

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلٰى مُحَمَّدٍ وَّآلِ مُحَمَّدٍ وَّعَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی و آمار (۳)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی — علوم و معارف اسلامی

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه



فهرست

فصل ۱ - آمار و احتمال	۱
درس ۱: شمارش	۲
درس ۲: احتمال	۱۲
درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل	۲۸

۵
نمونه

فصل ۲ - الگوهای خطی	۴۵
درس ۱: مدل سازی و دنباله	۴۶
درس ۲: دنباله های حسابی	۶۱

۲
نمونه
۲, ۵
نمونه

فصل ۳ - الگوهای غیر خطی	۷۳
درس ۱: دنباله هندسی	۷۴
درس ۲: ریشه n ام و توان گویا	۸۶
درس ۳: تابع نمایی	۹۵
منابع	۱۰۵

۵, ۹
نمونه

کار در کلاس

۱. ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.

۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟

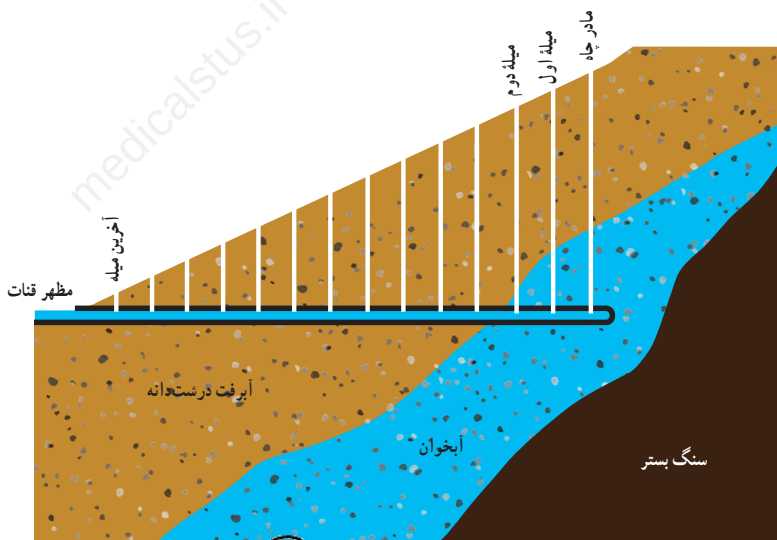
۳. جدول زیر را کامل کنید.

$$a_{n+1} = a_n - 3 \quad \text{و} \quad a_1 = 4$$

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
a	d	$a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 2$	
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴	$a_n = 2 + 3(n-1)$
۴	$d = 1 - 4 = -3$	۴, ۱, -۲, -۵, -۸	$a_n = 4 + (n-1)(-3) \Rightarrow a_n = -3n + 7$
$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}, a_1 = 4$	$-\frac{1}{2}$	۴, ۳.۵, ۳, ۲.۵, ۲	$a_n = 4 + (n-1)(-\frac{1}{2})$
			$a_n = -3 + 5(n-1)$

کار در کلاس

قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیر زمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادر چاه» به دست آمده است، به منطقه ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه های کمکی به نام «میله» استفاده می کنند. میله ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقتی^۱ در خارج کردن خاک های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می شوند.



در یک منطقه، مقتی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه های کمکی در فاصله های یکسان از هم، عمق میله اول ۲۹/۵ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مقتی در مجموع چند

چاه حفر کرده است؟

۱. مقتی: به کسی می گویند که کانال را حفر می کند.

$$d = 29 - 29.5 = -0.5 = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 = 3, d = -\frac{1}{2}, a_n = 1.5 = \frac{3}{2} \quad (n=?)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \frac{3}{2} = 3 + (n-1)(-\frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{3}{2} = 3 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = 2.5 - \frac{1}{2}n \Rightarrow \frac{3}{2} - 2.5 = -\frac{1}{2}n \Rightarrow -1 = -\frac{1}{2}n \Rightarrow n = 2$$

فعالیت

$$\begin{aligned} \xrightarrow{n=3} a_3 &= 3 + 2(3-1) = 3 + 2(2) = 7 \\ \xrightarrow{n=4} a_4 &= 3 + 2(4-1) = 3 + 2(3) = 9 \\ \xrightarrow{n=5} a_5 &= 3 + 2(5-1) = 3 + 2(4) = 11 \end{aligned}$$

دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق

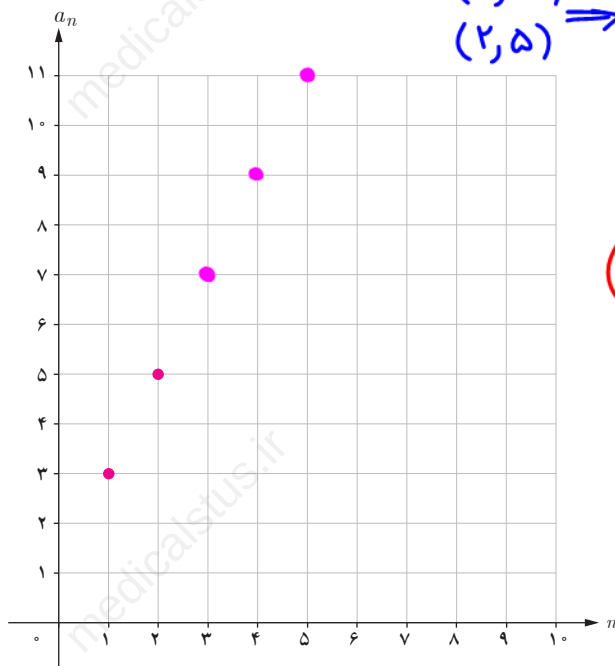
می‌کنند؟

ج) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟

این در با هم برابرند

اختلاف مشترک = شیب خط در معادله خط در دنباله حسابی

$$\begin{pmatrix} 1, 3 \\ 2, 5 \end{pmatrix} \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 2$$



$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ 3 &= 2 \times 1 + n \rightarrow 3 - 2 = n \Rightarrow n = 1 \\ a_n &= 3 + 2(n-1) \\ a_n &= 3 + 2n - 2 \\ a_n &= 2n + 1 \end{aligned}$$

$y = 2x + 1$

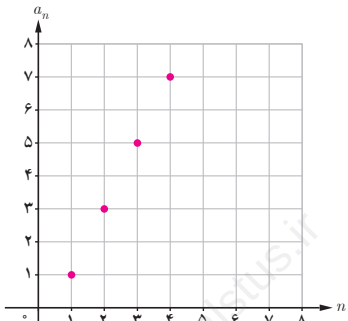
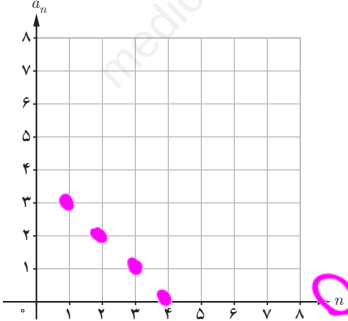
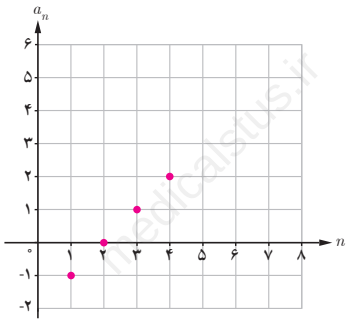
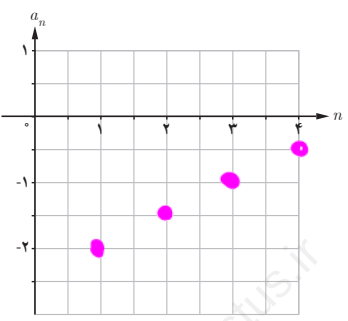
$3, 5, 7, 9, 11, \dots$

$d = 2$

اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.

کار در کلاس

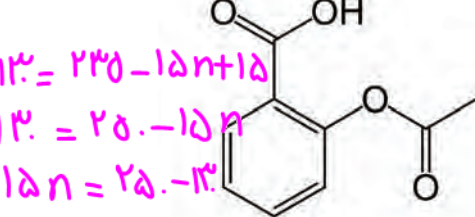
جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	1, 3, 5, 7	
$y = -x + 4$	$a_n = -n + 4$	3, 2, 1, 0	
$y = x - 2$	$a_n = -1 + (n-1) \cdot 1$ $a_n = -1 + n - 1$ $a_n = n - 2$	-1, 0, 1, 2, ... $d = 2 - 1 = 1$	
$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$	$a_n = -2 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$ $a_n = -2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{5}{2}$	$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ $d = -\frac{1}{2} - (-1)$ $d = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$	

فعالیت

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$130 = 235 + (n-1)(-15)$$



$$13 = 235 - 15n + 15$$

$$13 = 250 - 15n$$

$$15n = 250 - 13$$

$$15n = 237$$

$$n = \frac{237}{15} = 15.8$$



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می شود. اگر شخصی که سابقه سکته قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵۰ میلی گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی گرم دارو

در سطح خونس کاهش یابد: $a_1 = 250 - 15 = 235$ $d = -15$

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش ۱۳ میلی گرم می شود؟

ب) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مسئله بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او ۱۳۰ میلی گرم خواهد شد؟

$$a_1 = 425, d = -15, a_n = 130, n = ?$$

کار در کلاس

درآمد کارمندی در یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲,۶۰۰,۰۰۰ تومان است که ۱۰٪ آن به عنوان مالیات کسر می شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانه او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را ۳۰ روزه در نظر بگیرید.)

