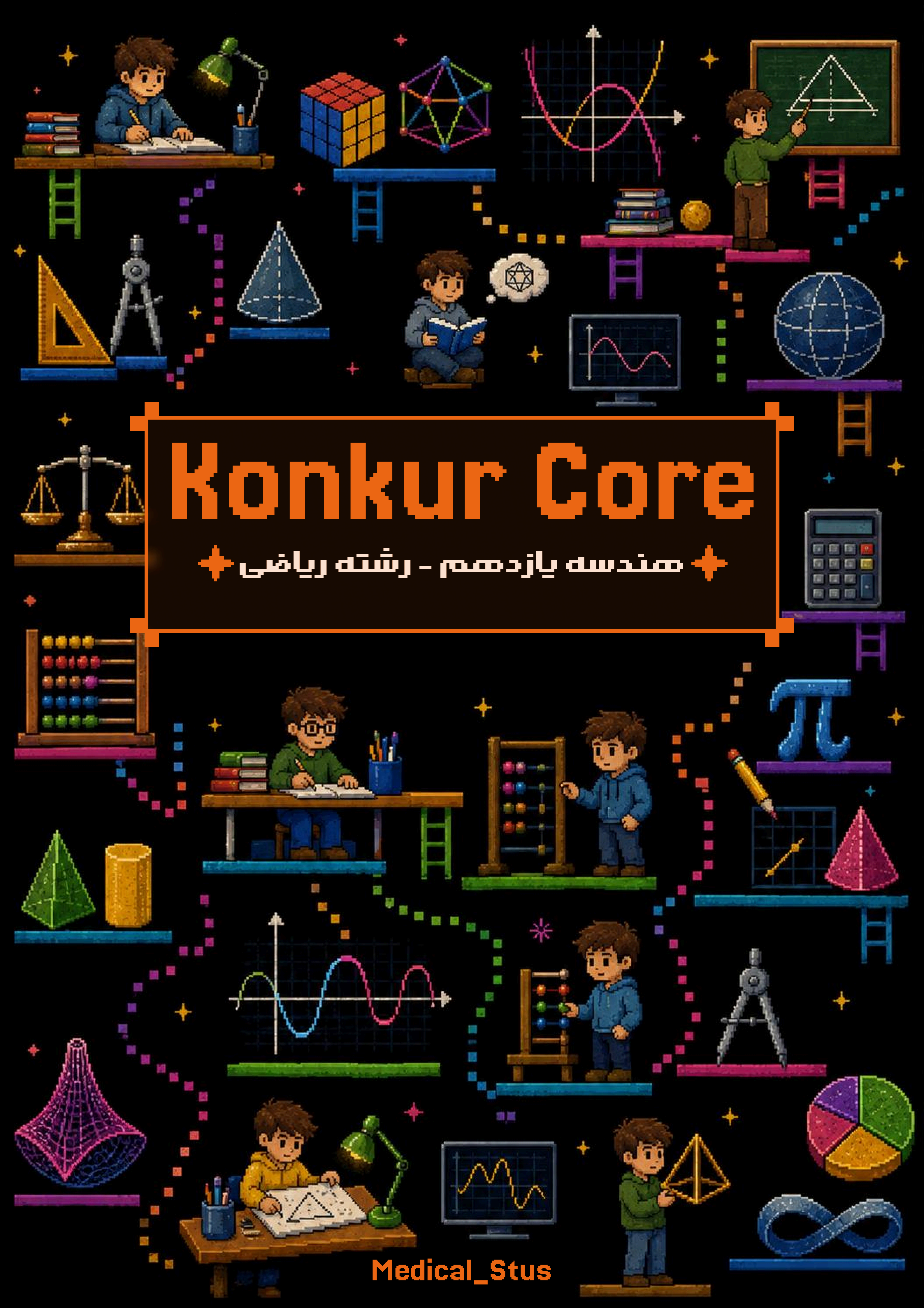


Konkur Core

هندسه یازدهم - رشته ریاضی

Medical_Stus

MEDICAL STUS

خوبیا برمیگرده

طرح های مشاوره

۳ سطح پشتیبانی، متناسب با نیاز تو

MENTORING

برای دانش‌آموزان
خودران و مستقل

- بدون برنامه‌ریزی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- گزارش شبانه
- تماس هفتگی

اگه خودت برنامه می‌ریزی و فقط به همراه مطمئن لازم داری تا ادامه بدی و بهتر بشی، این طرح برای تونه!

TASK PLAN

برای دانش‌آموزان
نیازمند برنامه کامل

- برنامه‌ریزی شخصی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- گزارش شبانه
- تماس هفتگی

اگه می‌خوای از صفر تا صد، با یه برنامه شخصی دقیق و منظم جلو بری و هیچ چیزی رو از دست ندی!

TASK PLAN PRO

برای دانش‌آموزان
با نیاز به پشتیبانی بالا

- برنامه‌ریزی شخصی
- آزمونای مبحثی و کویزای شبانه
- ۲ گزارش در روز
- ۲ تماس در هفته

اگه می‌خوای پیشترین پیگیری و همراهی رو داشته باشی و با قدرت و تمرکز کامل به هدفت برسی!

پشتیبانی واقعی
در کنار تو هستیم تا به هدفت برسی

سیستم آزمونی مداوم با سوالات به روز
سوالات مداوم و به‌روز متناسب با سطح و برنامه‌ات

امکان خروج در صورت کم‌کاری مشاور
اگه عملکرد مشاور رضایت‌بخش نبود، می‌تونی خارج بشی

امکان تغییر مشاور
تغییر مشاور در صورت نیاز، سریع و راحت

با هر طرح مشاوره، اشتراک MEDICAL PLUS با تخفیف ویژه در دسترسه!

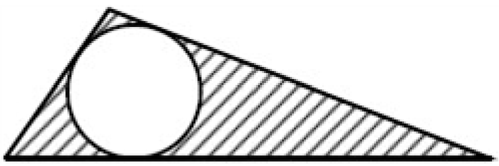
فصل اول : دایره
۶۲ سوال

۱ مماس‌های رسم شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر اندازه شعاع دو دایره ۸ و ۱۵ باشد، فاصله بین مراکز دو دایره کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۶/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۱/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

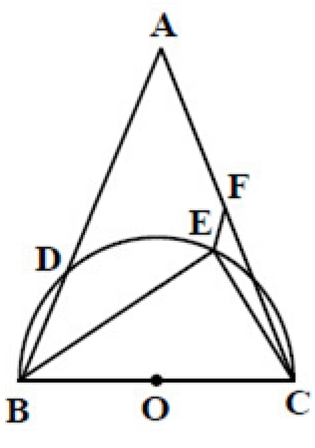
۲ در شکل مقابل، محیط مثلث محیطی $\sqrt{۴۸\pi}$ است. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر ۳ باشد، مساحت مثلث محیطی کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) $\pi + ۳$ ۴) $۱/۵\pi + ۳$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

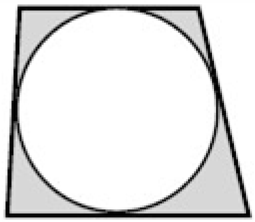
۳ در شکل مقابل، شعاع نیم‌دایره برابر ۴/۵ و $\mathrm{EF} = ۲$ است. اگر $\overset{\frown}{\mathrm{DE}} = \overset{\frown}{\mathrm{EC}}$ و $\frac{۱}{۲} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}}$ باشد، اندازهٔ AB کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

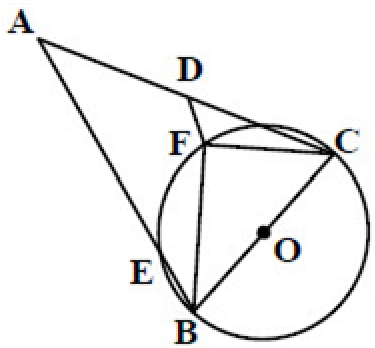
۴) در شکل مقابل، محیط چهارضلعی محیطی $\sqrt{80\pi}$ است. اگر مساحت قسمت سایه‌خورده ۵ باشد، اندازهٔ محیط دایره محاطی کدام است؟



۱) $\sqrt{5\pi}$
۲) $2\sqrt{5\pi}$
۳) $\sqrt{5\pi}$
۴) $2\sqrt{5\pi}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

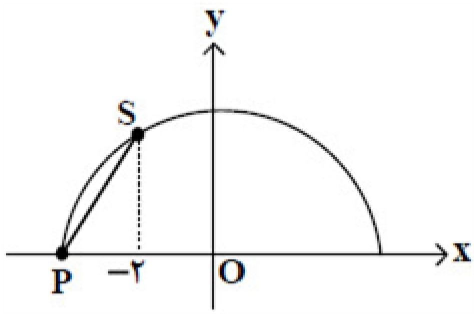
۵) در شکل مقابل، قطر دایره برابر ۷ و $DF = 1$ است. اگر $\overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FC}$ و نقطه D وسط پاره‌خط AC باشد، اندازه AB کدام است؟



۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

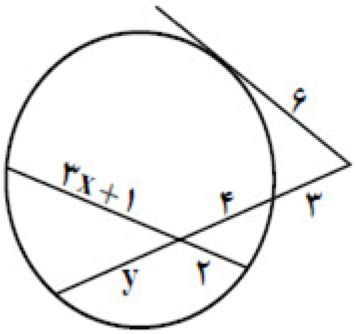
۶) در نیم‌دایرهٔ شکل مقابل، اگر طول وتر PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، عرض نقطه S کدام است؟



