامیک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟ ۲۶

$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$ ۱ $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ۲

$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ ۳ $a < b \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$ ۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

درستی و یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.
حاصل عبارت $(30, -18, -12]$ برابر ۶- است. « () نماد ب م م و [] نماد ک م م است» ۲۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

جای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید.
اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $a \not\equiv p \pmod{a}$ ۲۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

جواب‌های عمومی معادله سیاله $5x + 9y = 22$ را به دست آورید. ۲۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم عدد a را بر ۲۰ بیابید. ۳۰

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

اگر a عددی طبیعی و داشته باشیم $a|7k + 1$ و $a|4k + 3$ ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 17$. ۳۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a, b داریم:
 $a^2 + b^2 \geq (a - 1)(b + 1)$ ۳۲

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} | x = 4k + 3\}$ مضرب ۴ است. ۳۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
اگر $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ آنگاه: $[m^5, (m^3, m^2)] = m^5$ ۳۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است. ۳۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۳۶ رقم یکان عدد $A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100!$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۳۷ اگر $a|b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت ثابت کنید: $|a| \leq |b|$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۳۸ ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آنها کمتر نیست.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۳۹ کدامیک از معادلات هم‌نهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟

۴ $3x \equiv 10 \pmod{7}$

۳ $5x \equiv 10 \pmod{7}$

۲ $2x \equiv 3 \pmod{5}$

۱ $6x \equiv 11 \pmod{9}$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۴۰ باقی‌مانده تقسیم عدد $(9^{100} - 2^{100} - 7^{100})$ بر ۱۴ کدام است؟

۴ ۸

۳ ۵

۲ ۳

۱ صفر

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۴۱ عدد 1402 به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمان ۷ تعلق دارد؟

۴ [۱]

۳ [۰]

۲ [۲]

۱ [۵]

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۴۲ چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید.
- حاصل ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۴۳ چنانچه گزاره زیر درست است آن را اثبات کنید و اگر نادرست است آن را با ارائه مثال نقض، رد کنید.
- با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۴۴ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
اگر a, b, c و c اعدادی طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$ ، در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۴۵ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
اگر k عددی صحیح باشد، باقی مانده تقسیم $300 - 19k$ بر ۱۹ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۴۶ معادله هم‌نهشتی $11 \equiv 1402x \pmod{9}$ را حل کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۴۷ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 63^{14} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۴۸ اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $1 + 2k \mid 49$ ، ثابت کنید:

$6 - 10k - 49 \mid 4k^2$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۴۹ به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیح فرد باشد و $2 + b|a$ ، آن‌گاه b نیز عددی فرد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۵۰ برای هر دو عدد حقیقی x و y ، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۵۱ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) برای اعداد صحیح a, b و c که $a \neq 0$ ، اگر $a|b + c$ آن‌گاه $a|b$ یا $a|c$.

ج) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m)|b$.

د) اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ آن‌گاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۵۲ در معادله سیاله $15x + 19y = 7$ ، بزرگترین عدد 2 رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (با راه‌حل)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۵۳ باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد 4 و 5 به ترتیب برابر 3 و 4 می‌باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر 20 را محاسبه کنید. (با راه‌حل)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۵۴ اگر $a|2m + 3$ و $a|m + 7$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۵۵ اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۵۶ معادله هم‌نهشتی $4x \equiv 10 \pmod{6}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۵۷ باقی‌مانده تقسیم عدد $20! + 19! + 18! + \dots + 2! + 1!$ بر 15 به دست آورید. (نماد فاکتوریل می‌باشد).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۵۸ اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر 8 بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۵۹ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4 + 5m)$ و $(6m + 5)$ بر a بخشپذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۶۰ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

«برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۶۱ در جاهای خالی عبارتهای مناسب بنویسید.

الف) حاصل (m^2, m) برابر با است.

ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم a و b هستند.

پ) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر می‌نامیم.

ت) تعداد یال‌های گراف K_n برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۶۲ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.

ب) اگر $a|b + c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a + b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است.

ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۶۳ دانش‌آموز در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲

امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد).

این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۶۴ ثابت کنید باقیمانده هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۶۵ اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقیمانده تقسیم عدد a بر ۴۲ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۶۶ اگر عدد طبیعی a ، دو عدد $(5k + 9)$ و $(8k + 13)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = 1$ یا $a = 7$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۶۷ a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید

$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۶۸ هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال، نقض کنید.

الف) برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است.

ب) مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۶۹ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۰ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 27^{20} + 18$ را بر ۱۳ بیابید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۱) اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $۵|۴k + ۱$ ، ثابت کنید $۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۲) ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n ، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۳) درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $a|b$ و $b \neq ۰$ ، در این صورت $|a| > |b|$.

ب) برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a|c, b|c)$ و $(\forall m > ۰, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m)$ آن گاه $[a, b] = c$.

پ) برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m ، اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \equiv r \pmod{m}$.

ت) بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲ برابر ۲ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۷۴) در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($۱ \leq n \leq ۲۰۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۷۵) معادله سیاله $۵x + ۲y = ۱۸$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۷۶) اگر دو عدد $(۳a - ۵)$ و $(۴a - ۷)$ رقم یکسان برابر داشته باشند، رقم یکسان عدد $(۹a + ۶)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۷۷) اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a + ۲$ یا $a + ۴$ بر ۳ بخش پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۷۸) اگر $a > ۱$ ، $a|۹k + ۴$ و $a|۵k + ۳$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۷۹) درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $a|b$ و m, n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$ ، آن گاه $a^m|b^n$.

ب) اگر $a|b$ آن گاه $(a, b) = a$.

پ) اگر $a \equiv b \pmod{m}$ باشد، آن گاه باقی مانده های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی اند.

ت) منظور از حل معادله هم نهشتی، پیدا کردن همه جواب های حقیقی است که در معادله $ax \equiv b \pmod{m}$ صدق کند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۰) ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۸۱) معادله سیاله $۶x + ۷y = ۱۸۵$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است. **۸۲**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است. **۸۳**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است. **۸۴**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید. **۸۵**
 الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ / گویا) است.
 ب) اگر دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a|b$ ، برای هر $m \in \mathbb{Z}$ داریم: $(a|mb / ma|b)$.
 پ) اگر $a|b$ آن‌گاه b و a عدد m برابر با $(a / |a|)$ است.
 ت) اگر $ac \equiv bc \pmod{m}$ و $(c, m) = d$ آن‌گاه رابطه $\left(a \equiv b / a \equiv b \right)$ برقرار خواهد بود.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

باقی‌مانده تقسیم عدد $11 + 9 \times 1000^{25}$ را بر ۷ بیابید. **۸۶**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

معادله $7x \equiv 1 \pmod{4}$ را حل کنید. **۸۷**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

ثابت کنید اگر: $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود. **۸۸**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است. **۸۹**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید. **۹۰**
 الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a|b$ آن‌گاه عدد شمارنده عدد است.
 ب) m عددی صحیح است. حاصل $(2m, 6m^2)$ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید. **۹۱**
 الف) حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.
 ب) هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطه $x^2 + y^2 = (x + y)^2$ برقرار باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

معادله هم‌نهشتی $8x \equiv 20 \pmod{12}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید. **۹۲**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

باقی‌مانده تقسیم $(19 + 28^{36})$ را بر ۴ به دست آورید. **۹۳**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(3 + 2a, 4 + 5a)$ را به دست آورید. **۹۴**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(5b - 2a)$ بر ۱۷ را بیابید. **۹۵**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است. **۹۶**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.
 الف) برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.
 ب) برای دو عدد طبیعی a و b ، اگر $a|b$ آن‌گاه $[a, b] = |b|$.
 پ) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, m)|b$. **۹۷**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

فرض کنید $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b \pmod{m}$ و $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$. **۹۸**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید. **۹۹**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

رقم یکان عدد $(2^{11} + 7)$ را به دست آورید. **۱۰۰**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید. **۱۰۱**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می‌شود. **۱۰۲**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a|3n + 4$ و $a|2n + 3$. نشان دهید $a = 1$. **۱۰۳**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. **۱۰۴**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۱۰۵) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

- الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
 ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$.
 پ) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
 ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۱۰۶) در بین اعداد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۰۷) اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۰۸) معادله هم‌نهشتی $2 \equiv 5x \pmod{11}$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۰۹) باقی‌مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۱۰) اگر $n \in \mathbb{N}$ ، $n | 9k + 7$ و $n | 7k + 6$ ، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۱۱) اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۱۲) گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.
 الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
 ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

$$463x \equiv 750 \Rightarrow (4 + 6 + 3)x \equiv (7 + 5 + 0) \Rightarrow 4x \equiv 12 \xrightarrow{(4,9)=1} x \equiv 3 \Rightarrow x = 9k + 3$$

۱

$$= 20 + 4 \times 30 + 29 \equiv 169 \equiv 1$$

۲

د	س	ج	پ	ج	ش	ی
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

روز سه‌شنبه

۳ روش اول:

$$a|11k + 5, a|vk + 3 \Rightarrow a|7vk + 35, a|7vk + 33 \Rightarrow a|(7vk + 35) - (7vk + 33) \Rightarrow a|2 \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{cases} 11k + 5 = aq_1 \Rightarrow 7vk + 35 = aq_2 \\ vk + 3 = aq_3 \Rightarrow 7vk + 33 = aq_4 \end{cases} \Rightarrow 2 = aq_5 \Rightarrow q_5 = 1, a = 2$$

روش دوم:

۴ روش اول:

$$a = 23q_1 + 6 \Rightarrow 3a = 3 \times 23q_1 + 18$$

$$b = 23q_2 + 7 \Rightarrow -5b = -5 \times 23q_2 - 35$$

$$= 23(3q_1 - 5q_2 - 1) + 6 \Rightarrow r = 6$$

$$a \equiv 6 \Rightarrow 3a \equiv 18 \Rightarrow 3a - 5b \equiv -17 \equiv 6 \Rightarrow r = 6$$

روش دوم:

$$b \equiv 7 \Rightarrow 5b \equiv 35$$

روش سوم:

$$\begin{cases} a = 23q_1 + 6 \Rightarrow 23|a - 6 \\ b = 23q_2 + 7 \Rightarrow 23|b - 7 \end{cases} \Rightarrow 23|3(a - 6) - 5(b - 7) - 23 \Rightarrow 23|3a - 5b - 6$$

$$\Rightarrow 3a - 5b = 23q_3 + 6 \Rightarrow r = 6$$

$$\begin{cases} n = 2k \Rightarrow n^2 - 9n + 1 = (2k)^2 - 9(2k) + 1 = 2(2k^2 - 9k) + 1 = 2t + 1 \\ n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - 9n + 1 = (2k + 1)^2 - 9(2k + 1) + 1 = 2(2k^2 - 7k - 4) + 1 = 2q + 1 \end{cases}$$

۵

۱۳۰ ۶

درست ۷

معادله جواب دارد $(16, 14) = 2|20$

روش اول: ۸

$$16x \equiv 20 \Rightarrow 4x \equiv 5 \Rightarrow 4x \equiv 5 + 7 \Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x = 7k + 3$$

روش دوم:

$$16x \equiv 20 \Rightarrow 16x + 14y = 20 \Rightarrow 8x + 7y = 10, (8, 7) = 1, 1|10$$

معادله جواب دارد $(8, 7) = 1, 1|10$

$$8x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 5 \Rightarrow 4x \equiv 5 + 7 \Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x = 7k + 3$$

روش سوم:

$$16x \equiv 20 \Rightarrow 16x + 14y = 20 \Rightarrow 8x + 7y = 10, (8, 7) = 1, 1|10$$

معادله جواب دارد $(8, 7) = 1, 1|10$

$$x_1 = 3, y_1 = -2 \Rightarrow x = x_1 + \frac{b}{d}k = 3 + 7k$$

حل با یافتن جواب خصوصی:

$$a \equiv^m b, n|m \Rightarrow m|a - b, n|m \Rightarrow n|a - b \Rightarrow a \equiv^n b$$

روش اول: ۹

$$a \equiv^m b, n|m \Rightarrow a - b = mq, m = nq' \Rightarrow a - b = nq'q \Rightarrow a \equiv^n b$$

روش دوم:

روش سوم:

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv^m b \\ n|m \Rightarrow m = nq \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv^{nq} b \Rightarrow nq|a - b, n|nq \Rightarrow n|a - b \Rightarrow a \equiv^n b$$

روش چهارم: برهان خلف: فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد، پس a همنهشت b به پیمانه n نیست:

$$\left\{ \begin{array}{l} a - b \neq nq_1 \Rightarrow a - b = nq_1 + r, 0 < r < n \quad (*) \\ a \equiv^m b, n|m \Rightarrow a - b = mq_r, m = nq_r \Rightarrow a - b = nq_r q_r \\ \Rightarrow nq_1 + r = nq_r q_r \Rightarrow n|r \quad (**) \end{array} \right.$$

رابطه (*) با (***) تناقض دارد، پس حکم برقرار است.

روش اول: ۱۰

$$\left. \begin{array}{l} 4|3k + 1 \Rightarrow 4 \times 4|4(3k + 1) \Rightarrow 16|12k + 4 \\ 4|3k + 1 \Rightarrow 4^2|(3k + 1)^2 \Rightarrow 16|9k^2 + 6k + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 16|9k^2 + 18k + 5$$

$$3k + 1 = 4q \Rightarrow \begin{cases} 12k + 4 = 16q \\ 9k^2 + 6k + 1 = 16q^2 \end{cases} \Rightarrow 9k^2 + 18k + 5 = 16q^2$$

روش دوم:

$$\Rightarrow 16|9k^2 + 18k + 5$$

روش سوم:

$$3k + 1 \equiv^4 \cdot \Rightarrow 12k + 4 \equiv^{16} \cdot, 9k^2 + 6k + 1 \equiv^{16} \cdot \Rightarrow 9k^2 + 18k + 5 \equiv^{16} \cdot$$

$$\Rightarrow 16 \equiv^{16} 9k^2 + 18k + 5$$

$$4|3k + 1 \Rightarrow 4|3k + 5 \Rightarrow 16|(3k + 1)(3k + 5) \Rightarrow 16|9k^2 + 18k + 5$$

روش چهارم:

$$3k + 1 \equiv^4 \cdot \Rightarrow 3k + 5 \equiv^4 \cdot \Rightarrow (3k + 1)(3k + 5) \equiv^{16} \cdot \Rightarrow 16|9k^2 + 18k + 5$$

روش پنجم:

روش اول: ۱۱

$$\left. \begin{array}{l} m = 19q_1 + 4 \\ n = 19q_r + 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3m = 19q_r + 12 \\ 5n = 19q_r + 25 \end{array} \right\} \Rightarrow 3m - 5n = 19q_\delta + 6 \Rightarrow r = 6$$

روش دوم:

$$m \equiv^{19} 4, n \equiv^{19} 5 \Rightarrow 3m - 5n \equiv^{19} 12 - 25 \equiv^{19} -13 \Rightarrow 3m - 5n \equiv^{19} -13 + 19 \equiv^{19} 6 \Rightarrow r = 6$$

روش اول: ۱۲

$$5a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 5a^2 + b^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 + a^2 + b^2 - 4ab \geq 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 + a \geq 0.$$

نامساوی اخیر، همواره برقرار است و روابط بالا برگشت پذیرند.

$$5a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 5a^2 - 4ab + b^2 \geq 0.$$

روش دوم:

$$\begin{cases} \Delta = 16b^2 - 20ab + 5a^2 \geq 0 \\ \Delta = 16b^2 - 20ab + 5a^2 \leq 0 \end{cases}$$

نامساوی اخیر، همواره برقرار است. زیرا:

روابط بالا برگشت پذیرند. یا به طور مشابه استدلال زیر نیز قابل قبول است:

$$5a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow b^2 - 4ab + 5a^2 \geq 0.$$

$$\begin{cases} \Delta = 16a^2 - 20ab + 5b^2 \geq 0 \\ \Delta = 16a^2 - 20ab + 5b^2 \leq 0 \end{cases}$$

نامساوی اخیر، همواره برقرار است و روابط بالا برگشت پذیرند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$(2a, 27) = a \Rightarrow \begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a | 2a \Rightarrow a \in \{1, 3, 9, 27\} \\ a | 27 \end{cases}$$

$$5ab \Rightarrow ab \text{ فرد} \Rightarrow a, b \text{ هر دو فرد} \Rightarrow (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1$$

۱۴

$$= 2(2k^2 + 2k + 2k'^2 + 1)$$

q

$$a^2 + b^2 = 2q$$

روش اول: ۱۵

$$7x + 9y = 183 \Rightarrow 7x \equiv 183 \equiv 3 \pmod{9} \xrightarrow{+18} 7x \equiv 21 \pmod{9} \xrightarrow{\div 7} x \equiv 3 \pmod{9} \Rightarrow x = 9k + 3$$

$$\Rightarrow 7(9k + 3) + 9y = 183 \Rightarrow y = 18 - 7k$$

حداکثر تعداد پرتابهای ۹ امتیازی ۱۸

روش دوم:

$$7x + 9y = 183 \Rightarrow 9y \equiv 183 \equiv 3 \pmod{7} \xrightarrow{+25} 9y \equiv 28 \pmod{7} \xrightarrow{\div 9} y \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow y = 7k + 4$$

$$\Rightarrow 7x + 9(7k + 4) = 183 \Rightarrow x = 21 - 9k$$

حداکثر تعداد پرتابهای ۹ امتیازی ۱۸

$$3x^2 + y^2 \geq 6x - 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + y^2 \geq 0.$$

۱۶

نامساوی همواره برقرار است و چون روابط برگشت پذیر می باشند پس فرض سؤال ثابت می شود.