با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۱۱ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنباله عددی پیروی می کند. بنابراین، اگر a_n میزان دریافتی شخص پس از یک ساعت اضافه کاری باشد، جمله آخر دنباله باید برابر با مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطه $d = 11000, a_n = 2360000, n = ?$

$$2360000 + 11000 = 2371000 = a_1$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$3000000 = 2371000 + (n-1)11000$$

$$3000000 = 2371000 + 11000n - 11000$$

$$3000000 - 2371000 = 11000n - 11000 \rightarrow n = 60$$

$$3000000 \div 11000 = 272.72$$

۱. این داروها را در داروشناسی Zero Order Kinetics می نامند.

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

در فعالیت «محاسبه تعداد چاه‌های قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ چاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, \dots, 29, 29/5, 30$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مقنی در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مقنی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع چاه‌های گفته شده را حفر کند.

الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق چاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمق‌ترین چاه و بار دیگر از کم عمق‌ترین تا عمیق‌ترین چاه با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_{58} &= 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5 \\ S_{58} &= 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30 \\ \hline 2S_{58} &= 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5 \end{aligned}$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

ب) با توجه به اینکه مقنی روزانه ۲ متر چاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/75 = \text{تعداد روز برای پایان کار}$$

بنابراین، مقنی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به دست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع چاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$

کار در کلاس

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به دست آورید.

الف) $199, \dots, 9, 4, 1$

$$d = 9 - 4 = 5$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 199 &= -1 + (n-1)5 \\ 199 &= -1 + 5n - 5 \\ 199 + 6 &= 5n \\ 205 &= 5n \Rightarrow n = \frac{205}{5} = 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_{41} &= \frac{41}{2}(-1 + 199) = \frac{41}{2}(198) = 41 \cdot 99 = 4059 \end{aligned}$$

ب) $a_{n+1} = 5 + a_n, a_1 = -2$ $S_{10} = ?$

$$\begin{aligned} n=1 & \rightarrow a_2 = 5 + a_1 = 5 - 2 = 3 \\ n=2 & \rightarrow a_3 = 5 + a_2 = 5 + 3 = 8 \\ n=3 & \rightarrow a_4 = 5 + a_3 = 5 + 8 = 13 \end{aligned}$$

راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.

$$-2, 3, 8, 13, \dots \quad d = 8 - 3 = 5$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \\ S_{10} &= \frac{10}{2}(2(-2) + (9 \times 5)) = 5(-4 + 45) = 5(41) = 205 \end{aligned}$$

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

$$1, 3, 5, 7, \dots \quad d = 3 - 1 = 2 \quad a_1 = 1$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{30}{2}(2(1) + (29 \times 2)) = 15(2 + 58) = 15(60) = 900 \\ \Rightarrow S_{30} &= 900 \end{aligned}$$

$$a_n = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d = \dots$$

$$S_{n_0} = \dots (a_1 + a_{n_0})$$



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

$$n = ? \quad a_1 = 15 \quad d = 3$$

با توجه به معلوم بودن $S_n = 87$ برای به دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$87 = \frac{n}{2}(2(15) + (n-1)3)$$

با جای گذاری $d = \dots$ در رابطه بالا $n = \dots$ به دست می‌آید.

$$\times 2 \rightarrow 174 = n(30 + 3n - 3)$$

$$174 = n(3n + 27) \Rightarrow \frac{3n^2}{2} + \frac{27n}{2} - \frac{174}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3n^2}{2} + \frac{27n}{2} - 87 = 0$$

$$\begin{aligned} n^2 + 9n - 81 &= 0 \\ n &= 25 \end{aligned}$$

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$

د) $a_{n+1} - a_n = n$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

$555 = -5 + (n-1)8$
 $555 + 5 = 8n - 8$
 $560 + 8 = 8n$
 $568 = 8n$
 $n = 71$

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی

آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)
 $S = \pi r^2$
 $S = \pi \times 12^2 \times 5 = 22608\pi$
 $S = 1.842 \times 10^6$

$a_1 = 3$ $d = 5$ $a_{12} = ?$

$a_{12} = a_1 + 11d = 3 + 11(5) = 3 + 55 = 58$

۵. در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به

مصرف هفتگی به طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟
 $a_1 = 1250$
 $a_6 = a_1 + 5d = 1250 + 5(-1875) = 1250 - 9375 = -8125$

۶. میان دو عدد a و b عدد n را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید

اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{n+1}$ به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۷. براساس رابطه به دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل

$10, 12, 14, 16, 18$
 $+2, +2, +2, +2$

$a_5 - a_1 = 18 - 10$
 $4d = 8$
 $d = 2$

دهند.