۱) $1/5\sqrt{3}$
۲) $2/5\sqrt{2}$
۳) $2\sqrt{3}$
۴) $3\sqrt{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

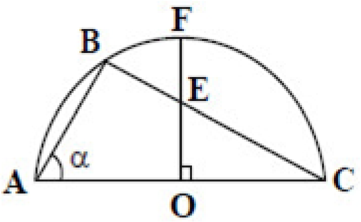
۷) در شکل مقابل، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) ۰/۳　۲) ۰/۴　۳) ۰/۵　۴) ۰/۶

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۸) در نیم‌دایرهٔ مقابل، اگر $\text{Sin}\,\alpha = ۰/۸$ باشد، مقدار $\frac{\text{BE}}{\text{EF}}$ کدام است؟



۱) ۱/۲　۲) ۱/۳　۳) ۱/۴　۴) ۱/۵

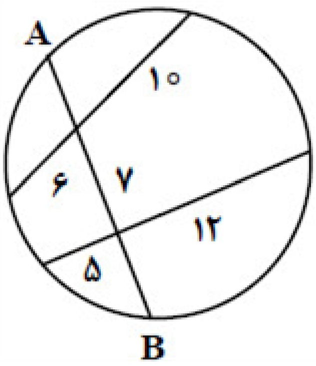
سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۹) مماس‌های رسم شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر شعاع دایره کوچک‌تر ۱/۵ و فاصله بین مراکز دو دایره ۲/۵ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر، کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$　۲) $\sqrt{۵}$　۳) ۳　۴) ۲

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۱۰) در شکل مقابل، طول وتر AB کدام است؟



۱) ۱۶　۲) ۱۷　۳) ۱۸　۴) ۱۹

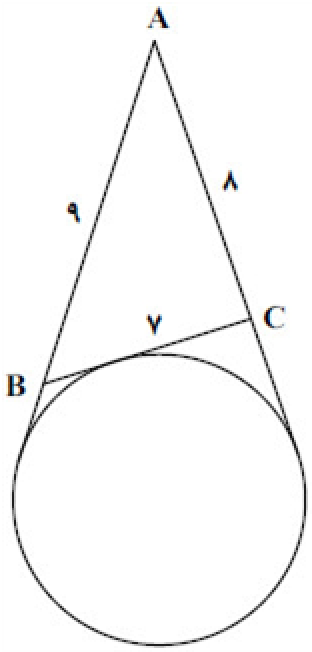
سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۱) چهارضلعی ABCD در یک دایره محاط شده است. رأس‌های این چهارضلعی، رئوس زوایای ظلی واقع بر دایره هستند. مجموع این زاویه‌های ظلی کدام است؟

۱) ۱۸۰　۲) ۵۴۰　۳) ۳۶۰　۴) ۷۲۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲ در شکل مقابل، از نقطهٔ A دو مماس رسم شده است. شعاع دایره کدام است؟



۱) $۷/۲\sqrt{۲}$ ۲) $۴/۸\sqrt{۵}$ ۳) $۳/۶\sqrt{۲}$ ۴) $۲/۴\sqrt{۵}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۳ یک پنج‌ضلعی در یک دایره محاط شده است. هر ضلع این پنج‌ضلعی، وتر رو به یک زاویه محاطی است. مجموع این زوایای محاطی کدام است؟

۱) ۵۴۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۳۶۰

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۱۴ طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره متخارج به‌ترتیب $۲\sqrt{۱۴}$ و $۴\sqrt{۵}$ واحد است. اگر طول خط المرکزین آنها ۹ واحد باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

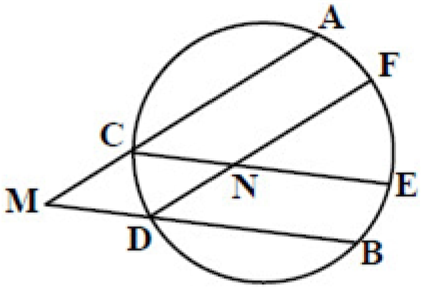
سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۵ دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۵}$ واحد، در ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین، محاط است. اگر اختلاف دو قاعده برابر ۱۶ واحد باشد، طول ساق ذوزنقه، چند واحد است؟

۱) $\frac{۱۹}{۲}$ ۲) $\frac{۲۹}{۲}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۲

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

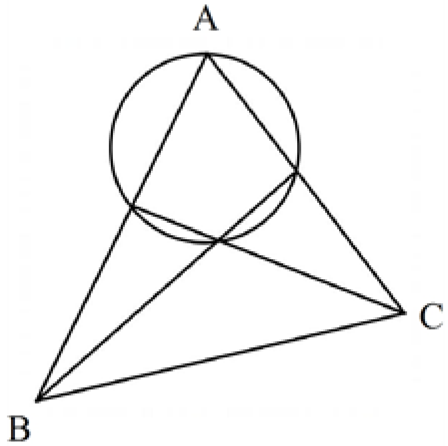
۱۶ در شکل مقابل، $\mathrm{AC} \parallel \mathrm{DF}$، $\mathrm{CE} \parallel \mathrm{BD}$، $\widehat{\mathrm{AC}} = ۸۵^\circ$ و $\widehat{\mathrm{BD}} = ۷۵^\circ$ است. اگر $C\widehat{N}F = ۱۳۵^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{\mathrm{EF}}$ چند درجه است؟



۱) ۴۵
۲) ۴۰
۳) ۳۵
۴) ۳۰

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۱۷ در شکل مقابل، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟



۱) ۹۰
۲) ۷۵
۳) ۶۰
۴) ۴۵

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۸ یک دایره به شعاع ۲، داخل ذوزنقه متساوی‌الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای ذوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$
۲) $\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$
۳) $\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}$
۴) $\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$

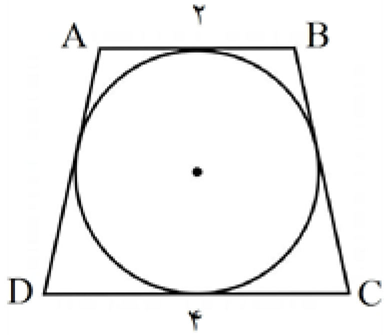
سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۱۹ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ برابر شعاع دایره بزرگ‌تر است. شعاع دایره بزرگ‌تر، چند برابر شعاع دایره کوچک‌تر است؟

۱) ۲
۲) $\frac{۸}{۳}$
۳) ۴
۴) $\frac{۱۶}{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

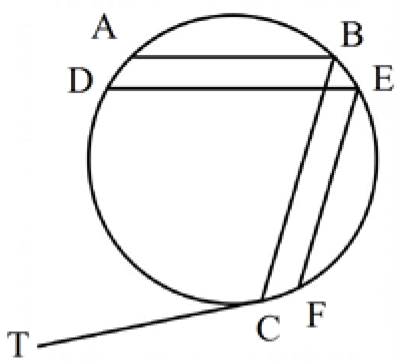
۲۰ در شکل مقابل، ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD، بر دایره‌ای محیط شده است. مساحت این دایره کدام است؟



۱) ۲π ۲) ۴π ۳) ۶π ۴) ۸π

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۱ در شکل مقابل، $DE \parallel AB$ و $BC \parallel EF$ است. اگر $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$، $\overset{\frown}{CD} = ۱۰۰^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۸۰^\circ$ باشد، اندازه $B\hat{C}T$ چند درجه است؟



۱) ۹۰ ۲) ۹۵ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۱۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۲ طول خط المرکزین دو دایره مماس درونی ۳/۵ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۲۱π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک‌تر، چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۷۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۷۵

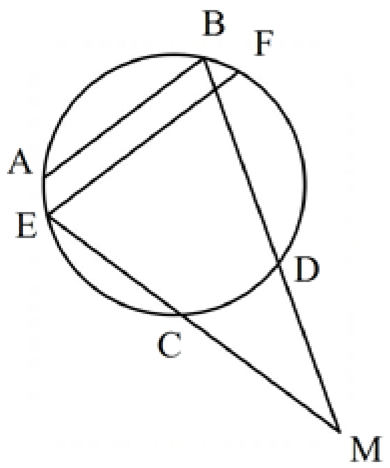
سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۲۳ یک ذوزنقه متساوی‌الساقین با طول قاعده‌های a و ۶ واحد، بر دایره‌ای به مساحت ۱۵π محیط است. مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۲۵}{۳}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{۳۲}{۳}$ ۴) ۱۰

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

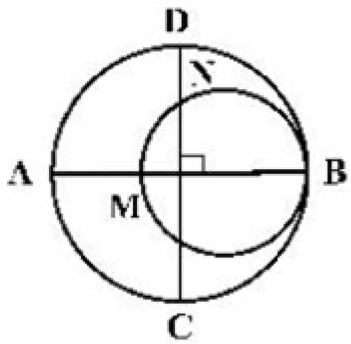
۲۴ در شکل مقابل، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان‌های $\overset{\frown}{AE} = ۱۵^\circ$، $\overset{\frown}{EC} = ۸۰^\circ$ و $\overset{\frown}{FD} = ۱۰۰^\circ$ است. اگر $B\widehat{M}E = ۲۰^\circ$ باشد، اندازه زاویه $A\widehat{B}D$ چند درجه است؟