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m | a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$$

۱۷

$$\begin{aligned}
 2a \mid 5m - 2 &\xrightarrow{\times 2} 2a \mid 10m - 4 \\
 &\xrightarrow{-} 2a \mid 14 \Rightarrow a \mid 7 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 7 \\
 2a \mid 3m - 4 &\xrightarrow{\times 5} 2a \mid 15m - 20
 \end{aligned}$$

۱۸

۱۹ نادرست

$a = 3$ ۲۰

$$9x - 1 \equiv 2x + 1 \pmod{13} \Rightarrow 7x \equiv 2 \pmod{13} \Rightarrow 7x \equiv 2 + 2 \times 13 = 28 \pmod{13} \xrightarrow{\div 7} x \equiv 4$$

۲۱

$$\Rightarrow x = 13k + 4 \Rightarrow 10 \leq 13k + 4 \leq 99 \Rightarrow \frac{6}{13} \leq k \leq \frac{95}{13}$$

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

لذا معادله ۷ جواب دو رقمی دارد.

۲۲ کافی است p را بر عدد ۴ تقسیم کنیم. در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$$p = 4k, p = 4k + 1, p = 4k + 2, p = 4k + 3$$

در حالت‌های $p = 4k + 2, p = 4k$ عددی زوج است. لذا با اول بودن آن تناقض دارد. فقط حالت‌های $p = 4k + 1$ و $p = 4k + 3$ باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

۲۳ راه اول: ab فرد است لذا هر دو عدد a, b فرد می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 a &= 2k + 1 \\
 b &= 2k' + 1 \\
 a^2 + b^2 - 5 &= 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 - 5 = 4k(k + 1) + 4k'(k' + 1) - 3 \\
 &= 4q'' - 3 = 4(q'' - 1) + 5 = 4t + 5 \Rightarrow r = 5
 \end{aligned}$$

راه دوم: ab فرد است لذا هر دو عدد a, b فرد می‌باشند.

$$\begin{aligned}
 a &= 2k + 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \\
 b &= 2k' + 1 \Rightarrow b^2 \equiv 1 \\
 a^2 + b^2 - 5 &\equiv 1 + 1 - 5 \equiv -3 \equiv 5 \pmod{4} \Rightarrow r = 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a \mid b &\xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = aq \\
 &\xrightarrow{\pm} b \pm c = aq \pm aq' = a(q \pm q') \Rightarrow a \mid b \pm c \\
 a \mid c &\xrightarrow{\exists q' \in \mathbb{Z}} c = aq'
 \end{aligned}$$

۲۴

۲۵ راه اول:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

رابطه اخیر همواره برقرار است.

راه دوم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow a+b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

رابطه اخیر همواره برقرار است.

۲۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲۷ نادرست

۲۸ ۱

$$5x \equiv 22 \Rightarrow x \equiv 8 \Rightarrow x = 9k + 8$$

۲۹ روش اول:

$$5(9k + 8) + 9y = 22 \Rightarrow y = -2 - 5k$$

$$9y \equiv 22 \Rightarrow y \equiv 3 \Rightarrow y = 5k + 3$$

روش دوم:

$$5x + 9(5k + 3) = 22 \Rightarrow x = -1 - 9k$$

$$\begin{aligned} a = 4q_1 + 2 & \Rightarrow 5a = 20q_1 + 10 \\ a = 5q_2 + 3 & \Rightarrow 4a = 20q_2 + 12 \end{aligned} \Rightarrow a = 20(q_1 - q_2) - 2$$

۳۰ روش اول:

$$a = 20q_2 + 18 \Rightarrow r = 18 \text{ یا } r = -2 + 20 = 18$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} a \equiv 2 \equiv 18 \Rightarrow a = 4k + 18 & \Rightarrow 4k + 18 \equiv 18 \Rightarrow k = 5t \Rightarrow a = 20t + 18 \Rightarrow r = 18 \\ a \equiv 3 \equiv 18 & \end{aligned}$$

$$a|7k + 1 \Rightarrow a|28k + 4$$

$$a|4k + 3 \Rightarrow a|28k + 21$$

$$a|17(a-17) \quad a \in \mathbb{N} \cup a = 1 \text{ یا } a = 17$$

۳۱

$$a^2 + b^2 \geq ab + a - b - 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 2ab - 2a + 2b + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 \geq 0$$

۳۲

۳۳ درست

۳۴ نادرست

۳۵ نادرست

میانگین ۵ عدد متوالی عدد وسطی می شود ولی در این گزاره اشاره ای به متوالی اعداد نکرده است.

$$A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100! \Rightarrow A = 2! + 4! + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

مضرب ۲ و ۵

$$\Rightarrow A \equiv 2 + 24 + 0 \Rightarrow A \equiv 26 \equiv 6 \pmod{29} \text{ (ص ۲۹)}$$

۳۶

$$a|b \Rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow |b| = |a| |q|$$

$$q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow |q| \geq 1 \Rightarrow |a| |q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a| \text{ (ص ۱۱)}$$

۳۷

$$a^2 + b^2 \geq -ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab \geq 0 \text{ (ص ۷)}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a^2 + b^2 + 2ab) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + (a+b)^2 \geq 0 \text{ همواره برقرار}$$

۳۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۵) ۳۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹) ۴۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (ص ۲۹) ۴۱

نادرست - با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل ضرب صفر است که گویا می‌شود. (ص ۵) ۴۲

$$2k \times (2k + 2) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2 \quad \text{درست (ص ۳)} \quad \text{۴۳}$$

b (ص ۱۳) ۴۴

۴ (ص ۱۴) ۴۵

$$(1 + 4 + \dots + 2)x \equiv 1 + 1 \Rightarrow vx \equiv 2 \Rightarrow vx \equiv -v \xrightarrow{(v,9)=1} x \equiv -1 \Rightarrow x = 9k - 1 \quad \text{(ص ۳۰)} \quad \text{۴۶}$$

$$63 \equiv -1 \Rightarrow 63^{14} \equiv 1 \Rightarrow A \equiv 2 \Rightarrow r = 2 \quad \text{(ص ۲۱)} \quad \text{۴۷}$$

$$v|2k + 1 \Rightarrow \begin{cases} 49|4k^2 + 4k + 1 \\ 49|14k + 7 \end{cases} \Rightarrow 49|4k^2 - 10k - 6 \quad \text{(ص ۱۶)} \quad \text{۴۸}$$

$$b = 2k, b|a + 2 \Rightarrow a + 2 = bq \Rightarrow a = 2t \quad \text{۴۹}$$

که با فرض سؤال در تناقض است. (ص ۱۶)

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 2)^2 \geq 0 \quad \text{۵۰}$$

این رابطه همواره برقرار است. (ص ۸)

الف) نادرست (ص ۵) ۵۱

ب) نادرست (ص ۱۱)

ج) درست (ص ۲۵)

د)

درست (ص ۱۳)

$$15x \equiv 7 \Rightarrow 15x \equiv 45 \xrightarrow{(15,19)=1} x \equiv 3 \Rightarrow x = 19k + 3 \quad \text{۵۲}$$

$$\xrightarrow{k=5} x = 98 \quad \text{(ص ۲۸)}$$

$$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \end{cases} \Rightarrow a = 20q' - 1 \Rightarrow a = 20q'' + 19 \quad \text{(ص ۱۶)} \quad \text{۵۳}$$

$$\begin{cases} a|2m + 3 \xrightarrow{\times 2} \\ a|m + 7 \end{cases} \Rightarrow a|11 \Rightarrow a = 1, a = 11 \quad \text{(ص ۱۱)} \quad \text{۵۴}$$

$x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + z^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + z^2 + 1 \geq 0$ (ص ۸) همواره بدیهی است. ۵۵

چون $(12, 8) | 20$ معادله جواب دارد. (ص ۳۰) ۵۶

$4x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 4 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow x = 3k + 1$

می‌دانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 24$ و $5! \equiv 120$ و ... $20! \equiv 0$ پس داریم: (ص ۲۹) ۵۷

$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 20! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + \dots + 0 \equiv 3$

می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k + 1$ می‌باشد ($k \in \mathbb{Z}$) پس داریم: (ص ۱۶) ۵۸

$$\begin{cases} a^2 = 8k + 1 \\ b^2 = 8k' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k'' + 7 \Rightarrow r = 7$$

$a | 6(5m + 4) \Rightarrow a | 5(6m + 5) - 6(5m + 4) \Rightarrow a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$ (ص ۱۱) ۵۹

$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (x + y)^2 \geq 0$ (ص ۸ و ۷) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است. ۶۰

(الف) m^2 ۶۱
 (ب) نسبت به هم اول (ص ۱۳)
 (پ) مینیمال (ص ۴۶)
 (ت) ۲۱ (ص ۳۸)

(الف) درست ۶۲
 (ب) نادرست
 (پ) نادرست
 (ت) درست

$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = 3k \Rightarrow 5(3k) + 3y = 42 \Rightarrow y = -5k + 14$ (ص ۲۸)
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}; \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$

عدد n رقمی $A = a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0$ را بسط می‌دهیم و در هم‌نهشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم: (ص ۲۲) ۶۴

$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + 1 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$
 $\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$

$a = 6q + 3 \Rightarrow 7a = 42q + 21 \Rightarrow a = 42(q - q' - 1) + 33 \Rightarrow r = 33$ (ص ۱۴) ۶۵
 $a = 7q' + 5 \Rightarrow 6a = 42q' + 30$

$\begin{cases} a | 5k + 9 \\ a | 8k + 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a | 40k + 72 \\ a | 40k + 65 \end{cases} \Rightarrow a | 7 \Rightarrow a = 1 \vee a = 7$ (ص ۱۲) ۶۶

۶۷ اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشد. در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید فرد باشد. اما با توجه به فرض مسأله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (ص ۶)

۶۸ الف) نادرست، مثال نقض $n = 3$ (ص ۳)

ب) درست، اثبات: $a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ (ص ۸)

۶۹ فاصله ۱ متر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی $131 = 12 + 3 \times 30 + 29$. از طرفی $5 \equiv 131 \pmod{7}$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است. (ص ۲۴)

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۷۰ $27 = 13 \times 2 + 1 \Rightarrow 27 \equiv 1 \pmod{13}$, $18 = 13 \times 1 + 5, 18 \equiv 5 \pmod{13}$
 $\Rightarrow (27)^2 + 18 \equiv 1 + 5 \pmod{13} \Rightarrow r = 6$ (ص ۲۱)

۷۱ $5 | 4k + 1 \Rightarrow 25 | 16k^2 + 8k + 1 \xrightarrow{+} 25 | 16k^2 + 28k + 6$ (ص ۱۶)
 $5 | 4k + 1 \Rightarrow 25 | 20k + 5$

۷۲ $n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1$ (ص ۴)

۷۳ الف) نادرست (ص ۱۱) ب) درست (ص ۱۳)
 پ) درست (ص ۲۱) ت) نادرست (ص ۱۳)

۷۴ $A = \{1 \leq n \leq 200 | n = 4k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50, B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 7k\}$

$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 28k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor = 7$
 $|A \cap B^c| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$ (ص ۸۳)

۷۵ $2y \equiv 18 \xrightarrow{(2,5)=1} y \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow y = 5k + 4 \Rightarrow 5x + 2(5k + 4) = 18$
 $\Rightarrow x = -2k + 2$ (ص ۲۹)

۷۶ $4a - 7 \equiv 3a - 5 \pmod{10} \Rightarrow a \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 9a + 6 \equiv 24 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow r = 4$ (ص ۲۹)

۷۷ طبق الگوریتم تقسیم داریم: $a = 3k$ که بر ۳ بخش‌پذیر است. یا $a = 3k + 1 \Rightarrow a + 2 = 3(k + 1)$ یا $a = 3k + 2 \Rightarrow a + 4 = 3(k + 2)$ که در هر دو مورد بر ۳ بخش‌پذیر هستند. (ص ۱۵)

$a|9(5k+3) - 5(9k+4) \Rightarrow a|27 - 20 \Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a = 7 \in P$ (ص ۱۲) ۷۸

(الف) درست (ص ۱۶) ۷۹
 (ب) نادرست (ص ۱۳)
 (پ) درست (ص ۲۹)
 (ت) نادرست (ص ۲۴)

۸۰ فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. فرض خلف: فرض کنیم $r + x$ گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r + x - r \in \mathbb{Q}$ یعنی $x \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (ص ۵)

$6x \equiv 185 = 23 \times 7 + 24 \Rightarrow 6x \equiv 24 \xrightarrow{(6,7)=1} x \equiv 4 \Rightarrow x = 7k + 4 \Rightarrow 6(7k + 4) + 7y = 185 \Rightarrow y = -6k + 23$ (ص ۳۰) ۸۱

$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 4 \times 2q + 1 = 8q + 1$
 ضرب دو عدد صحیح متوالی ۸۲

$\Rightarrow r = 1$ (ص ۱۵)

$a = bq + r, 0 \leq r < b \Rightarrow a - bq = r \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow n|a - bq \Rightarrow n|r$ (ص ۱۷) ۸۳

۸۴ فرض خلف: فرض کنیم $\alpha - \beta$ گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \in \mathbb{Q}$. یعنی $2\alpha \in \mathbb{Q}$. در نتیجه $\alpha \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود. (ص ۸)

$a \equiv \frac{m}{d} b$ (ت) ۸۵
 (الف) گنگ (ص ۵)
 (ب) $a|mb$ (ص ۱۰)
 (پ) $|a|$ (ص ۱۳)

$1000 \equiv -1 \Rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \Rightarrow r = 2$ (ص ۲۱) ۸۶

$7x \equiv 1 \Rightarrow 7x \equiv 4 \times 5 + 1 \Rightarrow 7x \equiv 21 \Rightarrow \xrightarrow{(7,4)=1} x \equiv 3 \Rightarrow x = 4k + 3$ (ص ۳۰) ۸۷

$p = 4k(1), p = 4k + 1(2), p = 4k + 2 = 2(2k + 1)(3), p = 4k + 3(4)$ ۸۸
 در حالت ۱ و ۳، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود. (ص ۱۵)

$xy \leq \frac{x^r + y^r}{r} \Leftrightarrow rxy \leq x^r + y^r \Leftrightarrow x^r + y^r - rxy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^r \geq 0$ ۸۹

گزاره همواره درست (ص ۸)

(الف) عدد a شمارنده عدد b است. (ص ۹) ۹۰
 (ب) $2|m|$ (ص ۱۷)

(ب) نادرست (مثال نقض $x = 0$) (ص ۸)

۹۱ الف) درست (ص ۱۷)

$$8x \equiv 20 \pmod{12} \xrightarrow{(8,12)=4} x \equiv 5 \pmod{3} \Rightarrow x = 3k + 2 \pmod{30} \text{ (ص ۳۰)}$$

۹۲

$$38 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 38^2 \equiv 4 \pmod{16} \Rightarrow 38^{2^6} \equiv 4 \pmod{16}, 19 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow 38^{2^6} + 19 \equiv 3 \pmod{16} \text{ (ص ۲۹)}$$

۹۳

$$(5a + 4, 2a + 3) = d \Rightarrow d | 2a + 3 \Rightarrow d | -2(5a + 4) + 5(2a + 3) \Rightarrow d | 7 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 7$$

۹۴

(ص ۱۶)

$$a = 17q + 5$$

$$b = 17q' + 3$$

۹۵

$$\Rightarrow 2a - 5b = 17 \times 2q + 10 - 17 \times 5q' - 15 = 17(2q - 5q' - 1) + 12 = 17k + 12 \Rightarrow r = 12 \text{ (ص ۱۴)}$$

۹۶ فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست. (ص ۸)

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= m \in \mathbb{Q} \\ \alpha + \beta &= n \in \mathbb{Q} \end{aligned} \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \text{ (تناقض با فرض)}$$

۹۷ الف) نادرست $n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15 \notin P$ (ص ۳)

(ب) درست (ص ۱۳)

(پ) درست (ص ۲۵)

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m | a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m} \text{ (ص ۲۹)}$$

۹۸

$$2x \equiv 19 \pmod{4} \xrightarrow{(2,4)=2} x \equiv 2 \pmod{2} \Rightarrow x = 2k + 2 \Rightarrow y = -2k + 3 \text{ (ص ۲۷)}$$

۹۹

$$2^5 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{10} \equiv 2^2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{11} \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \pmod{10}$$

۱۰۰

رقم یکان برابر ۵ است. (ص ۲۹)

$$\begin{aligned} m &= 17q + 5 (q \in \mathbb{Z}) \\ n &= 17q' + 3 (q' \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5 \text{ (ص ۱۴)} \\ \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12 \Rightarrow r = 12$$

۱۰۱

هرگاه p را بر 6 تقسیم کنیم، خواهیم داشت: (۱۰۲)

$$p = 6k(1), p = 6k + 1(2), p = 6k + 2 = 2(3k + 1)(3)$$

$$p = 6k + 3 = 3(2k + 1)(4), p = 6k + 4 = 2(3k + 2)(5), p = 6k + 5(6)$$

p در حالات ۱، ۳ و ۵ زوج و در ۴ بر ۳ بخش پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات ۲ یا ۶، p می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود. (ص ۱۵)

$$\begin{aligned} a|3n + 4 &\Rightarrow a|-2(3n + 4) + 2(2n + 3) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1 \text{ (ص ۱۱)} \end{aligned}$$
(۱۰۳)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$
(۱۰۴)

نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (ص ۷)

(الف) نادرست (ص ۳) (ب) درست (ص ۴) (پ) نادرست (ص ۷) (ت) نادرست (ص ۳) (۱۰۵)

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16 \text{ (مشابه کار در کلاس ص ۷۶)}$$
(۱۰۶)

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$$

$$A \cap B = \{n | 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0.$$
(۱۰۷)

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست است. (قسمت الف تمرین ۱ ص ۸)

$$2 \equiv 35 \pmod{11} \Rightarrow 5x \equiv 35 \pmod{11} \xrightarrow{(\div 5)} x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow x = 11k + 7$$
(۱۰۸)

(مشابه سؤال ۱۴ ص ۳۰)

$$7^2 = 49 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 7^{28} \equiv 1 \pmod{15} \xrightarrow{\times 7^{15} \equiv 4} 7^{30} \equiv 4 \pmod{15}$$
(۱۰۹)

(مشابه سوال ۸ و ۹ ص ۲۹)

$$\begin{aligned} n|9k + 7 \times (-7) &\Rightarrow n|-63k - 49 + 63k + 54 \Rightarrow n|5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1 \text{ یا } 5 \text{ (مثال ص ۱۲)} \\ n|7k + 6 &\end{aligned}$$
(۱۱۰)

$$a = 4q + 3 \Rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(q + 1) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1 \text{ (مشابه مثال ص ۱۴)}$$
(۱۱۱)

الف) نادرست (مشابه قسمت ت کار در کلاس ص ۳) ۱۱۲

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^c, \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^c$$

ب) درست (مسئله ۳ ص ۱۵)

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1) = 4 \times 2q = 8q$$

شورتکات جاده نهایی

ریاضیات گسسته

فصل دو



Medical _ Stus



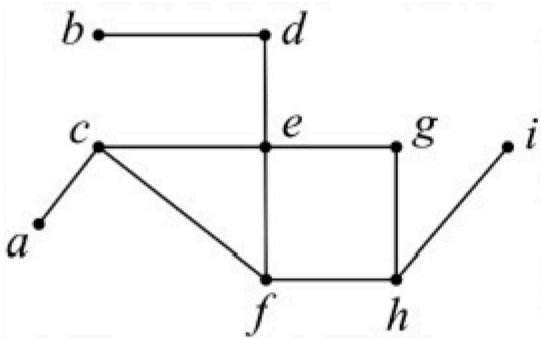
Kolyze

۱ الف) گراف P_8 را رسم کنید. (ب) در این گراف یک مسیر به طول ۶ بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۲ گراف مقابل را در نظر بگیرید.