۸. مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

۴۰۱ و ۹ و ۵ و ۱ الف

ب) a_n $d = 18 - 19 = -1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$
 $13 = 19 + (n-1)(-1)$
 $13 = 19 - n + 1$
 $\Sigma n = 93 - 13$
 $\Sigma n = 80$
 $n = \frac{80}{2} = 40$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
 $S_{40} = \frac{40}{2}(19 + 13)$
 $= 20(32)$
 $S_{40} = 640$

$$a_1 = 125 \quad a_n = 45 \quad d = -10, \quad n = ?$$



۹. باغداران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 45 = 125 + (n-1)(-10) \\ \Rightarrow 45 = 125 - 10n + 10 \Rightarrow 10n = 125 - 45 \Rightarrow 10n = 80 \Rightarrow n = 8$$

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

$$S_9 = \frac{9}{2}(125 + 45) = \frac{9}{2}(170) = 9 \times 85 = 765 \quad 765 \div 10 = 76.5$$

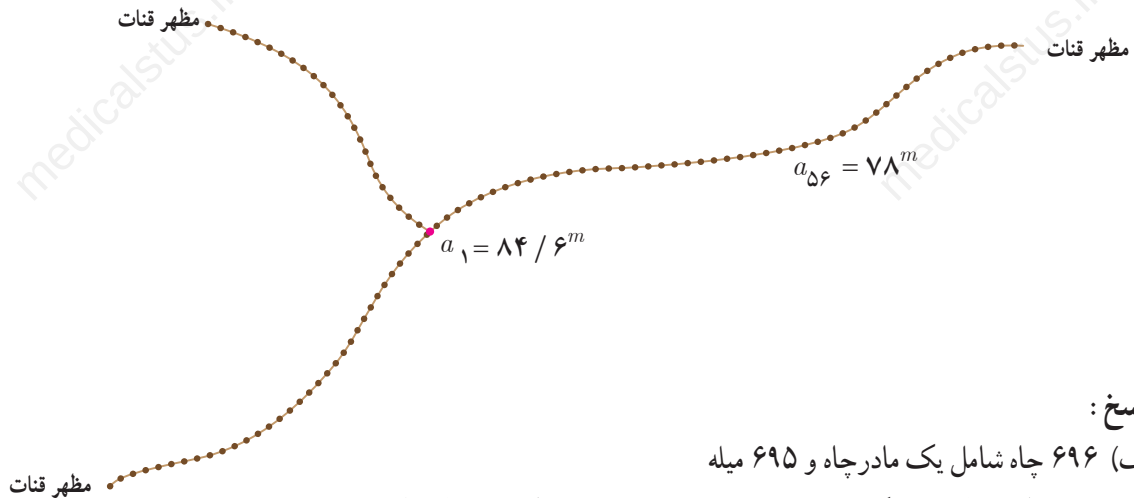
۱۰. ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران — عمق مادرچاه قنات زارچ ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۵۵م) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفرت یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵ هزار تومان باشد، هزینه حفرت چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵ هزار تومان برای حفرت کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه n ام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



پاسخ:

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر ۲۹۸۵۸/۴ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹۴۰۶ متر

ج) ۲۲,۳۵۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

د) ۴۷,۲۰۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

خواندنی

دانستن نیمه عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال:

- در درمان بیماری های عفونی، آنتی بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.
- در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.
- کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص های آرام بخش استفاده می کنند باید در طول روز شاداب و سر حال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

به دنباله هایی از اعداد که هر جمله شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می آید، دنباله هندسی گفته می شود. عدد ثابت را نسبت مشترک^۱ می نامند و عموماً با r نشان می دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن $a \neq 0$ جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{81}, \frac{1}{54}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{16}$	$a_{n+1} = a_n \times \frac{3}{2}$ $a_1 = \frac{1}{81}$	$a_n = \frac{1}{81} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{2}$	$4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) a_n$ $a_1 = 4$	$a_n = 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{5}$	$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$	$a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{5}$ $a_1 = 1$	$a_n = 1 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$
$a_1 = 100$	$r = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	$100, 25, \frac{25}{4}, \frac{25}{16}, \frac{25}{64}$	$a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{4}$ $a_1 = 100$	$a_n = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