۱) ۷۱/۲۵ ۲) ۷۴ ۳) ۷۵ ۴) ۷۸/۷۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

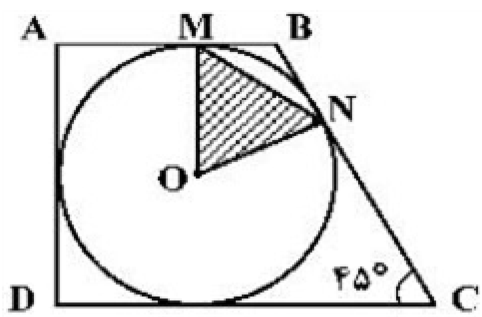
۲۵ در شکل زیر، دو دایره برهم مماس و قطرهای AB و CD از دایره‌ی بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $AM = ۱۶$، $DN = ۱۰$ باشد، شعاع دایره‌ی کوچک‌تر، کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۲۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

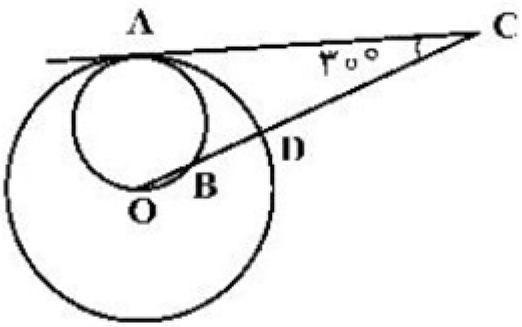
۲۶ مطابق شکل زیر، در ذوزنقه‌ی ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت مثلث OMN، کدام است؟



۱) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۸}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

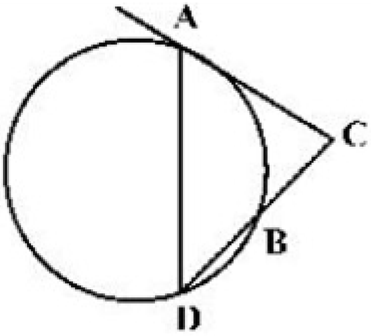
۲۷ در شکل زیر، پاره‌خط AC و دایره‌ی کوچک، در نقطه‌ی A، بر دایره‌ی بزرگ به شعاع ۶ و مرکز O واقع بر محیط دایره‌ی کوچک مماس‌اند. طول پاره‌خط BD، کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

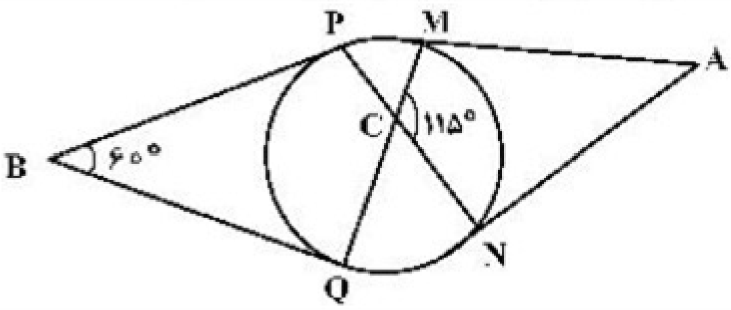
۲۸ در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\mathrm{DB} = \mathrm{BC}$ آن‌گاه نسبت $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}$، کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۹ پاره‌خط های AM، AN، BP و BQ مطابق شکل زیر بر دایره مماس‌اند. زاویه‌ی MAN، به درجه، کدام است؟



۱) ۶۰ ۲) ۶۵ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

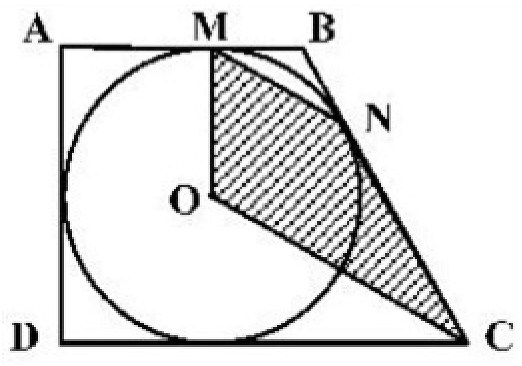
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰ فرض کنید طول خط المرکزین دو دایره با شعاع‌های $۶a - ۱$ و $a^۲ - ۲$، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a، کدام است؟

۱) ۳ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) ۶ ۴) ۷

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

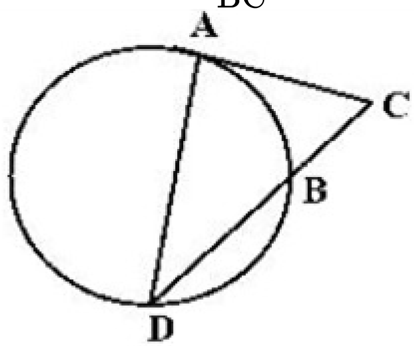
۳۱ مطابق شکل زیر ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است. اگر زاویه‌ی $M\hat{B}N = ۱۲۰^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی OMNC، کدام است؟



۱) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۹\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

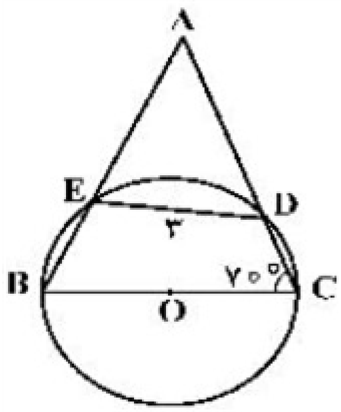
۳۲ در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\sqrt{۳} = \frac{AC}{BC}$، آن‌گاه نسبت $\frac{DB}{BC}$، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

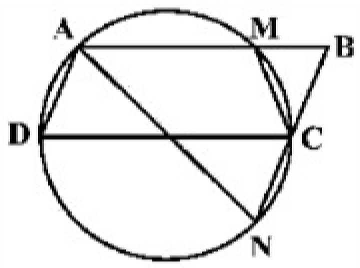
۳۳ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{EDC}$ به درجه، کدام است؟



۱) ۸۰ ۲) ۹۰ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۰

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

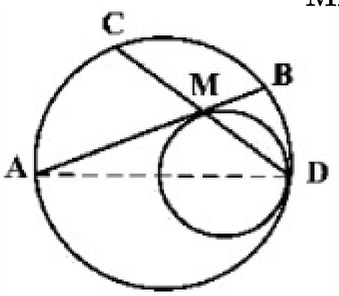
۳۴ در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.
تعداد مثلث‌های متساوی‌الساقین، کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۵ در شکل زیر، دو دایره در نقطه‌ی D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایره‌ی بزرگ‌تر بر دایره‌ی داخل، در نقطه‌ی M، مماس است. نسبت $\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MB}}$، کدام است؟



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

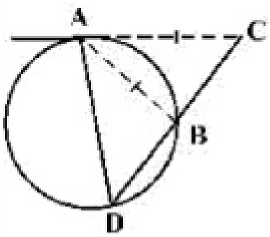
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۶ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با طول قاعده‌های $\frac{۹}{۲}$ و ۸ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است.
فاصله‌ی دورترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده‌ی بزرگ ذوزنقه، کدام است؟

۱) ۹ ۲) $۳+۴\sqrt{۲}$ ۳) ۸ ۴) ۷/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

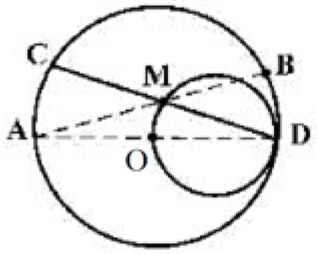
۳۷ در شکل زیر، اندازه‌ی قطعه مماس AC، برابر وتر AB است.
الزاماً کدام برابری درست است؟



۱) $\mathrm{BC}=\mathrm{BA}$ ۲) $\mathrm{BD}=\mathrm{AC}$ ۳) $\mathrm{BC}=\mathrm{BD}$ ۴) $\mathrm{DA}=\mathrm{DC}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۳۸ در شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و طول کمان AC برابر $\frac{۴\pi}{۳}$ است. حاصل $MA \times MB$، کدام است؟



۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۲

سراسری-ریاضی-۹۹

۳۹ پاره‌خط AB به اندازه‌ی ۸ واحد در صفحه‌ی مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟

۱) لوزی ۲) متوازی‌الاضلاع
۳) مستطیل ۴) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین

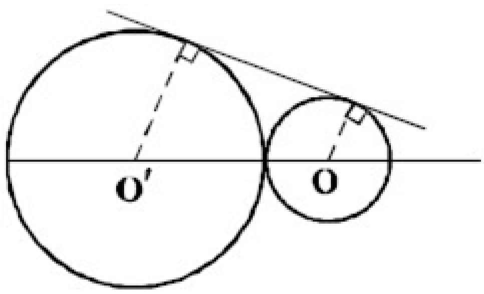
سراسری-ریاضی-۹۹

۴۰ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با قاعده‌هایی به اندازه‌ی ۹ و ۱۶ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده‌ی کوچک ذوزنقه، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