الف) با اضافه کردن کدام رأس، به مجموعه $A = \{a, b, i\}$ می‌توان آن را به یک مجموعه احاطه‌گر تبدیل کرد؟
 ب) سه مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی غیرمینیمالی که شامل رأس f باشند را بنویسید.
 ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم برای این گراف بنویسید.
 د) عدد احاطه‌گری این گراف را مشخص کنید.



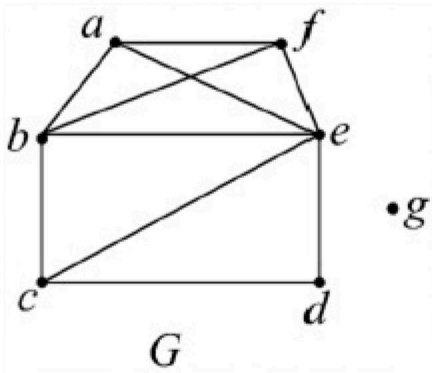
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۳ اگر G یک گراف k -منتظم از مرتبه ۷ و دارای ۱۴ یال باشد، آنگاه مقدار $\Delta(G)$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۴ گراف G را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $d_{\bar{G}}(e)$ را به دست آورید.
 ب) حاصل $q(\bar{G})$ را به دست آورید.
 ج) دوری به طول ۶ با شروع از رأس a در گراف G بنویسید.
 د) گراف G چند رأس زوج دارد؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۵ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

هرگاه بین هر دو رأس یک گراف حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، آن گراف را می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۶ اگر G یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ۶ باشد، مقدار $q(\overline{G})$ را محاسبه نمایید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

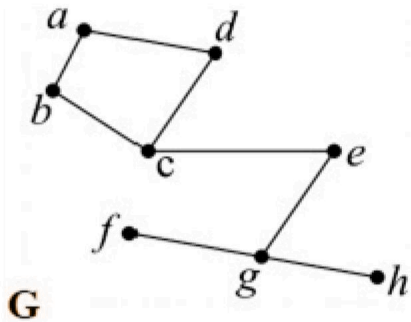
۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
تعداد یال‌های هر گراف، نصف مجموع درجات رأس‌های آن گراف است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۸ یک گراف همبند ۷ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۹ گراف G را در نظر بگیرید.
الف) عدد احاطه‌گری گراف G را به دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید.
ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی بنویسید.

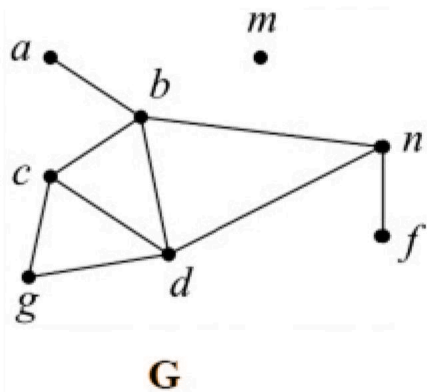


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۰ در هر گراف از مرتبه فرد، ثابت کنید تعداد رأس‌های زوج، عددی فرد است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

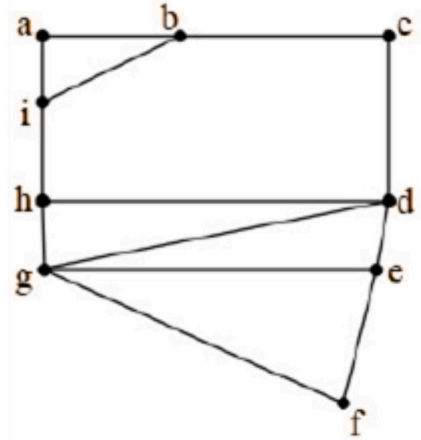
۱۱ با توجه به گراف G :
الف) مقدارهای $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.
ب) یک مسیر به طول ۶، با شروع از رأس a بنویسید.
ج) مجموعه $N_G[d]$ را با نوشتن اعضا، مشخص کنید.
د) دوری به طول ۴ بنویسید که از رأس b شروع شود.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی از گراف زیر را بنویسید.
 ب) عدد احاطه‌گری گراف زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

۱۲



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

یک گراف ۴ رأسی غیرتهی k -منتظم رسم کنید که:
 الف) k بیش‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.
 ب) k کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

مجموع درجات گراف برابر ۲۴ است. اگر ۳ یال به یال‌های گراف G اضافه کنیم، گراف حاصل، گراف کامل می‌شود. مرتبه گراف G چقدر است؟

۱۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

گراف G با مجموعه رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ مفروض است. اگر داشته باشیم:
 $N_G(d) = \{a, b, c\}$, $N_G(c) = \{d, b\}$, $N_G(b) = \{a, d, c\}$
 الف) گراف G را رسم کنید.
 ب) یک دور به طول ۴ از گراف G بنویسید.
 پ) دو زیر گراف از مرتبه ۳ و اندازه ۳ از گراف G رسم کنید.
 ت) حاصل $\Delta(\overline{G}) + q(\overline{G})$ را به دست آورید.

۱۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.
 - گراف ساده با درجه رئوس ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ وجود ندارد.

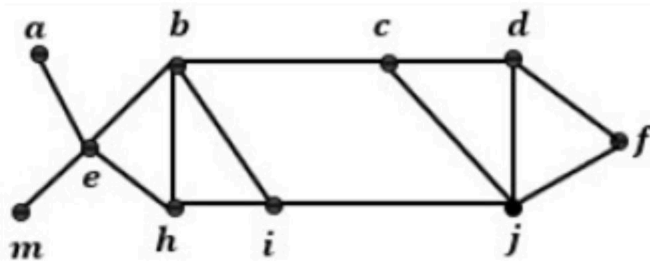
۱۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

جملهٔ زیر را با نوشتن عدد مناسب در جای خالی تکمیل کنید.
 اگر در گراف G از مرتبه ۷ داشته باشیم $\chi(G) = ۱$ در این صورت $\Delta(G)$ برابر با است.

۱۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳



گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید:

۱۸

الف) آیا $\{a, h, j, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف می‌باشد؟ چرا؟
 ب) آیا مجموعه $\{a, m, i, f, d\}$ احاطه‌گر مینیمال است؟ چرا؟
 پ) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم شامل رأس e بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۱۹) ۷ دانش‌آموز a, b, c, d, e, f, g از یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطه دوطرفه است. یعنی هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند یا هیچ‌یک با دیگری دوست نیست. اطلاعات زیر را داریم:

- شخص a با b, g, d دوست می‌باشد. شخص b با همه به‌جز c دوست می‌باشد.
- شخص e با f دوست می‌باشد. شخص d با g دوست می‌باشد.
- الف) برای رابطه دوستی فوق یک گراف ترسیم کنید.
- ب) رأس یا رئوس ایزوله این گراف را مشخص کنید و تعبیر آن را در این رابطه دوستی بیان کنید.
- پ) رابطه دوستی کدام چهار نفر تشکیل یک گراف کامل را می‌دهد.

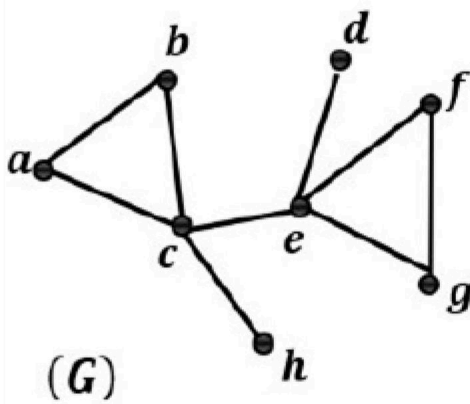
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۰) در گراف کامل K_p با ۲۸ یال مقدار $2\Delta(K_p) - 3\delta(K_p) + p$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۱) گراف G روبه‌رو را در نظر بگیرید:

- الف) مقدار $q(\overline{G})$ را به دست آورید.
- ب) مجموع درجات رئوس گراف \overline{G} را مشخص کنید.
- پ) مجموع $N_{\overline{G}}[e]$ را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۲) درستی و یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.

اگر $\deg_G(v) = 5$ و G یک گراف ۱۰ رأسی باشد، آنگاه $\deg_{\overline{G}}(v) = 4$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۳) جای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید.

- گراف ۳-منتظم، ۸ رأسی دارای یال است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۴) الف) گراف P_{12} را رسم کنید.

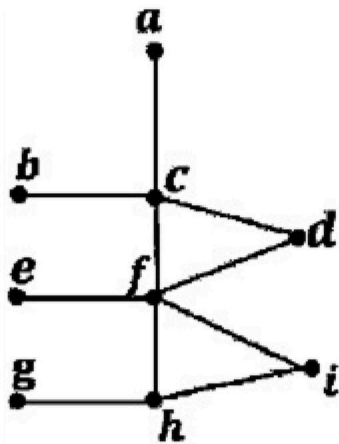
ب) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

در گراف روبه‌رو:

۲۵

- الف) مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال $A = \{b, e, g, a, f\}$ را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید.
 ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم که شامل رأس e باشد را بنویسید.
 ج) با اضافه نمودن چه یالی عدد احاطه‌گری گراف ۲ می‌شود؟

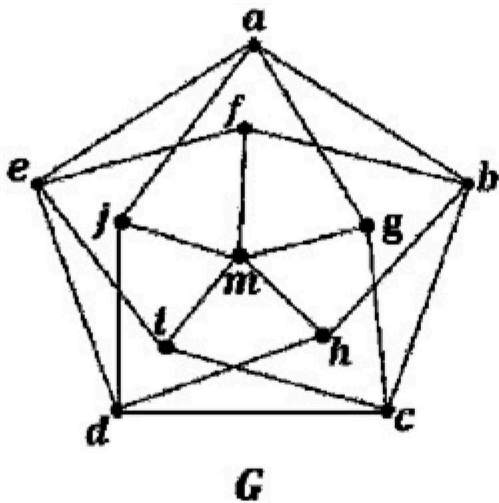


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

با توجه به گراف G ، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

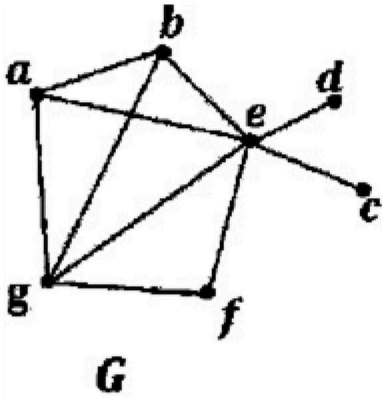
۲۶

- الف) آیا مجموعه $D = \{a, b, m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است؟ چرا؟
 ب) عدد احاطه‌گری گراف G را به دست آورید. (با ذکر دلیل)
 ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

- ۲۷) با توجه به گراف G مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید.
 الف) مرتبه و اندازه گراف را بنویسید.
 ب) مسیری به طول ۵ از رأس c به رأس f بنویسید.
 ج) دوری به طول ۴ بنویسید.
 د) آیا گراف \overline{G} همبند است؟ چرا؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

- ۲۸) جای خالی را با عدد مناسب تکمیل کنید.
 عدد احاطه‌گری گراف C_7 برابر است با

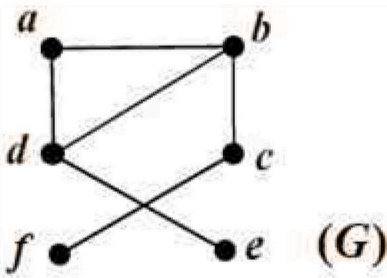
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

- ۲۹) درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
 - هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

- ۳۰) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال بنویسید که مینیمم نباشد. برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲



- ۳۱) با ذکر دلیل عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را تعیین کنید.

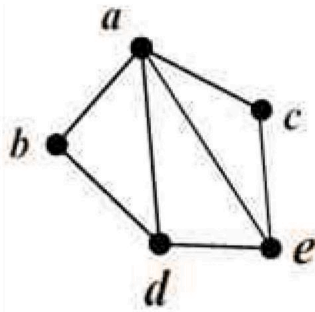
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

- ۳۲) در گراف P_n چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

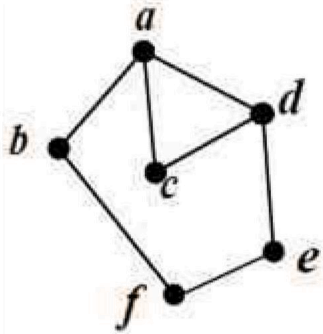
- ۳۳) آیا می‌توان گرافی ۳-منتظم از مرتبه ۹ رسم کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲



۳۴ مکمل گراف G که در شکل مقابل آمده است را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲



۳۵ در گراف شکل مقابل همسایگی باز رأس d را بنویسید.

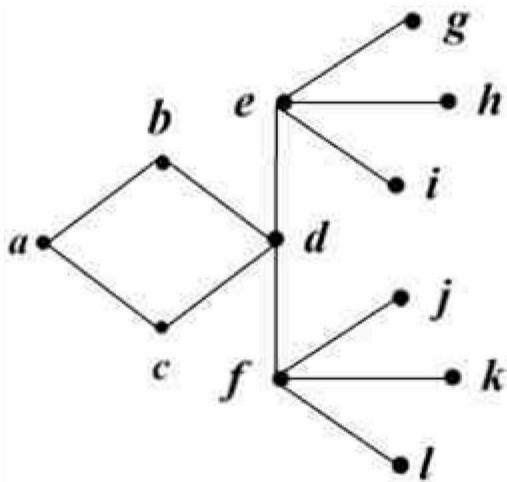
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۳۶ مجموعه همسایگی بسته یک رأس در گراف را تعریف کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

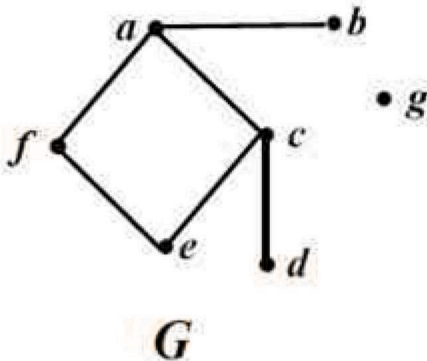
۳۷ گراف زیر را در نظر بگیرید:

الف) عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.
 ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.
 ج) یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

- گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.
- الف) مرتبه و اندازه آن را بنویسید.
 - ب) مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.
 - ج) مجموعه $N_G[c]$ را بنویسید.
 - د) دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.
 - ه) حاصل عبارت $q(\overline{G}) + \deg_{\overline{G}}(g)$ را به دست آورید.

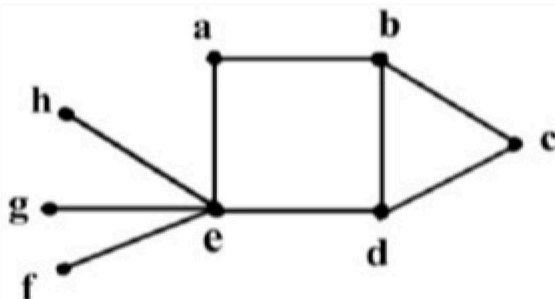


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

- جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- الف) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف می‌گوییم.
 - ب) تعداد رئوس فرد هر گراف عددی است.
 - ج) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه p برابر است.
 - د) گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد، گراف می‌گوییم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

- الف) عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.
- ب) این گراف چند γ -مجموعه دارد؟



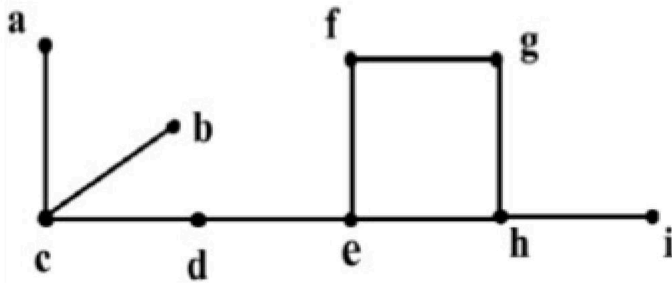
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

- یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۳ داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

- یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۳ داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲



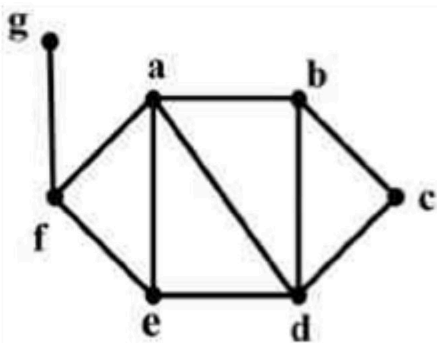
گراف مقابل را در نظر بگیرید. ۴۳

الف) یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال با ۴ عضو بنویسید.
 ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.
 ج) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه‌گری گراف ۲ خواهد شد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

گراف G به صورت مقابل رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید. ۴۴

الف) مجموعه $N_G(g)$ را بنویسید.
 ب) یک دور به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید.
 ج) درجه رأس c در گراف \overline{G} (مکمل گراف G) را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

به گراف ۸ رأسی ۳- منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه‌حل) ۴۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

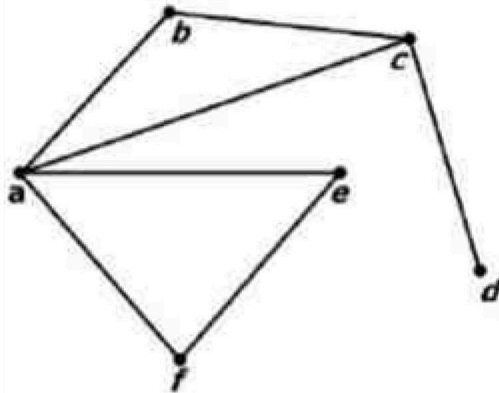
درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید. ۴۶
 الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
 ب) حاصل $(3m + 2, 3m + 1)$ برابر ۱ می‌باشد.
 ج) تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است.
 د) عدد احاطه‌گری P_1 برابر عدد ۳ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

یک گراف ۲- منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. ۴۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

عدد احاطه‌گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید. ۴۸



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

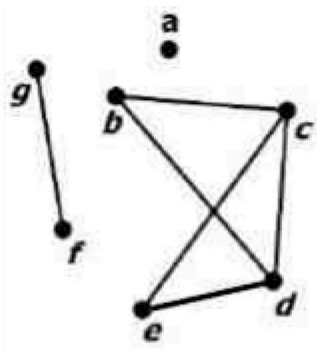
گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید: ۴۹

الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) دوری به طول ۴ بنویسید.

پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از رأس b بنویسید.

ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید. ۵۰

الف) تعداد رؤس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می‌نامیم.

ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد.

پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $\left(\frac{n(n-1)}{2}, n(n-1)\right)$ است.

ت) گراف C_n تنها یک (دور، مسیر) n رأسی دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

در جاهای خالی عبارتهای مناسب بنویسید. ۵۱

الف) حاصل $(m^2, m), m^5$ برابر با است.

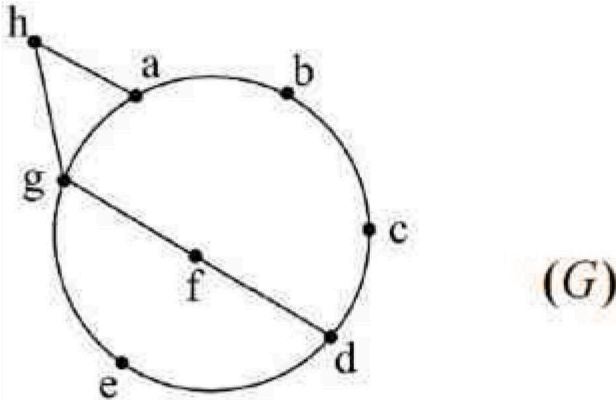
ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم a و b هستند.

پ) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر می‌نامیم.

ت) تعداد یال‌های گراف K_n برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۵۲) با توجه به گراف G به سؤالات زیر پاسخ دهید.
 الف) عدد احاطه‌گری را برای گراف زیر مشخص کنید.
 ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۵۳) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال 4 -عضوی از گراف C_8 را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۵۴) یک 7 -مجموعه از گراف C_8 را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۵۵) گراف C_8 را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

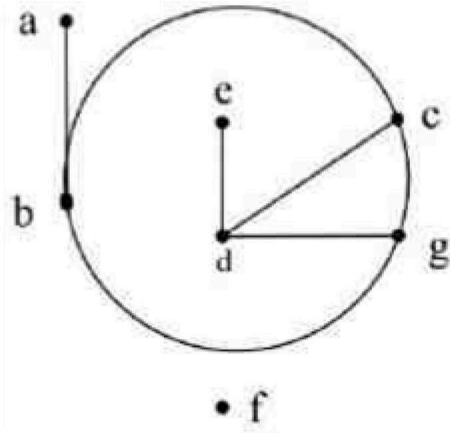
۵۶) در یک گراف از مرتبه 8 با $\Delta = 3$ ، حداقل چند رأس برای احاطه همه رئوس لازم است؟ (با ذکر دلیل)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۵۷) یک گراف کامل 11 رأسی چند یال دارد؟ (با ذکر دلیل)

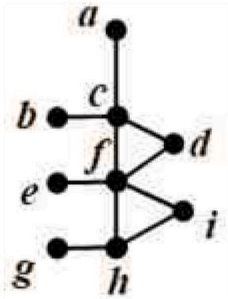
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۵۸ با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.
 الف) یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.
 ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.
 پ) درجه رأس a را در گراف \overline{G} تعیین کنید.
 ت) آیا گراف G همبند است؟ (با ذکر دلیل)
 ث) $N_G[f]$ را بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

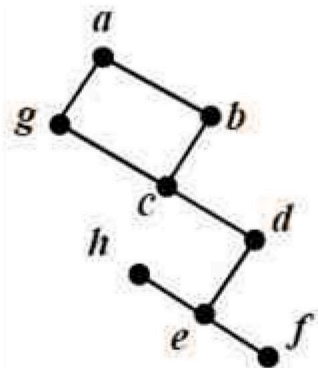
۵۹ گراف شکل مقابل مقابل را در نظر بگیرید.
 الف) یک γ -مجموعه مشخص کنید.
 ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

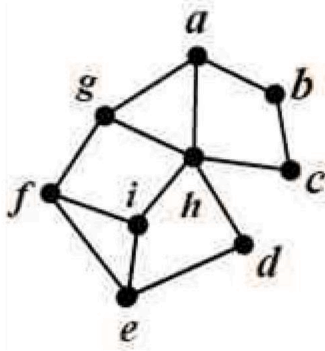
۶۰ ابتدا گراف P_9 را رسم کنید. سپس یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱



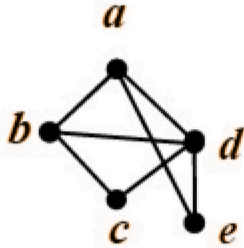
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۶۱ عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.



۶۲ برای گراف شکل روبه‌رو، یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو انتخاب کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱



۶۳ در گراف شکل مقابل، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۶۴ گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

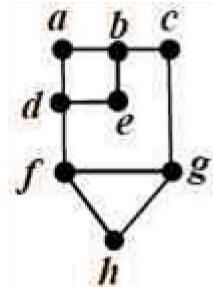
۶۵ مجموعه احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

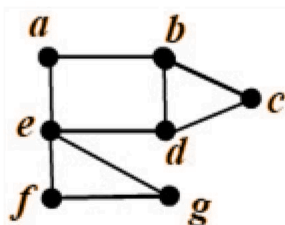
۶۶ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.
 الف) اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس می‌نامیم.
 ب) گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف می‌نامیم.
 پ) تعداد یال‌های گراف K_4 ، برابر با است.
 ت) گراف G را می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۶۷ در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که نیاشد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰



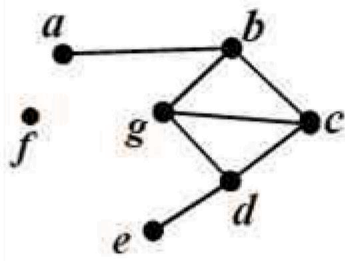
۶۸ عدد احاطه‌گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

گراف G ، ۳- منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کم‌تر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید. ۶۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

با توجه به گراف G (شکل مقابل)، به سؤالات زیر پاسخ دهید. ۷۰
 الف) مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.
 ب) یک دور به طول ۴ مشخص کنید.
 پ) درجه‌ی رأس a در گراف \bar{G} را تعیین کنید.
 ت) آیا گراف G همبند است؟ دلیل ارائه کنید.
 ث) $N_G(f)$ را معین کنید.

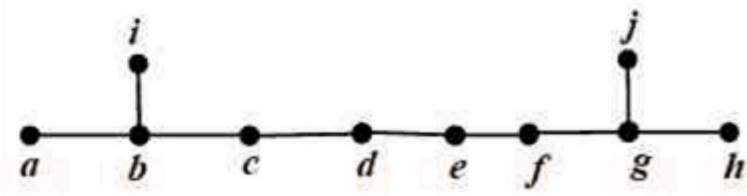


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

گراف C_1 را رسم کنید. ۷۱
 الف) یک γ - مجموعه از آن‌را مشخص کنید.
 ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن‌را تعیین نمایید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

عدد احاطه‌گری گراف G (شکل مقابل) را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید. ۷۲

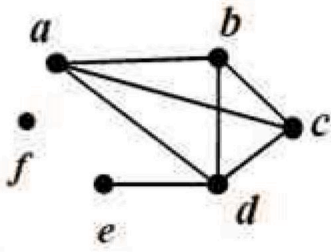


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید. ۷۳
 الف) هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.
 ب) اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد آن‌گاه $\gamma(G) > \frac{n}{\Delta + 1}$.
 پ) در گراف P_n عدد احاطه‌گری برابر با $\frac{n}{\Delta + 1}$ است.
 ت) $3/48 = 4$.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۷۴ با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.
 الف) مقدار $q - \Delta(G)$ را بیابید.
 ب) یک دور به طور ۴ مشخص کنید.
 پ) با ذکر دلیل مشخص کنید گراف مکمل G چند یال دارد؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۷۵ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۷۶ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۷۷ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

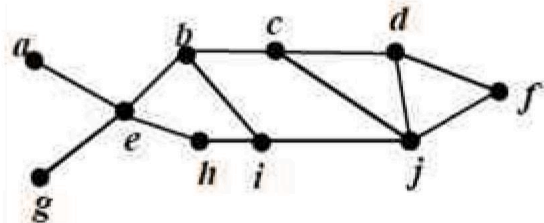
۷۸ یک گراف ۶ رأسی که Δ - مجموعه آن با اندازه دو باشد، رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۷۹ یک گراف ۶ رأسی که Δ - مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید.

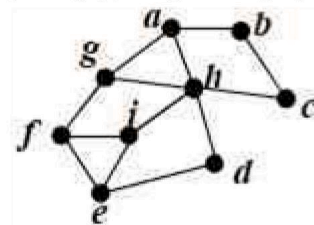
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۸۰ عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۸۱ در گراف شکل مقابل یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۸۲ تفاوت بین مجموعه احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

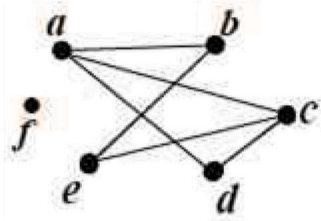
۸۳ گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید.

الف) $N_G(C)$ را با اعضا مشخص کنید.

ب) بزرگ‌ترین درجه در گراف \bar{G} مربوط به کدام رأس و چند است؟

پ) دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید.

ت) آیا گراف G همبند است؟

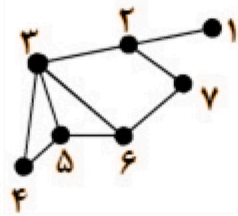


سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۸۴ در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است:

الف) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید.

ب) عدد احاطه‌گری G را تعیین کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۸۵ آیا گراف‌های C_n منتظم هستند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۸۶ گراف P_n را رسم کنید.

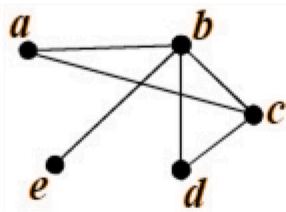
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۸۷ گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید.

الف) درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟

ب) تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.

پ) $\Delta(G)$ را مشخص کنید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۸۸ گراف k -منتظم را تعریف کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.
 الف) مرتبه گراف نشان‌دهنده تعداد گراف می‌باشد.
 ب) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را می‌نامیم.
 پ) دو یال را می‌نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند.
 ت) تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی است.

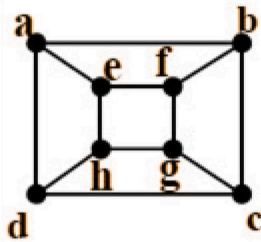
سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

آیا گراف ۷ رأسی ۳- منتظم وجود دارد، برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹



عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

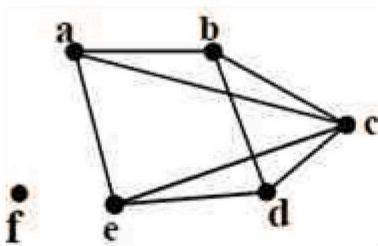
الف) $\Delta(G), \delta(G)$ را مشخص کنید.

ب) سه دور به طول ۳ بنویسید.

پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟

ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید.

ث) آیا گراف G همبند است؟



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

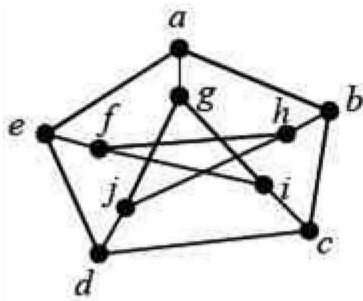
ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

گراف G ، ۶ رأسی ۳- منتظم است.

الف) اندازه گراف G را بیابید.
 ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹



۹۷ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

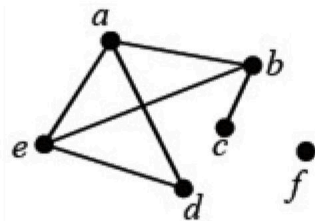
۹۸ گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به طوری‌که:
الف) مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.
ب) بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۹۹ در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف \overline{G} برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۰۰ گراف G را در نظر گرفته و به سوالات زیر پاسخ دهید.
الف) $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.
ب) یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.
پ) یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۰۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
الف) مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف تعداد یال‌ها است.
ب) در یک گراف k -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است.
پ) در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر گراف G می‌نامیم.
ت) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر می‌نامیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

الف) $a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad h$

۱

ب) $gfedcba$ یا $hgfedcb$ یا $bcdefgh$ یا $abcdefg$

الف) e

۲

ب) $\{f, c, b, h\}, \{f, c, d, h\}, \{f, a, d, h\}$

ج) $B = \{c, h, b\}$ یا $A = \{c, h, d\}$

د) $\chi(G) = ۳$

$kp = ۲q \Rightarrow k(v) = ۲۸ \Rightarrow k = ۴ \Rightarrow \Delta(G) = k = ۴$

۳

الف) $d_{\bar{G}}(e) = ۱$

۴

ب) $q(\bar{G}) = \frac{۷(۷-۱)}{۲} - ۱۰ = ۱۱$

ج) $a f e d c b a$ یا $a b c d e f a$

د) ۳

همبند ۵

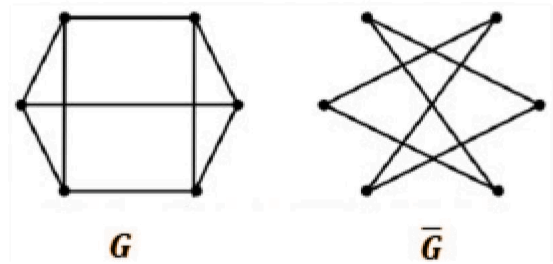
$۲q(G) = ۳p(G) \Rightarrow ۲q(G) = ۱۸ \Rightarrow q(G) = ۹ \Rightarrow q(\bar{G}) = \binom{۶}{۲} - ۹ = ۶$

روش اول: ۶

روش دوم: می‌دانیم مکمل هر گراف منتظم، خود نیز گرافی منتظم است. لذا مکمل گراف ۳- منتظم با ۶ رأس، گرافی ۲-

منتظم است. پس $۲q(\bar{G}) = ۲p(G) \Rightarrow q(\bar{G}) = \frac{۲ \times ۶}{۲} = ۶$

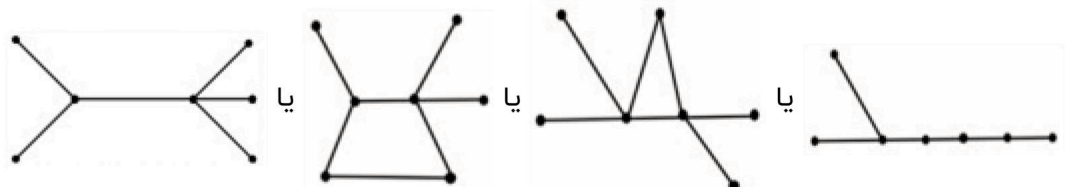
$q(\bar{G}) = ۶$ روش سوم:



درست ۷

مسئله چندین جواب دارد که چند مورد از آنها رسم شده است.

۸



۹ روش اول: الف) $\gamma(G) \geq \frac{p}{\Delta + 1} = \frac{8}{4} \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$ برای احاطه کردن رأس‌های f, h حداقل به یک رأس نیاز است و هیچ رأس دیگری به تنهایی نمی‌تواند سایر رأس‌ها را احاطه کند، پس به بیش از دو رأس برای احاطه‌گری نیاز است. از طرفی چون مجموعه $A = \{g, c, a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq 3$ پس $\gamma(G) = 3$ روش دوم: برای احاطه کردن رئوس f, g, h, e حداقل به یک رأس نیاز است. همچنین برای چهار رأس باقی مانده حداقل به دو رأس دیگر نیاز است. یعنی $\gamma(G) \geq 3$ از طرفی مجموعه $A = \{g, c, a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = 3$

ب) $\{f, h, e, d, b\}$

۱۰ روش اول: x : تعداد رأس‌های زوج گراف

$m = 2k$: تعداد رأس‌های فرد گراف

$p = 2t + 1$: تعداد رأس‌های گراف

$$p = m + x \Rightarrow 2t + 1 = 2k + x \Rightarrow x = 2t + 1 - 2k = 2(t - k) + 1 \Rightarrow x = 2q + 1$$

روش دوم: مجموع تعداد رأس‌های فرد و تعداد رأس‌های زوج این گراف، عددی فرد است. می‌دانیم تعداد رأس‌های فرد در هر گراف، عددی زوج است، لذا تعداد رأس‌های زوج در این گراف باید عددی فرد باشد.