۱. Common ratio

$$\begin{aligned}
 & \text{for } n=1, a_1 = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{1-1} = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 100 \times 1 = 100 \\
 & \text{for } n=2, a_2 = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{2-1} = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 100 \times \frac{1}{4} = 25 \\
 & \text{for } n=3, 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{3-1} = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 100 \times \frac{1}{16} = 6.25 \\
 & \text{for } n=4, 100 \left(\frac{1}{4}\right)^{4-1} = 100 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 100 \times \frac{1}{64} = 1.5625
 \end{aligned}$$

۲. با توجه به جدول صفحه قبل، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{(n-1)}$ با فرض $a_1 > 0$:

افزایشی ☐	کاهشی ☒	ثابت ☐	است. ☐
افزایشی ☒	کاهشی ☐	ثابت ☐	است. ☐
افزایشی ☐	کاهشی ☐	ثابت ☒	است. ☐

کار در کلاس

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$ را مشخص کنید.

$$a_{n+1} = a_n \times r, a_1 = a$$

کار در کلاس

(هزینه استهلاک) — شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱٪ ارزش سال پیش آن است. اگر ارزش یخچال فریزر، n سال پس از خرید باشد:

$$x - \frac{1}{100} x = \frac{96}{100} x \rightarrow r = \frac{96}{100} = \frac{96}{100}$$

(الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک ۱٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۶٪ خواهد بود؛ یعنی:

$$v_1 = 960,000, v_2 = 960,000 \times \frac{96}{100} = \dots, v_n = \dots$$

(ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟
با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱٪ کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱٪ آن بیشتر خواهد بود.

$$a_n = 960,000 \left(\frac{96}{100}\right)^{n-1}$$

بنابراین در سال اول بیشترین کاهش ارزش را دارد.

(ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطه v_n را به گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

(د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

$$960,000 < 480,000 \Rightarrow 960,000 \left(\frac{96}{100}\right)^{n-1} < 480,000$$

(راهنمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n < 480,000$ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.)

(ه) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، یا حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه‌عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه‌عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۰/۵ میلی گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

۱. → ۲. → ۳. → ۴. → ۵. → ۶. → ۷. → ۸. → ۹. → ۱۰. → ۱۱. → ۱۲. → ۱۳. → ۱۴. → ۱۵. → ۱۶. → ۱۷. → ۱۸. → ۱۹. → ۲۰. → ۲۱. → ۲۲. → ۲۳. → ۲۴. → ۲۵. → ۲۶. → ۲۷. → ۲۸. → ۲۹. → ۳۰. → ۳۱. → ۳۲. → ۳۳. → ۳۴. → ۳۵. → ۳۶. → ۳۷. → ۳۸. → ۳۹. → ۴۰. → ۴۱. → ۴۲. → ۴۳. → ۴۴. → ۴۵. → ۴۶. → ۴۷. → ۴۸. → ۴۹. → ۵۰. → ۵۱. → ۵۲. → ۵۳. → ۵۴. → ۵۵. → ۵۶. → ۵۷. → ۵۸. → ۵۹. → ۶۰. → ۶۱. → ۶۲. → ۶۳. → ۶۴. → ۶۵. → ۶۶. → ۶۷. → ۶۸. → ۶۹. → ۷۰. → ۷۱. → ۷۲. → ۷۳. → ۷۴. → ۷۵. → ۷۶. → ۷۷. → ۷۸. → ۷۹. → ۸۰. → ۸۱. → ۸۲. → ۸۳. → ۸۴. → ۸۵. → ۸۶. → ۸۷. → ۸۸. → ۸۹. → ۹۰. → ۹۱. → ۹۲. → ۹۳. → ۹۴. → ۹۵. → ۹۶. → ۹۷. → ۹۸. → ۹۹. → ۱۰۰.

$a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_{18} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{17} = 4 \cdot \frac{1}{131072} = \frac{1}{32768}$

$18 \times 4 = 72 = 18 \times 4 = 72$

خواندنی

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به سبب وجود ماده کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازه کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و... می‌گردد. مصرف بیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند، دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند.

یکی از دلایل توصیه پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازه آنهاست.