سراسری-ریاضی-۹۹

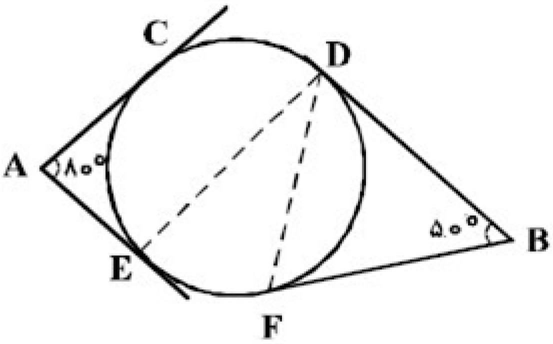
۴۱ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر 'OO با مماس مشترک خارجی در نقطه‌ی M مشترک‌اند. فاصله‌ی M از نقطه‌ی تماس دو دایره، کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۲ در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویه‌ی $E\widehat{D}F$ چند درجه است؟



۱) ۲۵　۲) ۳۰　۳) ۳۵　۴) ۴۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۳ در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهارضلعی، حاصل می‌شود؟

۱) محاطی و محیطی　۲) فقط محاطی　۳) فقط محیطی　۴) نه محاطی و نه محیطی

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۴ در مثلث ABC با اضلاع $AB = ۵$ و $AC = ۷$ و $BC = ۸$ واحد، نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A، نیم‌سازهای زاویه‌ی داخلی و خارجی B را در O و O' قطع می‌کند. اندازه‌ی تصویر قائم OO'، بر روی BC، کدام است؟

۱) ۱　۲) ۱/۵　۳) ۲　۴) ۲/۵

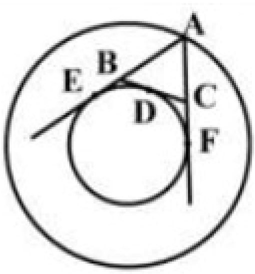
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۵ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، خط گذرا بر رأس A قاعده‌ی BC و دایره محیطی مثلث را در D و E قطع می‌کند. اندازه‌ی $AD.AE$، برابر کدام است؟

۱) $BD.BC$　۲) $CD.CD$　۳) $AC^۲$　۴) $BC^۲$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۶ در دو دایره هم‌مرکز، از نقطه‌ی A روی دایره بزرگ دو مماس AE و AF و از نقطه‌ی D روی کمان کوچک‌تر EF مماس دیگری بر دایره‌ی داخلی رسم شده است. با تغییر مکان A و D کدام بیان در مثلث ABC درست است؟



۱) محیط ثابت - مساحت متغیر　۲) محیط متغیر - مساحت ثابت

۳) محیط ثابت - مساحت ثابت　۴) محیط متغیر - مساحت متغیر

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۷ در مثلث ABC ($AB = AC$)، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = ۶$ و ارتفاع $AH = ۴$ باشد شعاع این دایره، کدام است؟

۱) $۳/۲۵$ ۲) $۳/۵$ ۳) $۳/۷۵$ ۴) $۴/۵$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۸ چهارضلعی ABCD محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچک‌ترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری، همواره درست است؟

۱) $\widehat{C} > \widehat{A}$ ۲) $\widehat{B} < \widehat{A}$ ۳) $\widehat{D} < \widehat{C}$ ۴) $\widehat{D} < \widehat{B}$

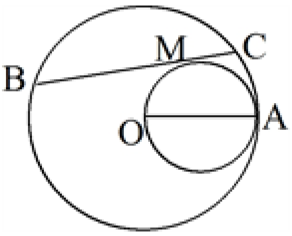
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۹ مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

۱) $۲/۲۵$ ۲) $۲/۵$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

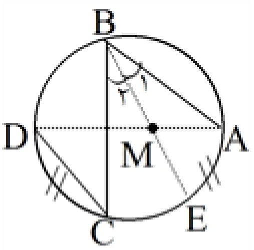
۵۰ در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ ، برابر کدام است؟



۱) $MO^۲$ ۲) $MA^۲$ ۳) $OA^۲$ ۴) $MA.MO$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

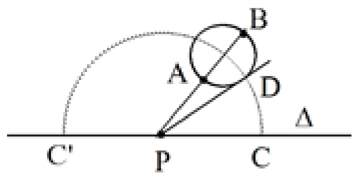
۵۱ در شکل مقابل $AB = ۶, BC = ۸, CD = ۳$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}$ ، اندازه AM کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲/۷۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۲ نقطه‌ی P مرکز نیم‌دایره به قطر $\mathrm{CC'}$ است. شعاع PD مماس بر دایره‌ی مفروض رسم شده است. دایره‌ای که بر دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد و مماس بر خط Δ است، در کدام نقطه بر خط Δ مماس می‌شود؟



۱) C یا C' ۲) بین دو نقطه‌ی C و C' ۳) خارج پاره‌خط $C'C$ ۴) نشدنی

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۳ دو دایره متقاطع در نقطه‌ی A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایره‌ی مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟

۱) MA ۲) محیط ۳) مساحت ۴) زاویه‌ی $B\widehat{M}C$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۴ دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳ و ۹ و ۸، در نقطه‌ی تماس، کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

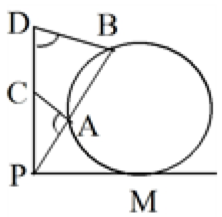
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۵ در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ۶ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه‌ی M و N قطع می‌کند، فاصله‌ی این دو نقطه چند واحد است؟

۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۶ در شکل مقابل $\widehat{\mathrm{PAC}} = \widehat{\mathrm{PDB}}$، $\mathrm{PC} = ۹$ و $\mathrm{CD} = ۷$، اندازه‌ی مماس PM چه‌قدر است؟



۱) ۸ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۷) زاویه‌ی بین خط المرکزین و مماس خارج دو دایره به شعاع‌های ۷/۵ و ۳۰ سانتی‌متر، ۳۰ درجه است. طول خط المرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

۱) ۴۲/۵ ۲) ۴۵ ۳) ۴۷/۵ ۴) ۵۰

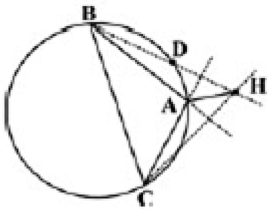
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۸) در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است، نقطه‌ی C در امتداد AB به فاصله‌ی $CB = ۲\sqrt{۲}$ انتخاب شده است. طول قطعه‌ی مماسی که از C بر دایره رسم شود، کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲۰}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) ۷ ۴) $۵\sqrt{۲}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

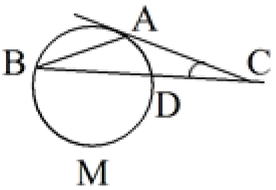
۵۹) در شکل روبه‌رو نقطه‌ی H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است، زاویه‌ی $A\widehat{H}D$، با کدام زاویه برابر است؟



۱) $D\widehat{A}E$ ۲) $A\widehat{B}C$ ۳) $A\widehat{D}H$ ۴) $A\widehat{H}C$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

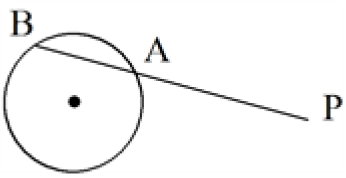
۶۰) در شکل مقابل مماس AC بر دایره‌ی با وتر AB از دایره برابرند اگر کمان $\overset{\frown}{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد زاویه‌ی C چند درجه است؟



۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۱) فاصله‌ی نقطه‌ی P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی PA چند برابر شعاع دایره است؟



۱) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۱} - ۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳} - ۱)$ ۳) $(\sqrt{۱۱} - ۲)$ ۴) $(\sqrt{۱۳} - ۲)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۲ در مثلث ABC ، داریم $\widehat{B}=۵۰^\circ$ و $\widehat{C}=۶۰^\circ$ نیم‌ساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع‌اند. زاویه $\widehat{MBC}$ چند درجه است؟

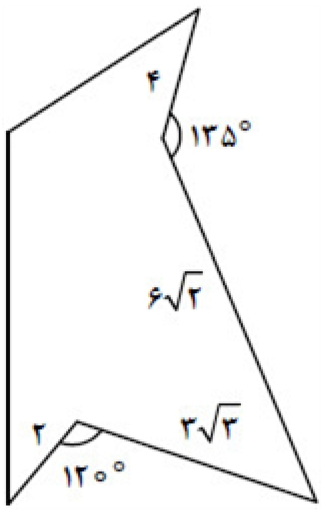
۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

فصل دوم : تبدیل های هندسی

۱۹ سوال

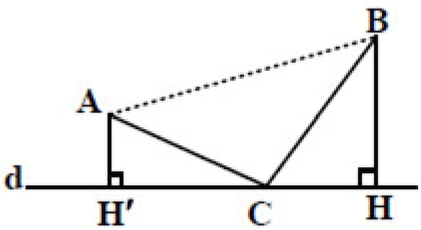
۶۳ میزان افزایش مساحت شکل مقابل، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟



۱) ۱۶/۵ ۲) ۱۹/۵ ۳) ۳۳ ۴) ۳۹

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

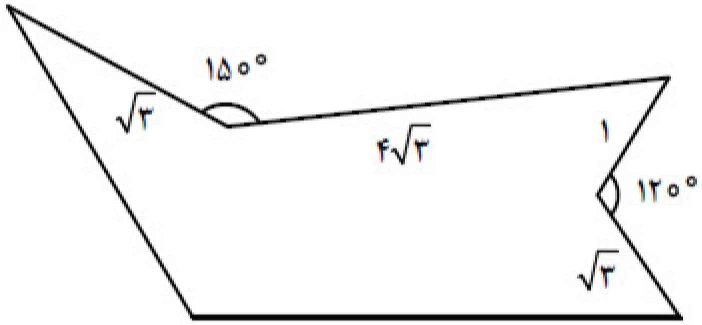
۶۴ در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A و B از خط d به ترتیب، ۴ و ۶ واحد است و نقطه C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کمترین باشد. اگر مساحت چهارضلعی $ABHH'$ برابر $۵۰\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ CH کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۶\sqrt{۳}$ ۳) $۸\sqrt{۳}$ ۴) $۱۰\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

۶۵ میزان افزایش مساحت شکل مقابل، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟



۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) ۷/۵ ۴) ۴/۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۶۶ در کدام تبدیل، همواره جهت شکل حفظ نمی‌شود؟

۱) بازتاب ۲) دوران ۳) انتقال ۴) تجانس

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۶۷ در بین مثلث‌هایی با مساحت ۳۰ واحد مربع که در ضلعی به اندازه ۱۵ واحد مشترک هستند، کمترین مقدار محیط کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

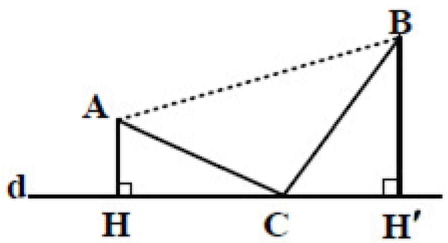
سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۸ در مربع $ABCD$، نقطه $(۴,۱)$ رأس A و عرض رأس‌های C و D به‌ترتیب ۱ و ۳ است. اگر بازتاب نقطه C نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۱۳}$ ۳) $\sqrt{۱۷}$ ۴) $\sqrt{۷}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۹ در شکل مقابل، فاصله نقاط A و B از خط d، به ترتیب، $۲\sqrt{۳}$ و $۵\sqrt{۳}$ واحد است و نقطه C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کمترین باشد. اگر مساحت مثلث ACH برابر $۶\sqrt{۳}$ باشد، اندازه HH' کدام است؟



۱) ۱۵ ۲) ۱۸ ۳) ۲۱ ۴) ۲۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۰ پاره‌خط AB به طول ۵ در یک طرف خط d قرار دارد. فاصله دوسر پاره‌خط AB از خط d به ترتیب ۱ و ۵ است. نقطه C طوری روی خط d انتخاب می‌شود که محیط مثلث ABC کمترین مقدار باشد، حداقل مجموع اندازه‌های دو ضلع AC و BC کدام است؟

۱) $\sqrt{۵۷}$
۲) $\sqrt{۶۵}$
۳) $۳\sqrt{۵}$
۴) $۴\sqrt{۶}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۱ در مربع ABCD، نقطه $(۶,۲)$ رأس C و عرض رأس‌های A و D به‌ترتیب ۲ و ۱- است. اگر بازتاب نقطه A نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات، چقدر است؟

۱) $\sqrt{۳۴}$
۲) $\sqrt{۱۰}$
۳) $۲\sqrt{۱۰}$
۴) $۲\sqrt{۱۷}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۲ در مربع ABCD، نقطه $(۳,۵)$ رأس B و طول رأس‌های C و D به‌ترتیب ۵/۵ و ۳ است. اگر بازتاب نقطهٔ D نسبت به محور xها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطهٔ C نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات چقدر است؟

۱) ۲/۵
۲) $\sqrt{۶/۵}$
۳) $\sqrt{۶}$
۴) ۲

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۳ مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AT}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) قرار دارد، انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت اولیه باشد، اندازه بردار $\overrightarrow{AT}$، کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) $\frac{۱}{۳}$
۴) $\frac{۱}{۴}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۴ چهار نقطه‌ی $A(۱,۱۰)$، $B(۹,-۹)$، $M(a,۴)$ و $N(a,۰)$ را در صفحه‌ی مختصات، درنظر بگیرید. کم‌ترین اندازه‌ی خط شکسته‌ی AMNB، کدام است؟

۱) ۲۱
۲) ۲۰
۳) ۱۹
۴) ۱۸

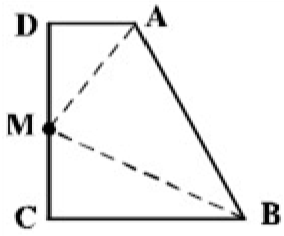
سراسری-ریاضی-۹۹

۷۵ چهار نقطه‌ی $A(۱,۳)$، $B(۱۵,۹)$، $M(a,۰)$ و $N(a+۵,۰)$ در صفحه‌ی مختصات مفروض‌اند. کم‌ترین اندازه‌ی خط شکسته‌ی AMNB، کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۶ در ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ی ABCD، اندازه‌های $CB = CD = ۶$ و $AD = ۲$ هستند، نقطه‌ی M روی ساق قائم CD متحرک است. کم‌ترین مقدار $MA + MB$، کدام است؟



۱) ۱۰ ۲) ۱۰/۵ ۳) ۱۱ ۴) ۱۱/۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۷ در رسم بزرگ‌ترین مربع ممکن داخل مثلث ABC، به طوری‌که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد. از کدام تبدیل هندسی، استفاده می‌شود؟

۱) انتقال ۲) تجانس ۳) بازتاب ۴) دوران

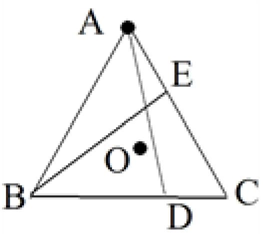
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۸ معادله‌ی تصویر خط $۲y + x = ۶$، تحت تجانس به مرکز $O'(۲,۱)$ و نسبت تجانس $\frac{۳}{۲}$، کدام است؟

۱) $y + ۲x = ۲$ ۲) $۲y + x = ۷$ ۳) $۲y + x = ۹$ ۴) $۳y + x = ۹$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۹ نقطه‌ی O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $BD = CE$ ، کدام بیان نادرست است؟



۱) $OE = OD$ ۲) $OD \perp BE$ ۳) $E\hat{O}D = ۱۲۰^\circ$ ۴) $A\hat{O}C = ۱۲۰^\circ$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۰ دو خط متقاطع d و 'd و پاره‌خط AB در صفحه آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) دوران ۴) تجانس

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۱ نقطه‌ی A و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده بر روی هریک از این دایره‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به‌کار می‌رود؟

۱) بازتاب ۲) انتقال ۳) تجانس ۴) دوران

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

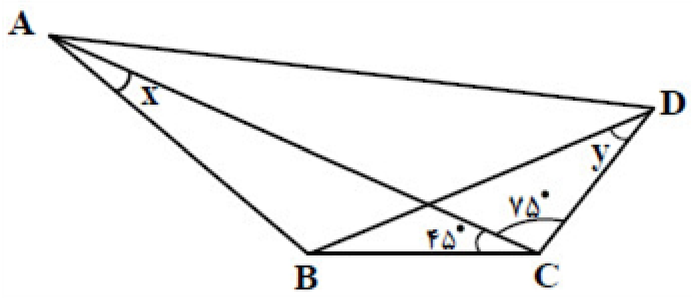
فصل سوم : روابط طولی در مثلث — ۳۲ سوال

۸۲ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ به‌ترتیب نیمساز زوایای $A\widehat{M}C$ و $A\widehat{M}B$ هستند. اگر $\text{AP}=\sqrt{۵}$، $\text{CP}=۳\sqrt{۵}$ و $\text{MP}=\sqrt{۳۳}$ باشند، طول MQ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۵}$ ۴) $\sqrt{۳}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

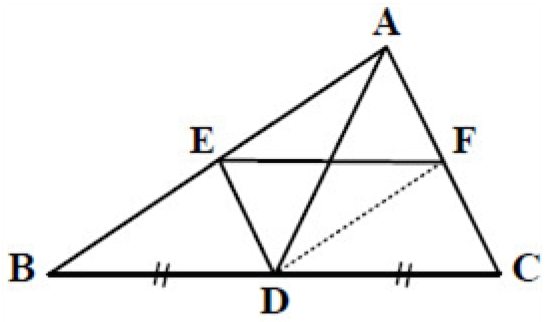
۸۳ در شکل مقابل، اگر $A\widehat{D}B=B\widehat{A}D$ و $x+y=۹۰^\circ$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

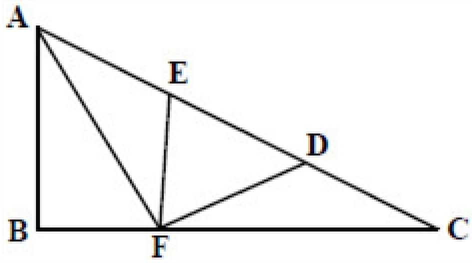
۸۴ در مثلث ABC، DE نیمساز زاویهٔ $A\widehat{D}B$ و $\text{EF} \,||\, \text{BC}$ است. اگر $\text{AC}=۸$، $\text{BC}=۱۴$ و $\text{AD}=۳$ باشد، اندازهٔ DF کدام است؟



۱) $\sqrt{۷}$ ۲) $۰/۹\sqrt{۷}$ ۳) $۰/۵\sqrt{۲۱}$ ۴) $۰/۶\sqrt{۲۱}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