الف) $\delta(G) = 0, \Delta(G) = 4$

ب) abcgdnf

ج) $N_G[d] = \{d, n, b, c, g\}$

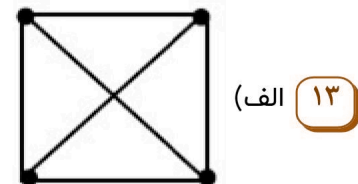
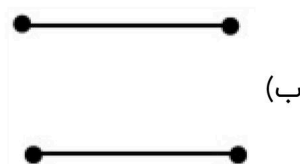
د) dbndcb یا bdgcb یا bcdnb یا bcgdb

۱۲ الف) $D = \{e, b, h\}$

ب) $\gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta + 1} \Rightarrow \gamma(G) \geq \frac{9}{4 + 1} = 2$ لذا عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. از طرفی مجموعه

$$\gamma(G) = 2$$

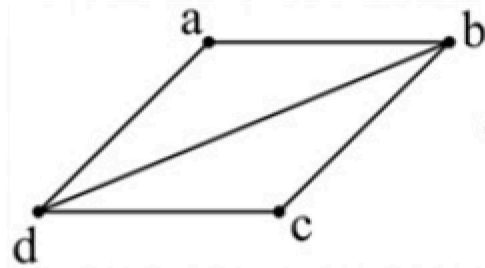
$D = \{g, b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. پس:



$$2q = 24 \Rightarrow q = 12 \xrightarrow{+3} 15 = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n(n-1) = 30 \Rightarrow n = 6$$

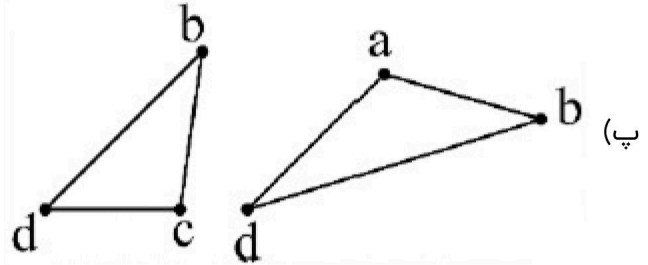
۱۴

ب) abcd



الف) e (۱۵)

ت) $4 + 5 = 9$



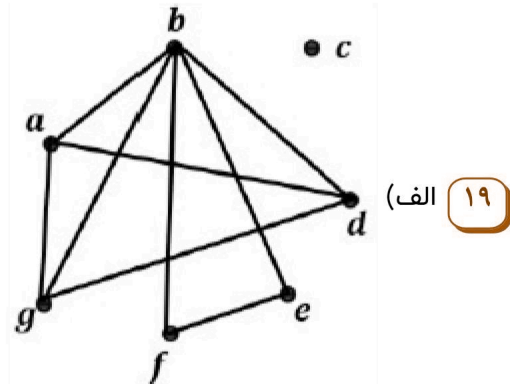
درست (۱۶)

$\Delta(G) = 6$ (۱۷)

الف) خیر - زیرا رأس m توسط هیچکدام از اعضا این مجموعه احاطه نمی‌شود. (۱۸)

ب) خیر - زیرا با حذف رأس f مجموعه باقی‌مانده هنوز یک مجموعه احاطه‌گر می‌باشد.

پ) $\{e, j\}$



الف) (۱۹)

ب) c , دانش‌آموز C در این رابطه با هیچکس دوست نیست.

پ) $\{a, b, d, g\}$

$q(K_p) = 28 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow p = 8$ (۲۰)

$\Delta(K_p) = \delta(K_p) = 7 \Rightarrow 2\Delta(K_p) - 3\delta(K_p) + p = 2 \times 7 - 3 \times 7 + 8 = 1$

الف) $q(G) = 9 \Rightarrow q(G) + q(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow q(\bar{G}) = 28 - 9 = 19$ (۲۱)

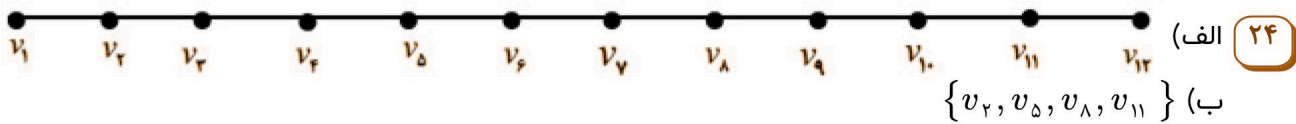
ب) $\sum_{v=1}^n \deg_{\bar{G}}(v) = 2q(\bar{G}) = 2 \times 19 = 38$

پ) $N_{\bar{G}}[e] = \{e, a, b, h\}$

توجه شود که می‌توان با رسم گراف مکمل نیز به سؤالات پاسخ داد.

درست (۲۲)

۱۲ ۲۳



۲۴

الف) $\{b, g, a, f\}$

ب) $\{c, e, h\}$

۲۵

ج) ec یا eh یا gf یا gc

الف) خیر - زیرا رأس d احاطه نمی‌شود یا $N_G[a] \cup N_G[b] \cup N_G[m] \neq V(G)$ (۲۶)

ب) داریم $\chi(G) \geq \left\lfloor \frac{11}{6} \right\rfloor = 2$

و از طرفی مجموعه سه‌عضوی $\{a, m, d\}$ احاطه‌گر مینیمم می‌باشد. پس: $\chi(G) = 3$

ج) $\{f, g, h, i, j\}$

الف) $p = 7, q = 10$

۲۷

ب) ceabgf یا cebagf

ج) ebgfe یا eagfe یا ebage یا eagbe

د) خیر - زیرا رأس e در گراف G ماکزیمم درجه است لذا درجه آن در گراف \bar{G} صفر می‌باشد. یا

$\deg_G(e) = p - 1 = 7 = \Delta \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(e) = 0 \Rightarrow \bar{G}$ ناهمبند است

۲۸ $\frac{7}{3}$ یا ۳

۲۹ نادرست

۳۰ $D = \{a, f, e\}$ دلیل آنکه مجموعه احاطه‌گر مینیمال است: با حذف رأس a، رأس a احاطه نمی‌شود. با حذف رأس f، رأس c احاطه نمی‌شود. با حذف رأس e، خود رأس e احاطه نمی‌شود. (ص ۴۶)

(توجه: به سایر احاطه‌گرهای مینیمال غیرمینیمم، با ذکر دلیل نمره داده شود.)

۳۱ طبق قضیه داریم $\chi(G) \leq 2 \leq \frac{6}{3+1}$. از طرفی مجموعه $D = \{d, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\chi(G) \leq 2$.

بنابراین $\chi(G) = 2$ (ص ۴۹)

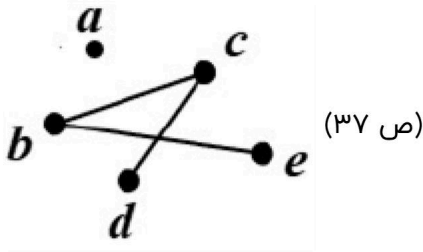


۷ مسیر نوشتن مسیرهها ۱۲۳۴ - ۲۳۴۵ - ۳۴۵۶ - ۴۵۶۷ - ۵۶۷۸ - ۶۷۸۹ - ۷۸۹۱۰

۳۲

۳۳ خیر - در یک گراف r - منتظم داریم $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$. به عبارتی $rp = 2q$. در این سؤال $r = 3, p = 9$ لذا

$rp = 27$ عددی فرد و $2q$ عددی زوج است. و این تناقض است. (ص ۴۲)



(ص ۳۷)

۳۴

$N_G(d) = \{a, c, e\}$ (ص ۳۶)

۳۵

مجموعه رأس‌هایی از یک گراف که به یک رأس متصل هستند به همراه خود رأس را مجموعه همسایگی بسته آن رأس می‌نامیم. (ص ۳۶)

۳۶

الف) $\chi(G) \geq \frac{p}{\Delta + 1} \Rightarrow \chi(G) \geq 2$ (*) (ص ۴۹)

۳۷

از طرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است بنا به رابطه (*) پس:

ب) $B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۶)

ج) $C = \{a, e, f, b\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۷)

الف) $p = 7, q = 6$ (ص ۳۵)

۳۸

ب) $2q = 12$ (ص ۳۹)

ج) $N_G[c] = \{a, c, d, e\}$ (ص ۳۶)

د) $a c e f a$ (ص ۳۸)

ه) $q(\overline{G}) + d_{\overline{G}}(g) = 15 + 6 = 21$ (ص ۳۸)

د) $-k$

ج) $p - 1$ (ص ۴۲)

ب) زوج (ص ۴۰)

الف) همبند (ص ۳۹)

۳۹

منتظم (ص ۳۵)

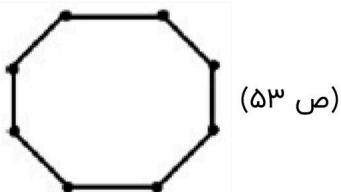
الف) می‌دانیم $\frac{n}{\Delta + 1} \leq \chi(G)$ پس داریم $\frac{8}{5 + 1} \leq \chi(G)$ در نتیجه $2 \leq \chi(G)$

۴۰

از طرفی مجموعه‌ای مانند $\{e, c\}$ (هر کدام از مجموعه‌های $\{e, b\}$ یا $\{e, d\}$ اگر نوشته شد نیز مورد قبول است) یک

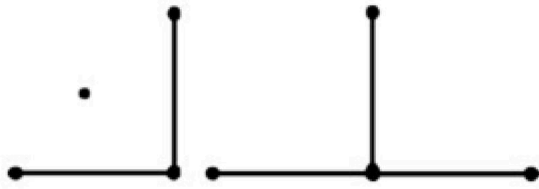
مجموعه احاطه‌گر برای گراف G می‌باشد پس $\chi(G) \leq 2$ بنابراین $\chi(G) = 2$

ب) ۳ (ص ۵۰)



(ص ۵۳)

۴۱



(ص ۵۳)

۴۲

الف) $\{c, e, h, f\}$

۴۳

ب) $\{c, g, i, e\}$

ج) fh (ص ۴۷)

الف) $\{f\}$

۴۴

ب) abcdea یا abdefa

ج) ۴ (ص ۴۱)

$$\begin{cases} q = \frac{kn}{2} \Rightarrow q = \frac{8 \times 3}{2} = 12 \\ q = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow q = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \end{cases} \Rightarrow 28 - 12 = 16 \text{ (ص ۴۰)}$$

۴۵

د)

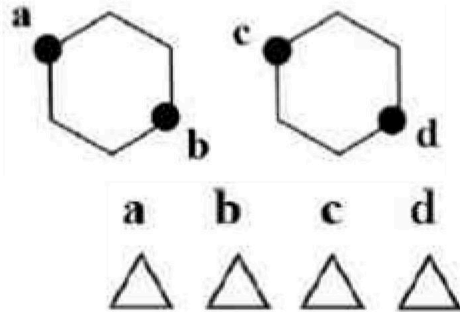
ج) نادرست (ص ۴۰)

ب) درست (ص ۱۷)

الف) درست (ص ۵)

۴۶

نادرست (ص ۵۳)



۴۷ رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه‌گری آن:

۴۷

(به شکل‌های دیگر نیز نمره داده شود). مانند:

(ص ۵۳)

۴۸ روش اول: می‌دانیم $\left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ پس داریم $\left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor \leq \gamma(G)$ بنابراین $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم $\gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$

روش دیگر: این گراف با مجموعه دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می‌شود. پس عدد احاطه‌گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq 2$. اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رؤس را احاطه می‌کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G) > 1$ بنابراین $1 \leq \gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$ (ص ۳۹)

الف) $\delta(G) = 0, \Delta(G) = 3$

۴۹

ب) b c e d b

پ) b c d e یا b d e c یا b c e d یا b d c e (دو مورد)

ت) $N_G(f) = \{g\}$ (ص ۴۱)

ت) دور

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ (پ)}$$

ب) مسیر

الف) مرتبه ۵۰

(ص ۳۵ و ۳۸)

ب) نسبت به هم اول (ص ۱۳)

ت) ۲۱ (ص ۳۸)

الف) m^2 ۵۱

پ) مینیمال (ص ۴۶)

الف) $\{g, c\} \Rightarrow \chi(G) = 2$ (ص ۵۲)

ب) $\{h, d, b\}$ (ص ۴۶)

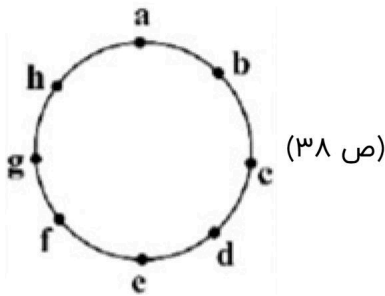
۵۲

ص ۴۶ $\{a, c, e, g\}$: یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

۵۳

$D = \{a, d, g\}$ (ص ۴۴)

۵۴



۵۵

$$\frac{n}{\Delta + 1} = \frac{8}{3 + 1} = 2 \text{ (ص ۴۹)}$$

۵۶

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{11(11-1)}{2} = 55 \text{ (ص ۳۸)}$$

۵۷

الف) a b g c (ص ۳۸) ۵۸

ب) b c d g b (ص ۳۸)

پ) ۵ (ص ۳۷)

ت) خیر. زیرا دارای رأس ایزوله است (هیچ مسیری از f به سایر رئوس وجود ندارد) (ص ۳۹)

ث) $N_G[f] = \{f\}$ (ص ۳۶)

الف) $D = \{h, c, e\}$

۵۹

ب) $D = \{g, c, i, e\}$

در صورت ارائه مجموعه‌های مشابه با این ویژگی‌ها نمره داده شود. (ص ۵۴)



رسم گراف ۶۰

$D = \{2, 5, 8\}$ (ص ۵۱ و ۳۸)

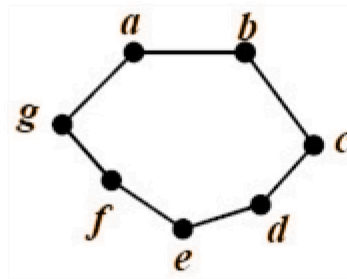
۶۱ برای احاطه کردن رئوس a, b, c, d, g حداقل دو تا از آنها باید در مجموع احاطه‌گر باشند، زیرا $\frac{5}{3+1} = 2$.

برای احاطه کردن رئوس e, f, h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند، زیرا، $\frac{3}{3+1} = 1$. بنابراین حداقل سه رأس باید در هر مجموعه احاطه‌گری از گراف باشد یعنی $\gamma(G) \geq 3$. از طرفی مجموعه $D = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$ (ص ۵۰)

$D = \{h, b, i, a\}$

۶۲ (به سایر مجموعه‌های احاطه‌گر صحیح، نمره داده شود.) (ص ۴۵)

$N_G(c) = \{b, d\}$ (ص ۳۶)



۶۴ رسم گراف (ص ۳۸)

مسیر: a b c d e f

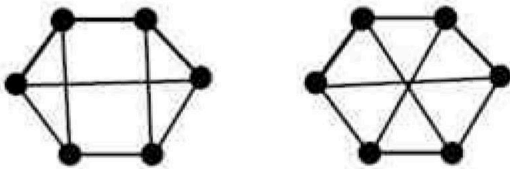
۶۵ یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم. (ص ۴۶)

۶۶ الف) فرد (ص ۳۵) ب) تهی (ص ۳۵) پ) ۶ (ص ۴۰) ت) همبند (ص ۳۹)

$D = \{a, e, c, h\}$ (ص ۴۶)

۶۸ طبق قضیه داریم $\frac{7}{4+1} = 2 \leq \gamma(G)$. از طرفی مجموعه $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \geq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$ (ص ۵۰)

$q = 2p - 3 \Rightarrow \frac{2p}{2} = 2p - 3 \Rightarrow p = 6$ (ص ۴۲)



به یکی از دو گراف زیر داده شود.