توجه به نیمه‌عمر ماده کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



کار در کلاس

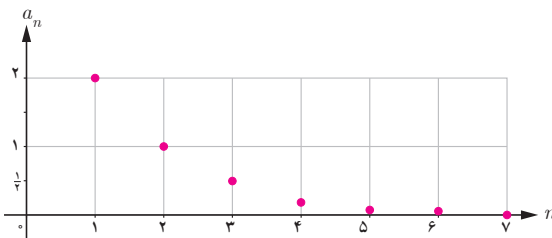
۱. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	a_1 (جمله اول)	r (نسبت مشترک)	S_n مجموع n جمله اول
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^5)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} =$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	$S_4 =$ $S_8 =$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \frac{2}{5}$	$r = \frac{1}{2}$	$S_4 =$ $S_8 =$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	$S_4 =$

۲. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:

الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل S_4 را به دست آورید.



$2, 1, \frac{1}{2}, \dots$ $r = \frac{1}{2}$

$a_n = a_1 r^{n-1} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (ان)

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{2(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}$ (ب)

$\Rightarrow \frac{2(1-\frac{1}{16})}{\frac{1}{2}} = \frac{2(\frac{15}{16})}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \times 15}{16 \times \frac{1}{2}} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

$$\begin{array}{lll} ۱) a_{n+1} = (a_n)^2 & a_1 = \frac{1}{2} & \text{✓۲) } a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2} \\ ۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} & a_1 = 1 & \text{✓۴) } a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1 \end{array}$$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (ب) را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند.

$$a, b, c \Rightarrow r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac$$

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= x(x+3) \\ x^2 + 4x + 4 &= x^2 + 3x \\ x &= -4 \end{aligned}$$

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

$$x - \frac{7}{10}x = \frac{4}{10}x \Rightarrow x = \frac{4}{3} \times 10 = \frac{40}{3}$$

الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا ۱۰ سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

$$\begin{aligned} 10 \times \frac{4}{10} &= 4 \\ a_3 &= a_1 r^2 \\ a_3 &= 4 \times 1.4^2 \\ a_3 &= 4 \times 1.96 \\ a_3 &= 7.84 \end{aligned}$$

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

$$4 \times 1.4^n < 7 \times 10^6 \Rightarrow 1.4^n < 1.75 \times 10^6 \Rightarrow n > \frac{\ln(1.75 \times 10^6)}{\ln(1.4)} \approx 24.3$$

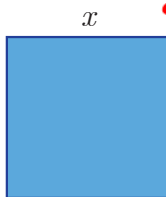
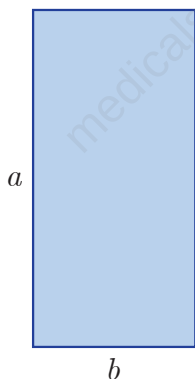
۵. میان دو عدد a و b و n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

$$\frac{a_v}{a_1} = \frac{243}{27} \Rightarrow r^4 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

$$a_v = a_3 \times r^2 = 243 \times 9 = 2187$$

۱. مطابق آمار، سالیانه ده هزار نفر در ایران به سرطان سینه مبتلا می‌شوند (مرکز تحقیقات سرطان دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی). در حال حاضر، حدود ۲۵٪ مبتلایان به علت تشخیص دیررس و تأخیر در شروع درمان جانشان را از دست می‌دهند. تشخیص زودرس در سرطان سینه امکان‌پذیر است و با گنجاندن غربالگری سرطان سینه در نظام بهداشتی کشور و افزایش آگاهی بانوان درباره علائم بیماری می‌توان میزان مرگ و میر ناشی از این بیماری را به طور قابل توجهی کاهش داد.



$x^2 = \text{مساحت مربع}$
 $ab = \text{مساحت مستطیل}$
 $\Rightarrow x^2 = ab$

۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است.

اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های

زیر تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

الف) x و b $b^2 = ax$

ب) x و a $x^2 = ab$

ج) a و x $a^2 = bx$

۸. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو

از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

$$a_1 = a_1 r^5 = 15000 \left(\frac{15}{100}\right)^5 = 2758$$

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدربزرگ و چهار مادر مادربزرگ و ... دارد.

الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)

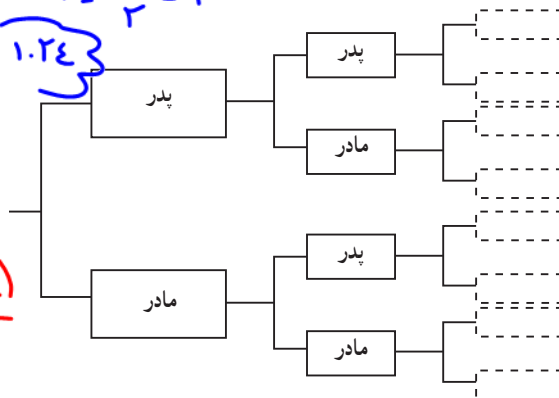
ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟