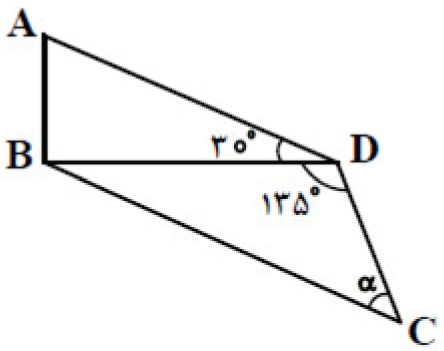
۸۵ در مثلث شکل مقابل، نقاط D و E ضلع AC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و مثلث EFD، متساوی‌الاضلاع است. اگر $\frac{۲}{۳} = \frac{AF}{BC}$ و $AB = ۳\sqrt{۳}$ باشد، طول FC کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) $۶\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴تیرماه

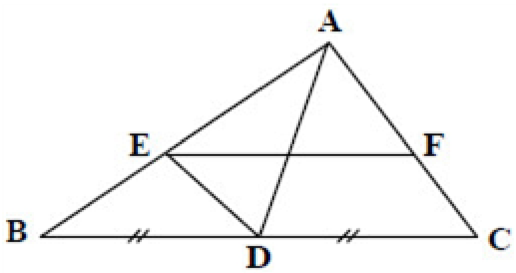
۸۶ در شکل مقابل، اگر $\frac{۲}{۳} = \frac{AB}{BC}$ و زاویه $A\widehat{B}C = ۱۰۵^\circ$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

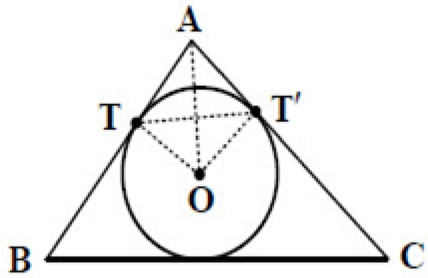
۸۷ در مثلث ABC، $EF \parallel BC$ و $A\widehat{D}E = B\widehat{D}E$ است. اگر $AC = ۷$، $BC = ۱۰$ و $AD = ۳$ باشد، طول نیمساز زاویهٔ $A\widehat{D}C$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱۹}{۸}$ ۳) $\frac{۱۷}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۸}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۸ در مثلث محیطی شکل مقابل، اضلاع $\mathrm{AB}=۴$ و $\mathrm{AC}=۵$ به ترتیب در نقاط T و T' بر محیط دایره محاطی، مماس هستند. اگر $\mathrm{BC}=۷$ باشد، اندازهٔ وتر TT' کدام است؟



۱) $۰/۲\sqrt{۱۵}$ ۲) $۰/۴\sqrt{۱۵}$ ۳) $۰/۲\sqrt{۵}$ ۴) $۰/۴\sqrt{۵}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۸۹ نقطهٔ A' تصویر نقطهٔ A در بازتاب نسبت به خط d و نقطهٔ O روی خط d قرار دارد. اگر $\mathrm{OA}'=۱۰$ و فاصله نقطهٔ A' از خط OA برابر $۹/۶$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای AA' کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۲۲ ۳) ۲۰ ۴) ۱۴

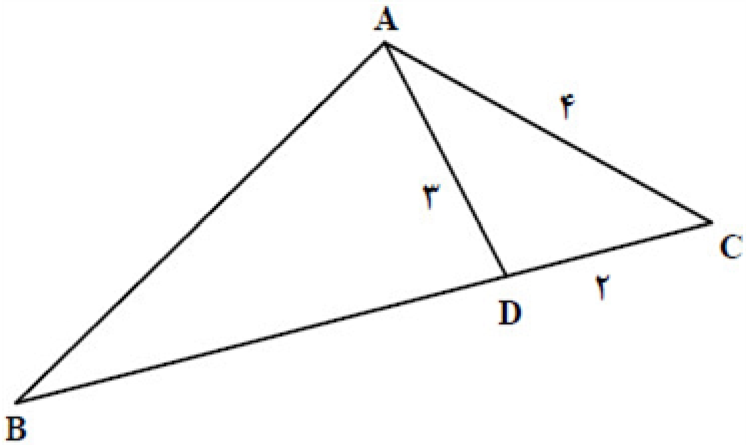
سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۹۰ در مثلث ABC، $\mathrm{BC}=۱۰$، نقطه D وسط BC و DE و DF به‌ترتیب نیمساز زوایای $A\widehat{D}C$ و $A\widehat{D}B$ هستند. اگر $\mathrm{AF}=۱۲\sqrt{۲}$ و $\mathrm{BF}=۳\sqrt{۲}$ باشد، طول نیمساز DE کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $۲\sqrt{۷}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

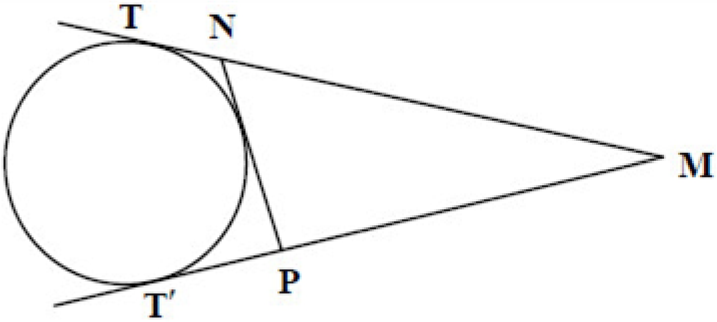
۹۱ در شکل مقابل، اگر $B\widehat{A}D=۳D\widehat{A}C$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۱) ۲۴ ۲) $۲۵/۵$ ۳) ۲۷ ۴) $۲۸/۵$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

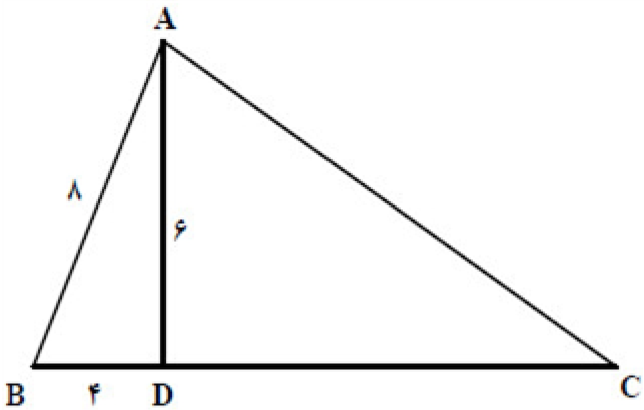
۹۲ در شکل زیر، از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر $MT = ۱۸$، $MN = ۱۵$ و $MP = ۱۲$ باشد، شعاع دایره کدام است؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) $۴\sqrt{۵}$
۴) $۶\sqrt{۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۳ در شکل مقابل، اگر $D\widehat{A}C = ۳B\widehat{A}D$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟



۱) ۱۹/۲
۲) ۱۶/۸
۳) ۱۸/۶
۴) ۱۵/۴

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۹۴ نیمساز داخلی زاویه A در مثلث ABC، ضلع مقابل را به پاره‌خط های ۳/۵ و ۲/۵ واحدی تقسیم کرده است. اگر اندازه زاویه C برابر ۶۰ درجه باشد، ضلع کوچک‌تر مثلث چند واحد است؟

۱) ۳/۷۵
۲) ۴/۲۵
۳) ۴/۷۵
۴) ۵/۲۵

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۹۵ نیمساز زاویه A در مثلث ABC، ضلع مقابل را در نقطه D قطع کرده و آن‌را به پاره‌خط های $\frac{۵}{۴}$ و $\frac{۷}{۴}$ واحدی تقسیم کرده است. اگر $\widehat{B} = ۶۰^\circ$ باشد، طول AD چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۷}$
۲) $\frac{۵}{۸}\sqrt{۷}$
۳) $\frac{۵}{۸}\sqrt{۲}$
۴) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۲}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۹۶ اضلاع مثلثی با اعداد ۴، ۵ و ۶ متناسب است. نیمساز زاویه متوسط را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$
۲) ۲
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۷ زاویه‌ی $x\hat{O}y$ و نقطه‌ی M داخل زاویه با شرط $2M\hat{O}y = x\hat{O}M$ باشد، مفروض است. از نقطه‌ی M عمودهای MN و MP را به ترتیب برنیم‌خط های Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$، کدام است؟

۱) $\frac{OP}{ON}$ ۲) $\frac{OP}{OM}$ ۳) $\frac{۲OP}{ON}$ ۴) $\frac{۲OP}{OM}$

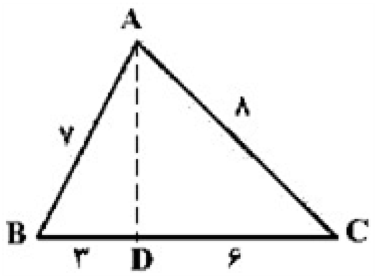
سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۹۸ مثلثی با طول ضلع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ مفروض است. اندازه‌ی طول ضلع شش‌ضلعی محاط شده در این مثلث، کدام است؟

۱) ۸ ۲) $\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

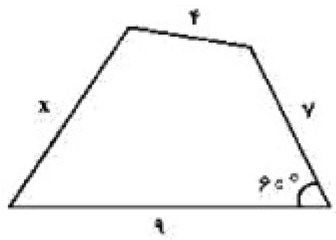
۹۹ در شکل زیر، اندازه‌ی پاره‌خط AD، کدام است؟