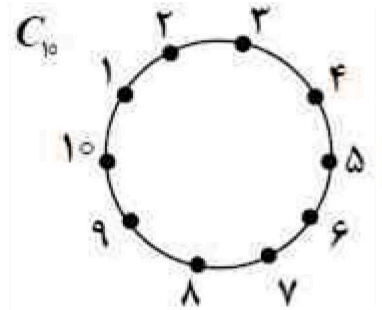
۷۰ الف) a b g c (ص ۳۸)

ب) b c d g b (ص ۳۸)

پ) ۵ (ص ۳۸)

ت) خیر - زیرا دارای رأس ایزوله است هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد. (ص ۳۹)

ث) $N_G(f) = \{\}$ (ص ۳۶)



۷۱

الف) $D = \{1, 4, 7, 10\}$
 ب) $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ (ص ۵۴)

۷۲ طبق قضیه داریم $\chi(G) \leq 3 = \frac{10}{3+1}$ ، از طرفی مجموعه $D = \{b, e, g\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\chi(G) \leq 3$ بنابراین $\chi(G) = 3$. (ص ۵۰)

۷۳

الف) نادرست (ص ۴۶)
 ب) نادرست (ص ۴۹)
 پ) درست (ص ۵۳)
 ت) درست (ص ۴۸)

۷۴

(ص ۳۷) $7 - 4 = 3$ (الف)
 ب) $a b c d a$ یا $a d b c a$ (ص ۳۸)

پ) $q(G) + q(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 7 + q(\bar{G}) = 15 \Rightarrow q(\bar{G}) = 8$ (ص ۳۸)

$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4, kn + 1 = 54 \Rightarrow 4n = 53, n = \left\lfloor \frac{53}{4} \right\rfloor = 13$ (ص ۸۲)

۷۵

$$\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$$

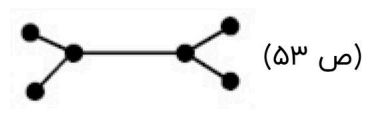
↑ ↑
 انتخاب ۴ نفر جایگشت ۴ کلاه

۷۶

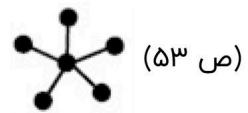
کل $\xrightarrow{\text{هر کلاه حالت ۳}} 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$

۷۷

غ ق ق ← حداقل یکی نگیرد
 $n(\bar{1} \cup \bar{2} \cup \bar{3}) = n(\bar{1}) + n(\bar{2}) + n(\bar{3}) - n(\bar{1} \cap \bar{2}) - n(\bar{1} \cap \bar{3}) - n(\bar{2} \cap \bar{3}) + n(\bar{1} \cap \bar{2} \cap \bar{3})$
 $= 3 \times 2^4 - 3 \times 1^4 + 0 = 45$
 \Rightarrow غ ق ق - کل جواب = ۳۶



۷۸



۷۹

۸۰ طبق قضیه داریم $\frac{10}{4+1} = 2 \leq \gamma(G)$. از طرفی مجموعه $D = \{e, j\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$ (ص ۵۲)

۸۱ (ص ۴۶) $D = \{a, c, i, d\}$ (۱)

۸۲ مجموعه احاطه‌گر مینیمم مجموعه احاطه‌گری است که کم‌ترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه احاطه‌گر مینیمال مجموعه احاطه‌گری است که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می‌تواند از مجموعه احاطه‌گر مینیمم بیش‌تر عضو داشته باشد. (ص ۴۴ و ۴۶)

۸۳ الف) $N_G(C) = \{a, e, d\}$ (ص ۳۶) (ب) رأس f و 5 (ص ۳۷)
پ) $abcda$ (ص ۳۸) (ت) خیر (ص ۳۹)

۸۴ (ص ۵۴) $\{1, 5, 7\}$ یا $\{1, 6, 4\}$

ب) $\frac{7}{4+1} = 2$ بنابراین $\gamma(G) \geq 2$. از سوی دیگر $\{2, 5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq 2$. (**). از (*) و (**). نتیجه می‌شود که $\gamma(G) = 2$. (ص ۵۲)

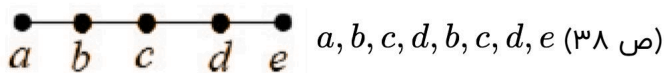
۸۵ بله - تمام C_n ها ۲ منتظم هستند. (ص ۳۵)



۸۶ الف) ۳ (ص ۳۸)
ب) b, d, c, b , a, b, c, a , a, b, d, c, a (ص ۳۸)
پ) ۴ (ص ۳۷)

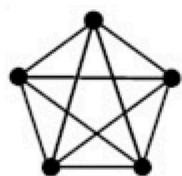
۸۸ گرافی که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد. (ص ۳۵)

۸۹ الف) رئوس (ص ۳۵) (ب) طوقه (ص ۳۶) (پ) مجاور (ص ۳۶) (ت) زوج (ص ۴۰)



۹۱ وجود ندارد. زیرا: $\sum_{i=1}^v \text{deg} v_i = 2q \Rightarrow 2 \times 7 = 2q \Rightarrow 21 = 2q$ فرد

۹۲ با توجه به $\frac{8}{3+1} = 2$ داریم $\gamma(G) \geq 2$. لذا حداقل عدد احاطه‌گری ۲ است. از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. پس $\gamma(G) \leq 2$. در نتیجه $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه‌گری). (ص ۵۲)



(ص ۴۲) $\frac{p(p-1)}{2} = 10 \Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \Rightarrow p = 5$

الف) $\delta(G) = \cdot, \Delta(G) = 4$ (ص ۳۲ تا ۳۹)

ب) $c, a, b, c, c, a, e, c, c, e, d, c$

پ) ۵

ت) $N_G(e) = \{a, c, d\}$

۹۴

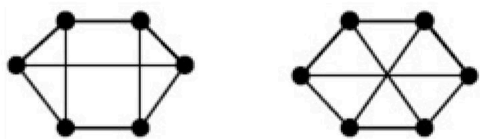
ث) خیر

۹۵) فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد، در این صورت

داریم: [خطای پردازش ریاضی]

از طرفی [خطای پردازش ریاضی] و [خطای پردازش ریاضی] زوج اند. لذا [خطای پردازش ریاضی] باید زوج باشد. می دانیم تعداد زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (ص ۴۰)

۹۶) الف) (تعریف گراف k -منتظم ص ۳۵) $2 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$

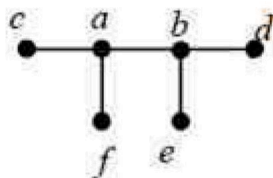


ب) رسم یکی از گرافهای مقابل کافی است.

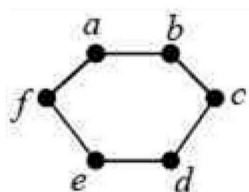
۹۷) برای گراف مورد سوال داریم $3 \leq \gamma(G) = \frac{10}{3+1} \leq \gamma(G) \Rightarrow \frac{n}{\Delta+1} \leq \gamma(G)$. از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه

احاطه گر برای گراف است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$. (قسمت دوم کار در کلاس ص ۵۰)

۹۸) الف) گراف روبه رو از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه گر یکتا $\{a, b\}$ است. (تمرین ۹ ص ۵۳)



ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه احاطه گری به اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$.



۹۹) (مساله ۱ ص ۳۸) $\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \Rightarrow 9 + 12 = p - 1 \Rightarrow p = 22$

۱۰۰) الف) (مشابه مثال ص ۳۶) $N_G[a] = \{a, b, e, d\}$

ب) دور به طول ۴ - a, b, e, d, a (تعریف دور ص ۳۸)

پ) مسیر به طول ۳، a, e, b, c, a و مسیر به طول ۴، a, d, e, b, c, a (مشابه مثال ص ۳۸)

۱۰۱) الف) دو برابر (نتیجه ابتدای ص ۴۰) ب) k (تعریف گراف منتظم ص ۳۵)

پ) مینیمم (تعریف ص ۴۴) ت) مینیمال (تعریف ص ۴۶)

شورتکات جاده نهایی

ریاضیات گسسته

فصل سه



Medical _ Stus



Kolyze

۱ تعیین کنید ۴۶ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟ (ذکر راه حل الزامی است).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۲ مربع لاتین A را در بگیرید:
الف) با تعویض جای سطر اول و سطر سوم یک مربع لاتین دیگری به دست آورید و آن را B بنامید.
ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامد هستند؟ چرا؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۳ تعداد جوابهای صحیح مثبت معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۴ به چند طریق می توان ۹ نفر را در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان داد؟ (ذکر راه حل الزامی است).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۵ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
تعداد حالت هایی که می توان ۲ کتاب متفاوت را بین ۴ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک کتاب نداشته باشد، برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۶ جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
مجموع درایه های روی قطر اصلی یک مربع چرخشی 5×5 برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۷ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.
دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۸ مربع‌های لاتین A و B را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

الف) کدام‌یک از دو مربع لاتین داده شده، چرخشی است؟
ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامد هستند؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۹ تعداد اعداد ۷ رقمی که با ارقام ۱، ۲، ۲، ۲، ۲، ۴، ۴ و ۵ می‌توان نوشت را محاسبه کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۰ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
الف) حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
ب) عدد ۱۴۰۴ به کلاس یا دسته هم‌نهشتی ۷ به پیمانه ۱۱ تعلق دارد.
ج) در هر گراف کامل، تمام یال‌ها با هم مجاور هستند.
د) اگر A یک مجموعه ۲ عضوی باشد، آنگاه فقط دو تابع پوشا مانند $f: A \rightarrow A$ وجود دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۱۱ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 3×4 قرار دارند. نشان دهید، حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{2}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۲ به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در سه اتاق ۳، ۲، ۱ نفره اسکان داد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۳ معادله $x_1 + 2\sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 5$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۴ درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.
- تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی برابر با ۱۵ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۵ جمله زیر را با نوشتن عدد مناسب در جای خالی تکمیل کنید.
مجموع درایه‌های ستون دوم یک مربع لاتین مرتبه ۴ برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

۱۶ با حروف کلمه «بادبادک‌باز» چند کلمه ۱۰ حرفی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۱۷ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۱۸) درستی و یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید.
برای $n \neq 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۱۹) جای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید.
تعداد توابع یک به یک مانند $f: A \rightarrow B$ اگر بدانیم $|A| = 5, |B| = 4$ برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۰) جای خالی را با کلمه یا عبارت مناسب تکمیل کنید.
در بین ۳۹۰ دانش‌آموز، حداقل نفر روز تولد یکسانی دارند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

۲۱) تعداد توابع پوشا از مجموعه A به مجموعه B عضو B را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۲۲) قرار است سه کارگر با سه نوع ماشین نخریسی و سه نوع الیاف در سه روز اول هفته کار کنند. به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۲۳) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد ۱۰ رقمی می‌توان نوشت؟ (محاسبه جواب آخر الزامی نیست.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۲۴) جای خالی را با عدد مناسب تکمیل کنید.
تعداد راه‌های توزیع ۳ خودکار متفاوت بین ۵ نفر به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد، برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

۲۵) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۲۶) مربع لاتینی بنویسید که با مربع لاتین زیر متعامد باشد و متعامد بودن آن را با ذکر دلیل بیان کنید.

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۲۷) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
تعداد توابع یک به یک از مجموعه دو عضوی به مجموعه ۴ عضوی برابر می‌باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۲۸) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
دو مربع لاتین 2×2 وجود و مربع لاتین 1×1 وجود دارد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۲۹) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۰ و ۱ چند کد ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۳۰ چهار برادر و سه خواهر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر همواره خواهرها کنار هم و برادرها کنار هم قرار بگیرند، آن‌گاه این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۳۱ اگر داشته باشیم $A = \{7, 8, 9\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۳۲ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
الف) در یک گراف از مرتبه p ، اگر $\chi(G) = 1$ باشد، در این صورت حداقل تعداد یالها برابر است.
ب) در یک مربع لاتین چرخشی 4×4 مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر است.
ج) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی برابر است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۳۳ هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها کمتر از $\sqrt{8}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۳۴ قرار است سه مدرس T_1, T_2, T_3 در سه جلسه متوالی در سه کلاس C_1, C_2, C_3 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه‌ریزی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۳۵ می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می‌توان انجام داد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۳۶ حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آن‌ها فاصله‌شان کمتر از ۱ است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۳۷ تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۷ عضوی را به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۳۸ دو مربع لاتین متعامد 3×3 را بنویسید. (دلیل متعادل بودن آن‌ها را بیان کنید.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۳۹ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۴۰ به چند طریق می‌توان ۴۵ دانش‌آموز را در چهار کلاس ۸ نفره، ۱۰ نفره، ۱۲ نفره و ۱۵ نفره در یک مدرسه قرار داد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۴۱ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لاکل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۴۲ با ارقام ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۴۳ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لاقل ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۴۴ ۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به طوری که: الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند. ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۴۵ الف) تمام مربع‌های لاتین 2×2 را بنویسید. ب) آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۴۶ کوتاه پاسخ دهید. علی و حسین و ۵ نفر دیگر را به چند طریق می‌توان در یک صف کنار هم قرار داد، به طوری که: الف) علی و حسین کنار هم باشند. ب) ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۴۷ می‌خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

۴۸ در مربع لاتین A (شکل مقابل) جای سطر اول و سوم را با هم جابه‌جا کنید تا مربع لاتین B ایجاد شود. سپس با ذکر دلیل بررسی کنید آیا A و B دو مربع لاتین متعامد هستند؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۴۹ می‌خواهیم با حروف ش، الف و ث و ۵ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است، تعداد کل رمزهایی که در هر یک از آن‌ها حروف کنار هم باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۵۰ با حروف کلمه جیرجیرک چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۵۱ مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

۵۲ می‌خواهیم با حروف ب و ج و ارقام ۸، ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است: (الف) تعداد رمزهایی که هریک از آن‌ها با یک حرف آغاز و حرف دیگر خاتمه یابد. (ب) تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

۵۳ مربع لاتین A را در نظر بگیرید.

(الف) با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A، مربع لاتین B را تولید کنید. (ب) متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۵۴ با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که: (الف) اعداد زوج کنار هم باشند. (ب) اعداد فرد کنار هم باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۵۵ نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۵۶ ۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۵۷ تعداد تابع‌های یک به یک از مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۵۸ متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۵۹ یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۶۰ هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۶۱ در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۶۲) ۴ دانش‌آموز پایه دهم و ۳ دانش‌آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که: الف) هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند. ب) همواره دانش‌آموزان پایه دهم کنار هم باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۶۳) در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

(ب)

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

(الف)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۶۴) مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۴، ۳، ۲، ۱ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۶۵) با ارقام عدد ۴، ۳، ۲، ۲، ۲، ۱، ۱ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۶۶) به چند طریق می‌توان ۴ مهره به رنگ‌های سبز، قرمز، آبی و سفید را در ۳ ظرف قرار دهیم، به شرطی که هیچ ظرفی خالی نماند؟ (ذکر راه‌حل الزامی است.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۴

۶۷) با استفاده از اصل لانه کبوتری، تعیین کنید که در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند تا مطمئن باشیم لاقل ۲۱ نفر از آن‌ها، روز هفته و فصل تولدشان، یکسان است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۶۸) چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 200$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۶ و ۸ بخش‌پذیر نباشند؟ (بر ۶ بخش‌پذیر نباشند و بر ۸ نیز بخش‌پذیر نباشند.)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۶۹) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7$ را به دست آورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۷۰) جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

- الف) تعداد $|-I|$ - مجموعه‌های گراف تهی از مرتبه ۴، برابر با است.
 ب) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌های ۱، و وجود ندارد.
 ج) تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ای ۲ عضوی به مجموعه‌ای ۴ عضوی برابر با است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۴

۷۱) در بین اعداد مجموعه $\{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 400\}$ چند عدد وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۶ و ۴ بخش‌پذیر نباشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

الف) یک مربع لاتین چرخشی مرتبه ۴ بنویسید و آن را A بنامید. ۷۲

ب) مربع لاتین حاصل از جایگشت $\begin{pmatrix} 1 \rightarrow 4 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 1 \end{pmatrix}$ را روی مربع لاتین A بسازید و آن را B بنامید.

پ) آیا A و B متعامدند؟ چرا؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۳

اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۵ باشد. و بدانیم رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم صفر و یک رقم ۵ را شامل می‌شود. چند رمز متفاوت برای این قفل می‌توان ساخت؟ ۷۳

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

الف) سه مدرس A, B, C قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰ - ۸، ۱۲ - ۱۰، ۱۴ - ۱۲ در سه کلاس الف و ب و ج تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. به کمک مربع لاتین چرخشی برای آنها یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

ب) در برنامه قبلی، مدرس A تصمیم دارد با مدرس B برنامه خود را جابه‌جا کند. مربع لاتین جدید را تشکیل دهید و متعامد بودن این دو مربع لاتین را بررسی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

به چند طریق می‌توان از بین مدادهایی با رنگ‌های، زرد - آبی - قرمز - سبز، ۱۱ مداد انتخاب کرد. اگر بخواهیم از مداد زرد رنگ حداقل دو تا و از مداد سبز رنگ بیش از سه تا داشته باشیم. ۷۵

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۳

حداقل چند دانش‌آموز در حیاط یک دبیرستان حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم لاکل ۲۱ نفر از آنها متعلق به یک پایه تحصیلی (دهم، یازدهم، دوازدهم) و یک رشته تحصیلی (ریاضی، تجربی، انسانی) هستند؟ ۷۶

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 20$ را با شرط‌های $x_1 > 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$ به دست آورید. ۷۷

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

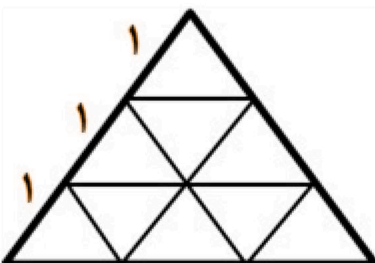
می‌خواهیم ۱۰ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ ۷۸

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۳

به چند طریق می‌توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم. ۷۹

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به طول ضلع ۳ واحد تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل دو نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آن‌ها از یکدیگر کمتر از یک باشد. ۸۰



سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۸۱) نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۲

۸۲) یک نجار در هفته ۴ مدل مختلف صندلی در ۳ رنگ متفاوت می‌سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم. لاقل ۳ صندلی هم رنگ و هم مدل ساخته است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۸۳) ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۸۴) حداقل افراد شرکت‌کننده در یک همایش چند نفر باشند، تا با اطمینان بتوان گفت که ۵ نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند و رقم یکان کد ملی آنها زوج است.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۸۵) چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ (نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی‌باشد)

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۸۶) قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هریک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۸۷) معادله $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۲

۸۸) چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخشپذیرند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۸۹) به چند روش می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۱

۹۰) تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله زیر را با شرایط داده شده به دست آورید.

$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \quad (x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4, x_5 = 2)$$

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۱

۹۱) به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

۹۲) معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

الف) مربع لاتین A را در نظر بگیرید. با اعمال جایگشت
 $1 \rightarrow 3$
 $2 \rightarrow 2$
 $3 \rightarrow 4$
 $4 \rightarrow 1$
 مربع لاتین B را به دست آورید.

A =

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۱

در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟ **۹۴**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 > 2$ و $x_4 \geq 4$ باشد؟ **۹۵**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۰

ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است. **۹۶**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰ ($1 \leq n \leq 300$)، چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۵ بخش پذیر نیست؟ **۹۷**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که از گل نوع سوم حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟ **۹۸**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۱۴۰۰

۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟ **۹۹**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ **۱۰۰**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

به چند طریق می توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم. **۱۰۱**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آنها مانند هم و غیرتکراری است؟ **۱۰۲**

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۱۰۳ مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ را در نظر بگیرید. چند عدد در S وجود دارند به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۱۰۴ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 17$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن که $x_5 = 2$ و $x_2 > 2$ باشند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-دی ماه ۹۹

۱۰۵ در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آن که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۱۰۶ معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 \geq 1$ و $x_3 \geq 3$ باشند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۹۹

۱۰۷ قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۰۸ در بین اعداد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۰۹ به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن که هیچ‌کس بیش‌تر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم).

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۱۰ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۹۹

۱۱۱ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ($1 \leq n \leq 500$) چند عدد وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱۱۲ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_2 = 4$ و $x_4 \geq 3$ باشد؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-شهریورماه ۱۴۰۲

۱۱۳ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

سوالات امتحانات نهایی متوسطه-دوازدهم-خردادماه ۱۴۰۰

$$\begin{cases} k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4 \\ kn + 1 = 46 \Rightarrow 4n + 1 = 46 \Rightarrow n = \left[\frac{45}{4} \right] = 11 \end{cases} \quad \text{طبق اصل لانه کبوتری داریم: } \boxed{1}$$

الف) $B =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$\boxed{2}$

۱۳	۲۱	۳۲
۲۲	۳۳	۱۱
۳۱	۱۲	۲۳

ب) روش اول: بله - زیرا در مربع زیر عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.