الف) $2, 4, 8, \dots$ $r = \frac{4}{2} = 2$

$$a_1 = a_1 r^9 = 2 \times 2^9 = 2^{10} = 1024$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{2(1-2^{10})}{1-2} = \frac{2(1-1024)}{-1} = \frac{2(-1023)}{-1} = 2046$$



۱۰. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + 4 + 16 + \dots + 4096$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$
 a_n

$$\frac{1536}{12} \div \frac{254}{34}$$

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع

جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{1536(1-(\frac{1}{4})^n)}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1536(1-\frac{1}{4^n})}{\frac{3}{4}} = \frac{1536 \times 4}{3} (1-\frac{1}{4^n})$$

$1536, 768, \dots, 6$

$a_n = 6, r = \frac{1}{4}, n = ?, a_1 = 1536$

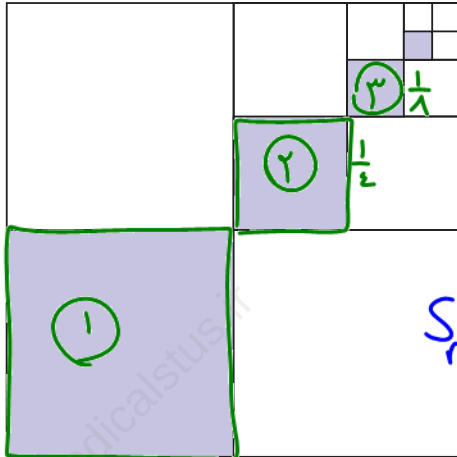
$a_n = a_1 r^{n-1}$

$$\frac{7}{1536} = \frac{1}{1536} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{1536} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 2^{n-1} = 1536 \Rightarrow 2^{n-1} = 2^9 \Rightarrow n-1=9 \Rightarrow n=10$$

$$= \frac{2 \times 1536 \times 0.11}{812} = 3.77$$

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

هوا، از طرف: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع

مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

$$S_6 = \frac{1 - (\frac{1}{2})^6}{2} = 0.9375$$

مساحت مربع اول = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مساحت دوم = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

مساحت سوم = $\frac{1}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{256}$

بازی و ریاضی

مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنباله هندسی تشکیل بدهد.

		۲		۱۸			
	۱/۴				۹		
			۳۲				
		۱۰۰					

دنباله حسابی ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴,

هر جمله منها جمله قبلی = d اختلاف مشترک

جمله nامی (جمله nام) $a_n = a_1 + (n-1)d$

مجموع جمله‌ها $\begin{cases} S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \end{cases}$

$$a_n = -3 + 3(n-1)$$

$$n=1 \rightarrow a_1 = -3 + 3(1-1) = -3 + 3(0) = \boxed{-3}$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = -3 + 3(2-1) = -3 + 3(1) = \boxed{2}$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = -3 + 3(3-1) = -3 + 3(2) = \boxed{7}$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = -3 + 3(4-1) = -3 + 3(3) = \boxed{12}$$

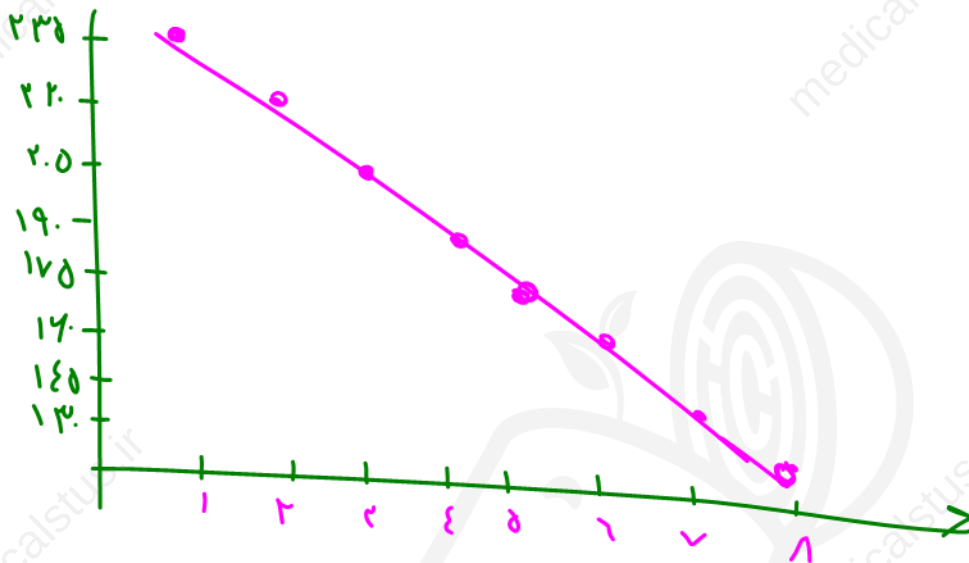
-3, 2, 7, 12,

$$d = 3$$

$$a_{n+1} = a_n + d, a_1 = -3$$

اینها باز می‌نویسند

ع	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
میزان دارو	۲۳۵	۲۲۰	۲۰۵	۱۹۰	۱۷۵	۱۶۰	۱۴۵	۱۳۰