۱) $\sqrt{۳۷}$ ۲) ۶ ۳) $۲\sqrt{۷}$ ۴) $۲\sqrt{۱۰}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

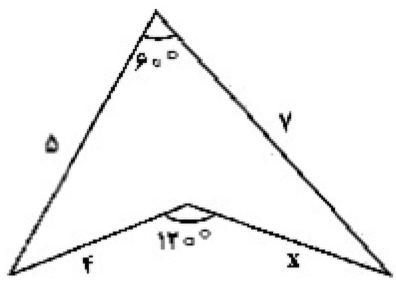
۱۰۰ چهارضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است. $(x+۲)$ کدام است؟



۱) $\sqrt{۵۱}$ ۲) $\sqrt{۵۵}$ ۳) $\sqrt{۵۷}$ ۴) $\sqrt{۵۹}$

سراسری-ریاضی-۹۹

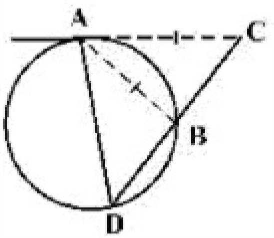
۱۰۱ در شکل زیر، مقدار $(x+۲)$، کدام است؟



۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

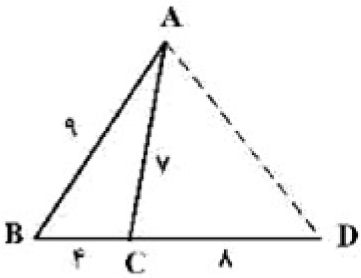
۱۰۲) در شکل زیر، اندازه‌ی قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟



۱) $BC = BA$
۲) $BD = AC$
۳) $BC = BD$
۴) $DA = DC$

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۰۳) در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی پاره‌خط AD، کدام است؟



۱) ۹
۲) $۳\sqrt{۱۰}$
۳) ۱۰
۴) $۶\sqrt{۳}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۰۴) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، زاویه‌ی $A = ۹۰^\circ$ و اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. ارتفاع AH و نیم‌ساز AD رسم شده است. اندازه‌ی DH، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۳۵}$
۲) $\frac{۹}{۳۵}$
۳) $\frac{۱۲}{۳۵}$
۴) $\frac{۱۶}{۳۵}$

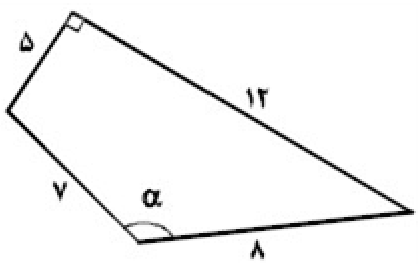
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۵) در مثلث ABC داریم $AB = AC = ۱۷$ و $BC = ۱۶$، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم شود، در نقطه‌ی D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط BD، کدام است؟

۱) $۷/۲$
۲) $۸/۴$
۳) $۹/۶$
۴) $۱۰/۲$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۶) در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند، $\text{Sin}\,\alpha$ کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۵}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۴}{۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۷ در مثلثی به طول اضلاع ۱۵ و ۱۳ و ۷ واحد، نقطه‌ی تلاقی نیم‌سازهای درونی، نیم‌ساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۸ در مثلث ABC داریم $AB = ۳AC$ و $BC = ۱۲$ ، نقاط D و D' پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A است. مقدار $AD^۲ + AD'^۲$ ، کدام است؟

۱) ۶۴ ۲) ۷۲ ۳) ۸۱ ۴) ۱۰۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۹ در مستطیلی به ابعاد ۴ و ۳ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در N و M قطع می‌کند، اندازه‌ی MN چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

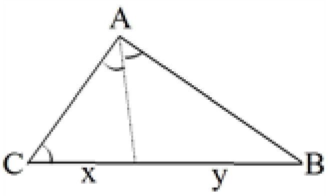
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۰ در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

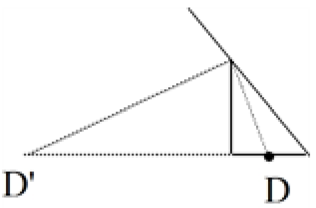
۱۱۱ در مثلث ABC داریم: $AB = ۹$, $AC = ۷$ و $\widehat{A} = ۲\widehat{C}$، اندازه‌ی BC کدام است؟



۱) ۱۲ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۲ در مثلثی به اضلاع ۸، ۶ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل را در D و D' قطع می‌کنند. اندازه‌ی DD' چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۱۹۵}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱۰۲}{۷}$ ۳) $\frac{۱۲۰}{۷}$ ۴) $\frac{۱۲۴}{۷}$

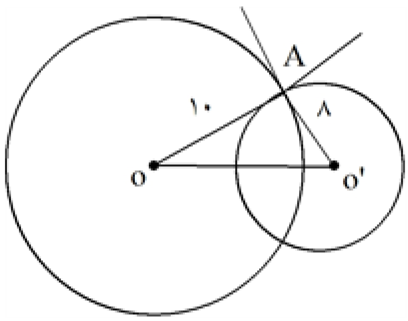
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۳ اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط آن را رسم می کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۵}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مراکز o و o' یعنی A بر هم عمودند. پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث oAo' که قائم‌الزاویه است. می‌نویسیم:



$$\overset{\triangle}{oAo'} : oo'^{۲} = oA^{۲} + o'A^{۲} = ۸^{۲} + ۱۵^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow oo' = ۱۷$$

(توجه کنید خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است به همین علت هر کدام از این مماس‌ها از مرکز دایرهٔ دیگر عبور می‌کند.)

۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محیط مثلث $\sqrt{۴۸\pi}$ یعنی $۴\sqrt{۳\pi}$ است. اگر r شعاع دایره محاطی باشد داریم: $r = \frac{S}{P}$

از طرف دیگر مساحت مثلث برابر ۳ به اضافه مساحت دایره است. بنابراین:

$$r = \frac{۳ + \pi r^{۲}}{۲\sqrt{۳\pi}} \Rightarrow ۲\sqrt{۳\pi}r = ۳ + \pi r^{۲} \Rightarrow \pi r^{۲} - ۲\sqrt{۳\pi}r + ۳ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{۳})^{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{\pi}}$$

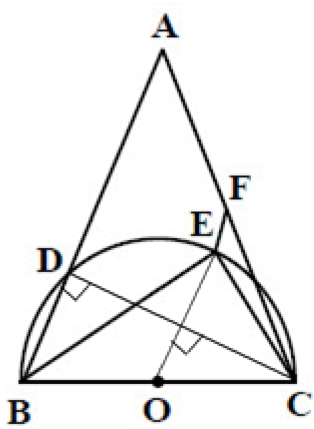
$$\text{مساحت مثلث} = ۳ + \pi r^{۲} = ۳ + \pi\left(\frac{۳}{\pi}\right) = ۶$$

۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از C به D وصل می‌کنیم. زاویهٔ D محاطی روبه‌رو به قطر است پس $\widehat{D} = ۹۰^\circ$. از طرف دیگر از مرکز O به نقطهٔ E وسط کمان DC وصل می‌کنیم در این صورت OE بر وتر DC عمود خواهد شد. بنابراین دو خط OE و AB هر دو بر DC عمودند. بنابراین $OE \| AB$.

در ضمن نقاط O و F وسط دو ضلع مثلث ABC هستند. پس بنابر عکس قضیهٔ تالس $OF \| AB$. در نتیجه نقاط O، E و F روی یک خط موازی با AB قرار دارد، داریم. پس:

$$R = OE = ۴/۵ \Rightarrow OF = OE + EF = ۴/۵ + ۲ = ۶/۵$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : OF \| AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{AC} = \frac{OF}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۶/۵}{AB} \Rightarrow AB = ۱۳$$



۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم r شعاع دایره محاطی باشد.

$$۲P = \sqrt{۸۰\pi} \Rightarrow ۲P = ۴\sqrt{۵\pi} \Rightarrow P = ۲\sqrt{۵\pi}$$

در ضمن مساحت قسمت سایه زده مساوی مساحت چهارضلعی منهای مساحت دایره است. پس:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{۵ - \pi r^{۲}}{۲\sqrt{۵\pi}} \Rightarrow ۲\sqrt{۵\pi}r = ۵ - \pi r^{۲} \Rightarrow \pi r^{۲} + ۲\sqrt{۵\pi}r - ۵ = ۰$$

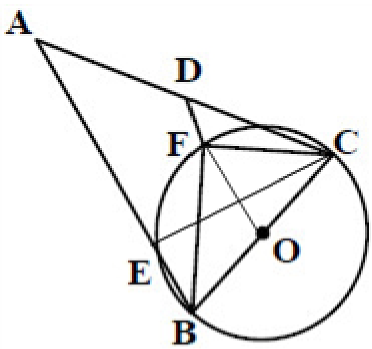
$$\Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{۵})^{۲} = ۰ \Rightarrow r = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{\pi}}$$

بنابراین: $\text{محیط دایره} = ۲\pi r = ۲\pi\left(\frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{\pi}}\right) = ۲\sqrt{۵\pi}$