روش دوم: بله، زیرا هر دو جایگاه در مربع A که اعداد یکسانی دارند، جایگاههای نظیر آنها از مربع B اعداد متمایزی دارند.

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{7}{3} = 35 \quad \text{روش اول: } \boxed{3}$$

روش دوم:

$$y_t = x_t - 1 : 1 \leq x_t \leq 4 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7}{3} = 35$$

روش سوم: مثل این است که از ۴ نوع گل، ۸ شاخه برداریم به شرط آنکه از هر گل حداقل یک شاخه انتخاب کرده

$$\binom{7}{3} = 35 \quad \text{باشیم. پس:}$$

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!} \quad \text{روش اول: } \boxed{4}$$

روش دوم: $\binom{9}{2} \binom{7}{3} \binom{4}{4}$ یا هر یک از موارد مشابه مانند: $\binom{9}{4} \binom{5}{3} \binom{2}{2}$ یا $\binom{9}{4} \binom{5}{3}$ یا ...

$$\binom{4}{2} \times 2! \text{ یا } P(4, 2) \text{ یا } 4 \times 3 \text{ یا } 12 \quad \boxed{5}$$

$\boxed{6}$

نادرست $\boxed{7}$

۸ الف) مربع لاتین B

ب) روش اول: خیر زیرا از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر دو مربع لاتین A و B، مربع جدید حاصل حاوی اعداد دو رقمی تکراری است.

۱۳	۲۴	۳۱	۴۲
۴۴	۱۳	۲۲	۳۱
۳۱	۴۲	۱۳	۲۴
۲۲	۳۱	۴۴	۱۳

۳۱	۴۲	۱۳	۲۴
۴۴	۳۱	۲۲	۱۳
۱۳	۲۴	۳۱	۴۲
۲۲	۱۳	۴۴	۳۱

روش دوم: خیر - اشاره به یکسان بودن دو درایه مشخص در جایگاه‌های نظیر در دو مربع A و B (بدون رسم مربع) نمره تعلق گیرد.

۹ روش اول:

$$\frac{7!}{2! \times 2!} = 420$$

روش دوم:

$$\binom{7}{3} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1} = 420$$

ملاحظات: در روش دوم، پاسخ‌های دیگری مانند موارد زیر نیز قابل قبول هستند.

$$\binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{1}{1} = 420 \quad \text{یا} \quad \binom{7}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{3} = 420$$

د) درست

ج) نادرست

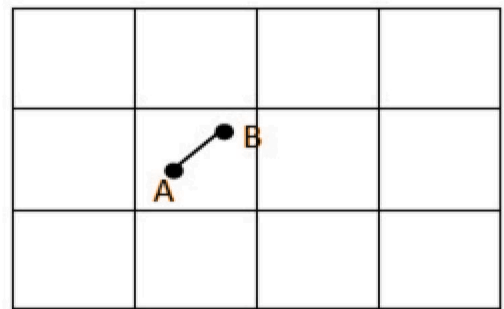
ب) درست

۱۰ الف) نادرست

۱۱ مستطیل را به ۱۲ خانه مربع شکل ۱×۱ تقسیم می‌کنیم.

۱۳ نقطه را تعداد کبوترها و ۱۲ خانه را تعداد لانه‌ها در نظر می‌گیریم. بنا به اصل لانه کبوتری چون تعداد کبوترها از یک برابر تعداد لانه‌ها ۱ واحد بیشتر است، لذا خانه‌ای وجود دارد که شامل بیش از یک کبوتر است. در هر خانه مربع شکل حداکثر فاصله نقاط برابر قطر مربع یعنی $\sqrt{2}$ است.

$$AB < d = \sqrt{2}$$



$$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 60 \quad \text{روش دوم: } 60$$

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 60 \quad \text{روش اول: } 60$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \binom{5+3-1}{3-1} = 21$$

$$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = 10$$

$$x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = 3$$

$$21 + 10 + 3 = 34$$

۱۳

۱۴ نادرست

۱۵ ۱۰

$$\frac{10!}{3! \times 2! \times 2!}$$

۱۶

۱۷ اعداد طبیعی را به دو گروه زوج و فرد افزایش می‌کنیم. این دو مجموعه را لانه‌ها و سه عدد طبیعی را کبوترها در نظر می‌گیریم، بنا به اصل لانه کبوتری یک لانه وجود دارد که حداقل شامل دو کبوتر باشد. یعنی دو عدد طبیعی وجود دارد که هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. لذا مجموع آنها در هر دو حالت زوج است.

۱۸ نادرست

۱۹ صفر

۲۰ ۲

$$3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 150$$

۲۱

A =

	w_1	w_2	w_3
شنبه	1	2	3
یکشنبه	3	1	2
دوشنبه	2	3	1

B =

	w_1	w_2	w_3
شنبه	3	1	2
یکشنبه	1	2	3
دوشنبه	2	3	1

 \Rightarrow

	w_1	w_2	w_3
شنبه	13	21	32
یکشنبه	31	12	23
دوشنبه	22	33	11

۲۲

چون اعداد دو رقمی تکراری در مربع ساخته شده وجود ندارد پس متعامدند.

$$\frac{10!}{2! \times 3! \times 4!}$$

۲۳

۲۴ $\frac{5!}{2!}$ یا ۶۰

۲۵ $\frac{7!}{2! \times 3!}$ (ص ۵۸)

۲۶ در مربع لاتین دوم عدد دورقمی تکراری نداریم. بنابراین مربع لاتین ارائه شده با مربع لاتین مورد سؤال متعامد هستند.

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

 \rightarrow

۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱
۳۲	۲۱	۱۳

(توجه: به سایر مربع‌های لاتینی که شرایط مسأله را برقرار کنند، نمره داده شود.)

۲۷ ۱۲ (ص ۷۹)

۲۸ دارد - یک

۲۹ $\frac{8!}{4! \times 3! \times 1!}$ (ص ۵۸)

۳۰ $3! \times 4! \times 2! = 288$ (ص ۷۲)

۳۱ $\binom{3}{2} \times \binom{6}{6} \times 6!$ (ص ۷۱)

۳۲ (ج) $\frac{5!}{2!} = 60$ (ص ۷۸)

(ب) ۴ (ص ۶۳)

(الف) $p - 1$ (ص ۵۳)

۳۳ ابتدا مستطیل موردنظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری دست‌کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است با توجه به قضیه فیثاغورس داریم: (ص ۸۴)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$

۳۴ فرض کنیم هر سطر نشان‌دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین 3×3 زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد. (ص ۶۲)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳۵ $4! \times 2^4 = 384$ (ص ۷۱)

۳۶ ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک را لانه در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری ($4 < 5$) حداقل یک لانه (مثلث وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می‌گیرد. (ص ۸۲)

۳۷ اگر فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_7\}$ ، برای تعریف f روی هر عضو A ، 7 انتخاب داریم، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کل تابع‌های یک به یک برابر است با $\frac{7!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ (اگر

دانش‌آموزی از فرمول ${}_5^7 = \frac{7!}{2!}$ پاسخ دهد نمره کامل داده شود.) (ص ۷۸)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۳۸

متعامدند چون در مربع ترکیبی عدد تکراری در انطباق آنها نداریم.

۳۹ ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم را به چند طریق می‌توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد به طوری که همواره دانش‌آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند. (با توجه به باز پاسخ بودن سؤال، به پاسخ‌های صحیح دیگر نمره داده شود.) (ص ۷۱)

۴۰ در صورتی که جواب را به فرم $\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!}$ هم نوشتند نمره داده شود. (ص ۵۹)

۴۱ تعداد کبوترها = ۵۰۵ و تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته \times تعداد ماه‌های سال. $n = 7 \times 12 = 84$ طبق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$kn + 1 \xrightarrow{n=84} 505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. (ص ۸۳)

$\frac{9!}{3! \times 2!}$ (ص ۵۸)

۴۲

$k + 1 = 20 \Rightarrow k = 19, kn + 1 = 19 \times 7 + 1 = 134$ (ص ۸۲)

۴۳

الف) $6! \times 6!$

۴۴

ب) $6! \times 5!$ (ص ۵۷)

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

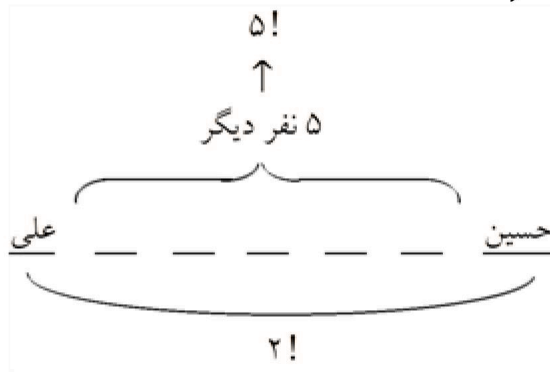
۴۵ الف) دو نوع مربع لاتین مرتبه ۲ داریم.

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

ب)

متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۶)

۴۶ الف)
$$\left. \begin{array}{l} ۲! = x = \text{علی و حسین} \\ ۶! \xrightarrow{\text{جایگشت}} ۶ \text{ نفر } x = ۵ \text{ نفر دیگر} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} ۲! \times ۶!$$



ب) $\xrightarrow{\text{جواب}} ۲! \times ۵!$

۴۷ $\binom{۲۰}{۵} \binom{۱۵}{۵} \binom{۱۰}{۵} \binom{۵}{۵}$ (در صورتی که جواب را به فرم $\frac{۲۰!}{۵! \times ۵! \times ۵! \times ۵!}$ هم نوشتند، درست است) (ص ۵۹)

$B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱۲ & ۲۳ & ۳۱ \\ ۳۳ & ۱۱ & ۲۲ \\ ۲۱ & ۳۲ & ۱۳ \end{bmatrix}$

۴۸

متعامدند. زیرا در مربع آخر هیچ عدد ۲ رقمی تکراری وجود ندارد. (ص ۷۲)

۴۹ $۳! = x = ۳$ تا حرف

x با ۵ عدد : ۶ تا

جواب $\rightarrow ۶! \times ۳!$ (ص ۵۶)

۴۹

$$\frac{۷!}{۲! \times ۲! \times ۲!}$$

۵۰

$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲۱ & ۳۳ & ۱۲ \\ ۱۲ & ۲۱ & ۳۳ \\ ۳۳ & ۱۲ & ۲۱ \end{bmatrix}$

۵۱

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۷۲)

الف) $6! \times 2!$

ب) $2! \times 7!$ (ص ۵۶)

۵۲

$$\begin{matrix}
 1 \rightarrow 3 \\
 2 \rightarrow 1 \\
 3 \rightarrow 2
 \end{matrix}
 \quad B = \begin{matrix}
 \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} 21 & 13 & 32 \\ 32 & 21 & 13 \\ 13 & 32 & 21 \end{matrix}
 \end{matrix}$$

الف) ۵۳

ب)

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دو رقمی تکراری داریم. (ص ۶۵)

$$\left. \begin{matrix}
 6, 8, 4 = x \rightarrow 3! \\
 5, 2, x \xrightarrow{\text{جایگشت}} 3!
 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} 3! \times 3! \quad \text{الف) ۵۴}$$

$$\left. \begin{matrix}
 3, 7 = x \rightarrow 2! \\
 8, 6, 4, x \xrightarrow{\text{جایگشت}} 4!
 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{جواب}} 2! \times 4! \quad \text{ب)}$$

۵۵ فصل تولد = لانه = ۴ و افراد خانواده = کبوتر = ۵. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند). (ص ۸۰)

$$\begin{matrix}
 \text{حالت } 1 \times & \text{حالت } 1 \times & \text{حالت } 1 \times & \text{حالت } 1 & = & 1^4 \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\
 \text{مرحله چهارم} & \text{مرحله سوم} & \text{مرحله دوم} & \text{مرحله اول} & &
 \end{matrix}$$

۵۶

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, b = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$$

۵۷

اگر مجموعه ۳ عضوی را $\{1, 2, 3\}$ در نظر بگیریم، در برد، ۳ جای خالی داریم که باید ۶ عدد پر کنیم، پس:

$$f = \{(1, -)(2, -)(3, -)\} \Rightarrow 6! = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

۵۸ در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند. (ص ۶۶)

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

(ص ۶۳)

۵۹

$$\binom{8}{4} \binom{4}{3} \binom{1}{1} \quad (\text{ص } ۵۹)$$

۶۰

۶۱ در این مسأله $k + 1 = 7 \Rightarrow k = 6$ و تعداد لانه‌ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn + 1 = 6 \times 12 + 1 = 73$ باشد. (مثال ص ۸۲)

۶۱

الف) $4! \times 2!$

۶۲

ب) (مشابه مثال ص ۵۷) $4! \times 4!$

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

متعامدند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود ندارد.

۶۳ الف)

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

متعامد نیستند. زیرا عدد دو رقمی تکراری در مربع وجود دارد. (مثال ص ۶۵)

ب)

۶۴ با استفاده از جایگشت $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$ مربع لاتین به صورت زیر داریم. (مشابه تمرین ۱۲ ص ۷۲)

۶۴

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

$$\frac{7!}{2! \times 3!} = 420 \quad (\text{مشابه مثال پایین ص } ۵۸)$$

۶۵

۶۶ تعداد حالات ممکن، معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشا از یک مجموع ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است.

۶۶

$$A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_j) \neq b_j\}; 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 3$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$= 3^4 - (3 \times 2^4 - 3 \times 1^4 + 0) = 36$$

$$\left. \begin{aligned} k + 1 &= 21 \Rightarrow k = 20 \\ n &= 7 \times 4 = 28 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = kn + 1 = 20 \times 28 + 1 = 561$$

۶۷

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 200, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{200}{6} \right\rfloor = 33 \quad (68)$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 200, n = 8k\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{200}{8} \right\rfloor = 25$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 200, n = 24k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{24} \right\rfloor = 8$$

$$|\overline{A \cap B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 200 - (33 + 25 - 8) = 150$$

$$\left. \begin{aligned} x_r = 0 &\Rightarrow x_1 + x_r + x_f = 7 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9}{2} = 36 \\ x_r = 1 &\Rightarrow x_1 + x_r + x_f = 3 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 36 + 10 = 46 \quad (69)$$

ب) ۲ و ۶

الف) ۱ (70)

روش دوم: $P_r(4, 2)$ یا $P(4, 2)$ یا $\frac{4!}{2!}$

ج) روش اول: ۱۲ یا 4×3

روش چهارم: $2! \times \binom{4}{2}$

روش سوم: $\binom{4}{1} \times \binom{3}{1}$

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 6 | n\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{400}{6} \right\rfloor = 66 \quad (71)$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 4 | n\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{400}{4} \right\rfloor = 100$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | 12 | n\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{400}{12} \right\rfloor = 33$$

$$|\overline{A \cap B}| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 400 - (66 + 100 - 33) = 267$$

الف) A =

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

ب) B =

۴	۳	۲	۱
۱	۴	۳	۲
۲	۱	۴	۳
۳	۲	۱	۴

 \Rightarrow

۱۴	۲۳	۳۲	۴۱
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۳۲	۴۱	۱۴	۲۳
۲۳	۳۲	۴۱	۱۴

(72)

پ) خیر - زیرا مربع لاتین ادغام شده، دارای درایه‌های تکراری است.

۷۳

$$|S| = 6^4$$

$$A = \{\overline{abcd} | a, b, c, d \neq \cdot\} \Rightarrow |A| = 5^4, B = \{\overline{abcd} | a, b, c, d \neq 5\} \Rightarrow |B| = 5^4$$

$$A \cap B = \{\overline{abcd} | a, b, c, d \neq \cdot, 5\} \Rightarrow |A \cap B| = 4^4$$

$$|\overline{A \cup B}| = |\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 6^4 - (5^4 + 5^4 - 4^4) = 302$$

الف) $A = 1, B = 2, C = 3$

۷۴

ب) $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8-10 & 10-12 & 12-14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{پ} \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$MN = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8-10 & 10-12 & 12-14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 12 & 21 & 33 \\ 33 & 12 & 21 \\ 21 & 33 & 12 \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 8-10 & 10-12 & 12-14 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{الف} \\ \text{ب} \\ \text{ج} \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

دو مربع لاتین متعامد نیستند زیرا در ماتریس ادغام شده درایه تکراری وجود دارد.

راه اول: ۷۵

$x_1 =$ تعداد مداد زرد و $x_2 =$ تعداد مداد آبی و $x_3 =$ تعداد مداد قرمز و $x_4 =$ تعداد مداد سبز

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 2, x_4 \geq 3 \rightarrow x_4 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \Rightarrow x_1 - 2 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 11 - 2 - 4 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4$$

$$= 5, y_1, x_2, x_3, y_4 \geq 0$$

$$\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \quad \text{راه دوم:}$$

$$x_1 \geq 2, x_2, x_3 \geq 0, x_4 \geq 4 \Rightarrow \binom{11-2-4+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = 56$$

تعداد لانه: $n = 3 \times 3 = 9$

$$k + 1 = 21 \Rightarrow k = 20$$

تعداد کبوترها: $kn + 1 = 20 \times 9 + 1 = 181$

۷۶

۷۷ روش اول:

$$x_1 + 2(3) + x_2 + x_3 = 20 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 14$$

$$x_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3, x_2 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_2 = y_2 + 4$$

$$y_1 + 3 + y_2 + 4 + x_3 = 14 \Rightarrow y_1 + y_2 + x_3 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 14 \quad \text{روش دوم:}$$

$$\binom{14-3-4+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

۷۸ روش اول:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (2!)^5 = 3840$$

روش دوم:

$$(10 \times 1) \times (8 \times 1) \times (6 \times 1) \times (4 \times 1) \times (2 \times 1) = 3840$$

۷۹

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\},$$

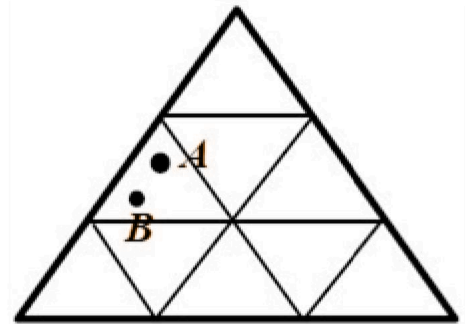
$$A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}, 1 \leq j \leq 3$$

$$|S| = 3^4 = 81, |A_j| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \quad (\text{ص } 77)$$

۸۰ ۱۰ نقطه را کبوتر و هریک از ۹ قسمت مثلث را لانه فرض می‌کنیم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند. یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که $|AB| < 1$. (ص ۸۰)



۸۱

به هر کدام از x_1, x_2, \dots, x_k عدد ۱- را اضافه می‌کنیم.