$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n}, a_1 = 2$$

$$\xrightarrow{n=1} a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{n=2} a_3 = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\xrightarrow{n=3} a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$$

$$2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \dots$$

حالت نیست.

$$a_n = \begin{cases} 2 & n \text{ زوج} \\ \frac{1}{2} & n \text{ زوج} \end{cases}$$

رابطه دوضابطه ای

$$a_{n+1} = \Delta a_n + 1, \quad a_1 = -1$$

$$\xrightarrow{n=1} a_2 = \Delta a_1 + 1 = \Delta(-1) + 1 = -2$$

$$\xrightarrow{n=2} a_3 = \Delta a_2 + 1 = \Delta(-2) + 1 = -19$$

$$\xrightarrow{n=3} a_4 = \Delta a_3 + 1 = \Delta(-19) + 1 = -92$$

$$-1, -2, -19, -92, \dots$$

(تبار حساب کنید)

$$a_{19} = 92$$

$$a_{11} = \Delta 2$$

$$a_{20} = a_{19} + 11d = 92 + 11(\Delta) = 92 + 99 = \boxed{191}$$

$$\underbrace{a_{19} - a_{11}}_{1d} = \underbrace{92 - \Delta 2}_{\Delta}$$

$$1d = \Delta$$

$$d = \frac{\Delta}{1} = \boxed{\Delta}$$

$$\frac{r}{\Delta}, \frac{1}{\Delta}, \frac{1}{\Delta}, \dots \quad S_9 = ?$$

$$\left(r = \frac{1}{r} \right)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{r}{\Delta} \left(1 - \left(\frac{1}{r} \right)^9 \right)}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{\frac{r}{\Delta} \left(1 - \frac{1}{\Delta 12} \right)}{\frac{1}{r}}$$

$$= \frac{\frac{r}{\Delta} \left(\frac{\Delta 11}{\Delta 12} \right)}{\frac{1}{r}} = \left(\frac{\frac{r \times \Delta 11}{\Delta \times \Delta 12}}{\frac{1}{r}} \right) = \frac{\cancel{r} \times \cancel{\Delta} \times \Delta 11}{\Delta \times \cancel{\Delta} \times \cancel{12}} = \frac{\Delta 11}{\Delta \times 12} = \frac{\Delta 11}{72}$$

$$a_{n+1} = (a_n)^r, \quad a_1 = \frac{1}{r}$$

$$\xrightarrow{n=1} a_r = (a_1)^r = \left(\frac{1}{r}\right)^r = \frac{1}{r^r}$$

$$\xrightarrow{n=2} a_r = (a_r)^r = \left(\frac{1}{r^r}\right)^r = \frac{1}{r^{r^2}}$$

هندسی نیست $\frac{1}{r}, \frac{1}{r^r}, \frac{1}{r^{r^2}}, \dots$

$$\left(\frac{1}{r}\right)^r = \frac{1}{r} \times \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \neq \frac{1}{r^r}$$

$$a_{n+1} = \frac{r}{n} a_n, \quad a_1 = \frac{1}{r}$$

$$\xrightarrow{n=1} a_r = \frac{r}{r} a_1 = \frac{r}{r} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}$$

$$\xrightarrow{n=2} a_r = \frac{r}{r} a_r = \frac{r}{r} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{r}{r^2}$$

هندسی نیست $\frac{1}{r}, \frac{1}{r}, \frac{r}{r^2}, \dots$

$$\left(\frac{1}{r}\right)^r = \frac{1}{r} \times \frac{r}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \checkmark$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, \quad a_1 = 1$$

$$\xrightarrow{n=1} a_r = \frac{1}{1+a_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{n=2} a_r = \frac{1}{1+a_r} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

هندسی نیست $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \times \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{2}{3}$$

$$a_{n+1} = 2a_n, \quad a_1 = 1$$

$$\xrightarrow{n=1} a_r = 2a_1 = 2(1) = 2$$

$$\xrightarrow{n=2} a_r = 2a_r = 2(2) = 4$$

هندسی نیست $1, 2, 4, \dots$

$$(1)^2 = 1 \times 2$$

$$2 = 2 \checkmark$$