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$$

لذا تعداد حالات جواب از رابطه $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ به دست می‌آید. (ص ۶۱)

$$k+1=3 \Rightarrow k=2, n=3 \times 4 = 12 \Rightarrow kn+1 = 12 \times 2 + 1 = 25 \quad (\text{ص } 82)$$

۸۲

۸۳ اگر در ترکیب دو مربع لاتین، هیچ زوج مرتب دورقمی تکراری وجود نداشته باشد، آن دو مربع متعامدند.

۸۳

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$n = 12 \times 5 = 60 \Rightarrow$ تعداد حالات یکان زوج کدملی \times تعداد ماهها = تعداد لانهها

۸۴

$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4$ تعداد کبوترها $= nk + 1 \xrightarrow[k=4]{n=60} 60 \times 4 + 1 = 241$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری حداقل ۲۴۱ نفر مورد نیاز است. (ص ۸۳)

تعداد کل رمزها $|S| = 5^4$ (ص ۷۵)

۸۵

تعداد رمزهای فاقد ۳ $|A| = 4^4$

تعداد رمزهای فاقد ۲ $|B| = 4^4$

تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳ $|A \cap B| = 3^4$

$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A \cup B| = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4)$

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

9

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

\Rightarrow

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

(ص ۷۲)

۸۶

اگر مربعهای لاتین متعامد صحیح دیگری نیز بتوانید به دست آورید، درست است.

$$\begin{cases} x_4 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{12}{2} = 66 \\ x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \binom{10}{2} = 45 \end{cases} \Rightarrow 66 + 45 = 111 \text{ (ص ۷۱)}$$

۸۷

$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$
 $|S| = 630, |A| = 210, |B| = 126, |A \cap B| = 42 \Rightarrow |\overline{A \cup B}| = 336$ (ص ۸۳)

۸۸

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$

$x_2 = 3$

$x_4 \geq 3, x_5 \geq 5 \xrightarrow{x_2=3, x_4=y_4+3, x_5=y_5+5} x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 = 5$

$x_i \geq 0, y_5 \geq 0 \Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = 56$ (ص ۷۱)

$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 9 \Rightarrow x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 7$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{9}{2} = 36 \Rightarrow 36 + 10 = 46$

$x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10$ (ص ۷۱)

۸۹

۹۰

این سؤال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضو می‌توان

۹۱

نوشت. (ص ۷۸) $3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 243 - 93 = 150$

$$x_7 = 4, x_8 \geq 2 \Rightarrow x_8 = y_8 + 2$$

۹۲

$$x_1 + x_7 + 4 + x_7 + 3 + y_8 + x_8 = 12 \Rightarrow x_1 + x_7 + x_7 + y_8 + x_8 = 5 \Rightarrow \mathcal{J} = \binom{9}{4} \text{ (ص ۷۱)}$$

B =

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

(الف) ۹۳

۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

(ب)

متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دو رقمی تکراری داریم.

$$A = \{1 \leq n \leq 200 | n = 4k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50, B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 7k\}$$

۹۴

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 28k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor = 7$$

$$|A \cap B^c| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43 \text{ (ص ۸۳)}$$

$$y_1 = x_1 - 3, y_1 \geq 0, y_7 = x_7 - 4, y_7 \geq 0$$

۹۵

$$y_1 + 3 + x_7 + x_7 + y_7 + 4 + x_8 = 15 \Rightarrow y_1 + x_7 + x_7 + y_7 + x_8 = 8$$

$$\Rightarrow \mathcal{J} = \binom{12}{4} \text{ (ص ۷۱)}$$

۹۶ برای این که مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد. (ص ۸۳)

$$A = \{1 \leq n \leq 300 | n = 4k(k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{300}{4} \right\rfloor = 75$$

۹۷

$$B = \{1 \leq n \leq 300 | n = 5k(k \in \mathbb{N})\}$$

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 300 | n = 20k(k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{300}{20} \right\rfloor = 15$$

$$|A \cap B^c| = |A| - |A \cap B| = 75 - 15 = 60 \text{ (ص ۸۳)}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$$

$$x_2 \geq 4 \Rightarrow y_2 = x_2 - 4, y_2 \geq 0$$

$$x_6 > 2 \Rightarrow y_6 = x_6 - 3, y_6 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + y_2 + 4 + x_3 + x_4 + x_5 + y_6 + 3 = 10$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_6 = 3 \Rightarrow \mathcal{C} = \binom{8}{5} \text{ (ص ۷۱)}$$

۹۸

$$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4, kn + 1 = 54 \Rightarrow 4n = 53, n = \left\lfloor \frac{53}{4} \right\rfloor = 13 \text{ (ص ۸۲)}$$

۹۹

$$\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$$

\uparrow \uparrow
 انتخاب ۴ نفر جایگشت ۴ کلاه

۱۰۰

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12, x_1 \geq 1, x_4 > 3, x_6 = 1$$

$$y_1 = x_1 - 1, y_1 \geq 0, y_4 = x_4 - 4, y_4 \geq 0$$

$$y_1 + 1 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 + 1 = 12 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 6$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \binom{10}{4} \text{ (ص ۷۱)}$$

۱۰۱

$$\text{تعداد لانه‌ها} = n = 32 \times 31 = 992, k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$$

$$\text{تعداد کبوترها} = 2 \times 992 + 1 = 1985 \text{ (ص ۸۲)}$$

۱۰۲

$$A = \{n \in S \mid n = 5k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$$

$$B = \{n \in S \mid n = 7k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(B) = \left\lfloor \frac{400}{7} \right\rfloor = 57$$

$$A \cap B = \{n \in S \mid n = 35k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{400}{35} \right\rfloor = 11$$

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 400 - (80 + 57 - 11) = 274 \text{ (ص ۷۵)}$$

۱۰۳

$$y_2 = x_2 - 3, y_2 \geq 0, x_5 = 2$$

$$x_1 + y_2 + 3 + x_3 + x_4 + 2 + x_6 = 17 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 12$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{16}{4} \text{ (ص ۶۱)}$$

۱۰۴

$$|\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = 25 - (15 + 14 - 9) = 5 \text{ (ص ۷۴)}$$

۱۰۵

$$y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 1 + y_1, y_3 = x_3 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_3 = 4 + y_3$$

$$\Rightarrow 1 + y_1 + x_2 + 4 + y_3 + x_4 + x_5 = 14 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 9$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} \text{ (ص ۶۱)}$$

۱۰۶

۱۰۷) برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص‌کننده ییاف است. (سوال ۱۴ ص ۷۲)

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

= A

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

= B

	W_1	W_2	W_3
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

عدد سمت چپ هر در آیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کننده نوع ییاف است.

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16 \text{ (مشابه کار در کلاس ص ۷۶)}$$

۱۰۸

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$$

$$A \cap B = \{n | 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

۱۰۹) ابتدا ۴ نفر انتخاب می‌کنیم و سپس ۴ خودکار متمایز را بین آنها جایگشت می‌دهیم:

$$\binom{8}{4} \times 4! = \frac{8!}{4!}$$

(قسمت پ تمرین ۸ ص ۷۱) $x_1 + \dots + x_5 = 11, x_2 \geq 2, x_5 \geq 4$

۱۱۰

$$x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5$$

$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$$

$$|A| = \left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor = 100, |B| = \left\lfloor \frac{500}{4} \right\rfloor = 125, |A \cap B| = \left\lfloor \frac{500}{20} \right\rfloor = 25$$

۱۱۱

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = 500 - (100 + 125 - 25) = 300 \text{ (ص ۷۵)}$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 8 \text{ (ص ۶۱)}$$

۱۱۲

$$x_4 - 3 = y_4 \Rightarrow x_1 + x_3 + y_4 = 5 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21$$

$$|F| = ۱۵, |V| = ۱۱, |B| = ۹, |F \cap V| = ۵, |B \cap V| = ۶, |F \cap B| = ۳$$

$$\Rightarrow |F \cap B \cap V| = ۳$$

$$\text{فقط فوتبال بازی کنند} = |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰$$

$$\text{فقط والیبال بازی کنند} = |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۱۱ - ۵ - ۶ + ۳ = ۳$$

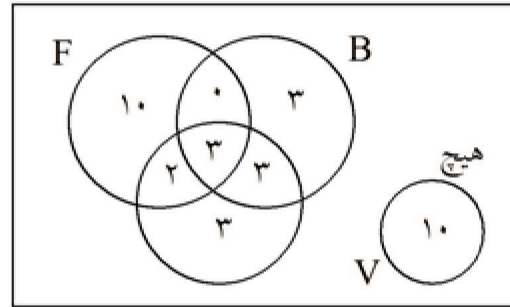
$$\text{فقط بسکتبال بازی کنند} = |B| - |F \cap B| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = ۹ - ۳ - ۶ + ۳ = ۳$$

$$\Rightarrow \text{ج} = ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶ \text{ (ص ۸۳)}$$

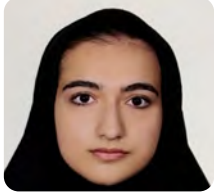
روش دوم:

از نمودار ون کمک می‌گیریم. کافی است از اشتراک ۳ تایی شروع کنیم و به سمت اشتراک ۲ تایی و اعضای کلی مجموعه‌ها برسیم.

$$M = ۳۴$$

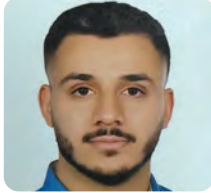


$$\xrightarrow{\text{فقط یکی}} ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶$$



مهديس رفيعی

اعضای مصنوعی و وسایل کمکی
علوم پزشکی ایران



شایان جعفری

دندانپزشکی
علوم پزشکی بندرعباس



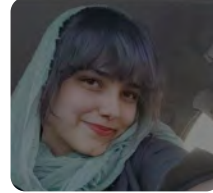
نرگس مردانی

پرستاری
علوم پزشکی ایران



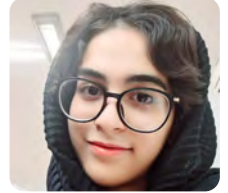
یاسینا نوروزی

پزشکی
جندی شاپور



هانیه مصدق

پرستاری
آزاد نیشابور



مهشید فاطمی

پزشکی
علوم پزشکی کاشان



مبینا گودرزی

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی سبزوار



مأده نظری

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی گرگان



ابوالفضل حسینی

دندانپزشکی
علوم پزشکی رشت



محمدحسین نظری

پزشکی
علوم پزشکی همدان



زهرا حمدي

علوم آزمایشگاهی
علوم پزشکی دزفول



ابراهیم هناره

دندانپزشکی
علوم پزشکی ارومیه



هستی عباسلو

هوشبری
علوم پزشکی رفسنجان



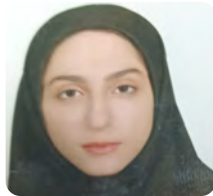
سارا مرادی

پرستاری
دانشگاه آزاد واحد شهرکرد



شنتیا زمانی

دندانپزشکی
علوم پزشکی شهید بهشتی



نگار دلاوری

پرستاری
آزاد رشت



سحر درخشان

پزشکی
آزاد نجف آباد



پریسا سادات موسوی

زیست شناسی سلولی و مولکولی
دانشگاه تهران



سوغند تیموری

پزشکی
علوم پزشکی کرمانشاه



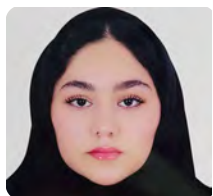
محدثه خان محمدی

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی زنجان



محمدصفا مارمائی

پزشکی
علوم پزشکی گرگان



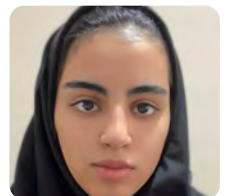
ملیکا ابراهیمی نژاد

دندانپزشکی
آزاد بروجرد



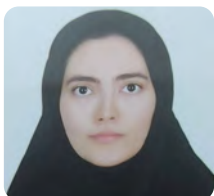
الینا بصیری

تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی همدان



فاطمه حبیبی

پزشکی
علوم پزشکی سمنان



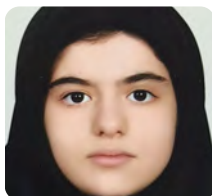
فاطمه محمد رحیمی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند



زینب رنجبر

پرستاری
آزاد اسلامی واحد ساری



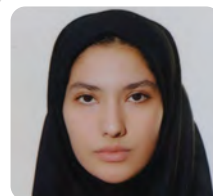
بهار اسلامی

پزشکی
علوم پزشکی رشت



محمدامین متین

پزشکی
علوم پزشکی دزفول



فاطمه شریفی پیرکوهی

فیزیوتراپی
دانشگاه علوم پزشکی جندی شاپور



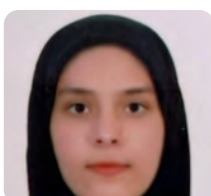
محمدفرحان کریمی

پرستاری
علوم پزشکی بابل



نرگس کلیچ

پزشکی
علوم پزشکی سمنان



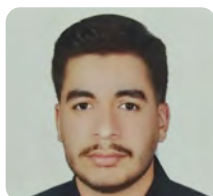
شایان جعفری

کار درمانی
علوم توانبخشی و سلامت اجتماعی تهران



فاطمه میرزایی

پزشکی
علوم پزشکی زنجان



محمدرضا اسپرانی

پزشکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان



مینو رسولی

پزشکی
علوم پزشکی شیراز



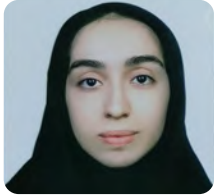
ساناز جعفری

علوم تغذیه
علوم پزشکی اصفهان



فاطمه علی پناه

پزشکی
علوم پزشکی مازندران



الهه غلامپور

پزشکی
علوم پزشکی مازندران



عرشیا نادری

پزشکی
آزاد اسلامی واحد نجف آباد



هانیه اعتمادی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری



زهرا حمدی

پزشکی
علوم پزشکی زنجان



سحر قنبری

داروسازی
علوم پزشکی کرمان



سجاد قویدل

مهندسی صنایع
دانشگاه صنعتی اصفهان



نرگس دهاقین

داروسازی
علوم پزشکی همدان



امیرعلی جهانشاهی

داروسازی
علوم پزشکی مازندران



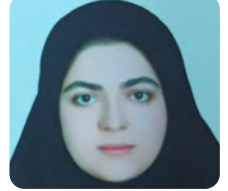
فاطمه رحمانی

دندانپزشکی
علوم پزشکی زنجان



پارمیس یوسفی

پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند



فرناز اقایبی

پرستاری
علوم پزشکی کاشان



محمد اکبری

مهندسی برق
دانشگاه صنعتی اصفهان



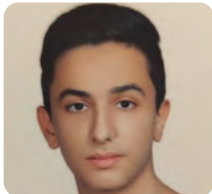
ثنا شریفی

آمار
دانشگاه علامه طباطبایی تهران



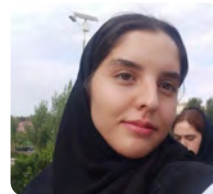
سوگند احمدی

مهندسی نفت
دانشگاه شیراز



علی فتاح

مهندسی صنایع
دانشگاه یزد



مهتاب سلیمی

ریاضیات و کاربرد ها
دانشگاه الزهراء(س)



عرشیا شفیع زاده

مهندسی برق
شهید باهنر کرمان



مهسا یاری

بیم سنجی
دانشگاه شهید بهشتی تهران



محمد شیرزایی

مهندسی مکانیک
دانشگاه فردوسی مشهد



ماهان استرکی

مهندسی شیمی
دانشگاه صنعت نفت آبادان



یاس سنجرانی

مهندسی مکانیک
دانشگاه کاشان



کوثر صحتی

مهندسی معماری
دانشگاه خوارزمی تهران



حمید رضا بهزادی

مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شریف



مهلا الهی

مهندسی علم و مواد
دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل



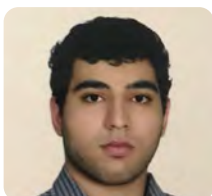
محمد هادی تاجیکی

مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید رجایی



آرمن دارابی

مهندسی مکانیک
دانشگاه قم



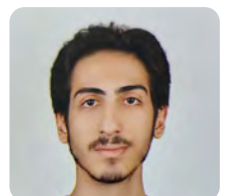
حامد لاوی

مهندسی شیمی
صنعتی نوشیروانی بابل



مبینا مروتی

حسابداری
دانشگاه تهران



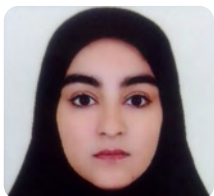
محمد حسن نوابی

مهندسی مکانیک
دانشگاه بوعلی همدان



ساره کریمی

اقتصاد
دانشگاه خوارزمی تهران



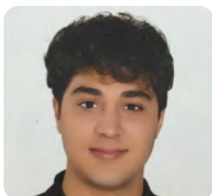
مبینا رودنی

حسابداری
دانشگاه زاهدان



زینب میرزائی

حسابداری
دانشگاه اراک



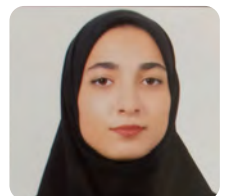
ایلید پورمهدی

سینما
دانشگاه دامغان



فهیمه امیری مقدم

نوازندگی موسیقی جهانی
دانشگاه تهران



نگار مشهدی

عکاسی
دانشگاه سمنان