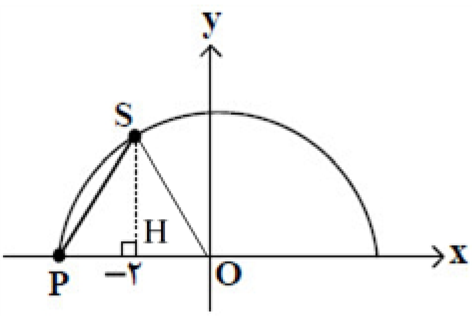
۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از O به F وصل می‌کنیم چون F وسط کمان $\overset{\frown}{EC}$ قرار دارد پس OF بر وتر CE عمود می‌شود.
از طرف دیگر زاویهٔ $\widehat{E}$ محاطی روبه‌رو به قطر BC است پس $\widehat{E} = ۹۰^{\circ}$. بنابراین OF و AB هر دو بر CE عمودند پس $OF \parallel AB$.
در ضمن در مثلث ABC نقاط O و D وسط اضلاع BC و AC هستند پس بنابر عکس قضیهٔ تالس $OD \parallel AB$. بنابراین نقاط O و F و D روی یک خط موازی AB هستند. داریم:

$$\left.\begin{aligned} OF = R = \frac{۷}{۲} \\ DF = ۱ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} OD = \frac{۷}{۲} + ۱ = \frac{۹}{۲}$$

$$\overset{\triangle}{ABC} : OD \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{۹}{۲}}{AB} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AB = ۹$$



۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطهٔ S وصل می‌کنیم در این صورت $PS = OS = OP = R$ یعنی مثلث OPS متساوی‌الاضلاع است. پس ارتفاع SH میانه هم هست. در نتیجه $R = OP = ۴$ بنابراین:



$$SH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}OP = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۴) = ۲\sqrt{۳}$$

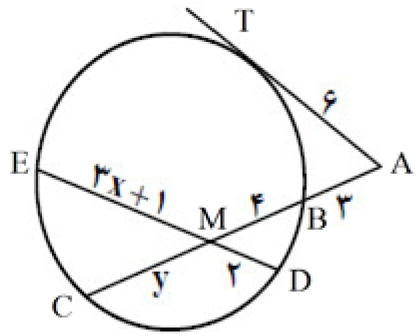
پس عرض نقطهٔ S برابر $۲\sqrt{۳}$ است.

۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از روابط طولی در دایره می‌نویسیم.

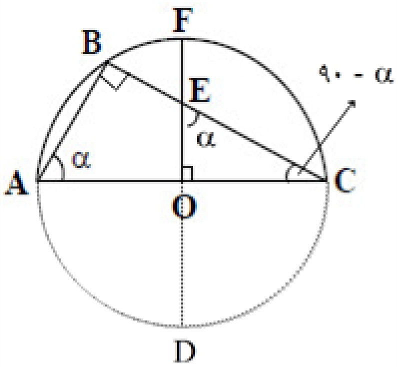
$$\mathrm{AT}^{۲} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \Rightarrow ۶^{۲} = ۳(۳+۴+y) \Rightarrow y = ۵$$
$$\mathrm{MD} \times \mathrm{ME} = \mathrm{MB} \times \mathrm{MC} \Rightarrow ۲(۳x+۱) = ۲۰ \Rightarrow x = ۳$$

بنابراین:

$$\frac{x}{y} = \frac{۳}{۵} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶$$



۸ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیم‌دایره را کامل می‌کنیم. در این صورت زاویهٔ $\widehat{B} = ۹۰^\circ$.
در ضمن OF را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. با استفاده از رابطهٔ طولی در دایره می‌نویسیم.



$$\mathrm{BE} \times \mathrm{EC} = \mathrm{EF} \times \mathrm{ED} \Rightarrow \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EC}} \Rightarrow \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{OE+OD}}{\mathrm{EC}}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{OD=OC}} \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EF}} = \frac{\mathrm{OE+OC}}{\mathrm{EC}} \Rightarrow \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EC}} + \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{EC}} \ (۱)$$

اکنون با توجه به شکل داریم.

$$\overset{\triangle}{OEC} : \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EC}} = \mathrm{Sin}\,(۹۰ - \alpha) = \mathrm{Cos}\,\alpha$$
$$\mathrm{OEC} : \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{EC}} = \mathrm{Sin}\,\alpha$$

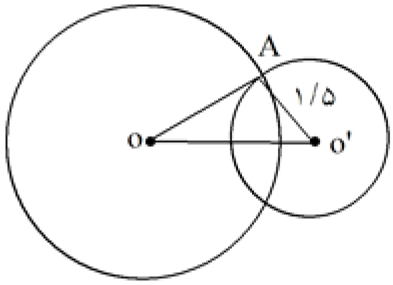
پس:

$$(۱) \text{ از } \Rightarrow \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} = \mathrm{Cos}\,\alpha + \mathrm{Sin}\,\alpha = \sqrt{۱ - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha} + \mathrm{Sin}\,\alpha \xrightarrow{\mathrm{Sin}\,\alpha = ۰/۸ = \frac{۴}{۵}}$$
$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} = \sqrt{۱ - \frac{۱۶}{۲۵}} + \frac{۴}{۵} = \frac{۳}{۵} + \frac{۴}{۵} = \frac{۷}{۵} = \frac{۱۴}{۱۰} = ۱/۴$$

۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده در نقطهٔ تلاقی دو دایره به مرکز O و O' یعنی A بر هم عمودند پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{OAO'} : OA^{۲} = OO'^{۲} - O'A^{۲}$$

$$\Rightarrow OA = ۲/۵^{۲} - ۱/۵^{۲} = ۶/۲۵ - ۲/۲۵ = ۴ \Rightarrow OA = ۲$$



۱۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های روی شکل و استفاده از قضیهٔ روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۶\times ۱۰ = y(۷+x) \Rightarrow ۶۰ = ۷y + xy \\ ۵\times ۱۲ = x(۷+y) \Rightarrow ۶۰ = ۷x + xy \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$$

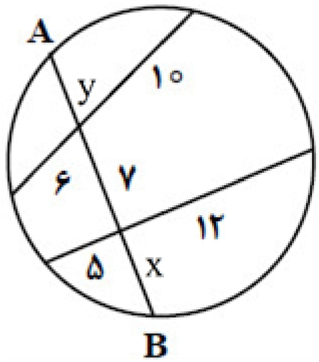
بنابراین:

$$۶\times ۱۰ = y(۷+x) \xrightarrow{y=x} ۶۰ = x(۷+x) \Rightarrow x^{۲} + ۷x - ۶۰ = ۰$$

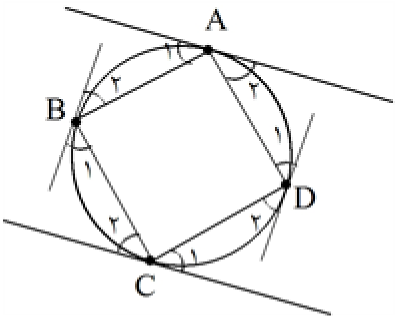
$$\Rightarrow (x+۱۲)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۵$$

پس:

$$AB = x + y + ۷ = ۵ + ۵ + ۷ = ۱۷$$



۱۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:



$$\text{زاویه ظلی} : \hat{A}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \hat{B}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \hat{C}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}, \hat{D}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

$$\text{زاویه ظلی} : \hat{A}_{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}, \hat{B}_{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}, \hat{C}_{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}, \hat{D}_{۲} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}$$

بنابراین:

$$\hat{A}_{۱} + \hat{A}_{۲} + \hat{B}_{۱} + \hat{B}_{۲} + \hat{C}_{۱} + \hat{C}_{۲} + \hat{D}_{۱} + \hat{D}_{۲}$$

$$= \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = ۳۶۰^{\circ}$$

۱۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود.

$$r_a = \frac{S}{P-a}$$
$$P = \frac{۹+۸+۷}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۲(۱۲-۹)(۱۲-۸)(۱۲-۷)} = \sqrt{۱۲\times۳\times۴\times۵}$$
$$= \sqrt{۱۲^۲\times۵} = ۱۲\sqrt{۵}$$

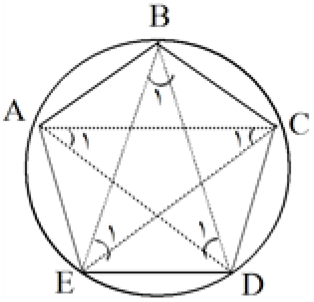
بنابراین:

$$r_a = \frac{S}{P-a} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۱۲-۷} = \frac{۱۲\sqrt{۵}}{۵} = ۲/۴\sqrt{۵}$$

۱۳ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه‌حل اول: این سؤال را در حالت خاص که پنج‌ضلعی منتظم است حل می‌کنیم. پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایره، دایره را به پنج قسمت مساوی $\frac{۳۶۰^\circ}{۵} = ۷۲^\circ$ تقسیم می‌کند. زاویهٔ محاطی $\widehat{D}_۱$ روبه‌رو به وتر AB است پس:

$$\widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۷۲^\circ}{۲} = ۳۶^\circ$$

به همین ترتیب زاویه‌های محاطی روبه‌رو به اضلاع این پنج‌ضلعی منتظم برابر ۳۶° است بنابراین مجموع این زاویه‌ها $۵\times۳۶^\circ = ۱۸۰^\circ$ است.

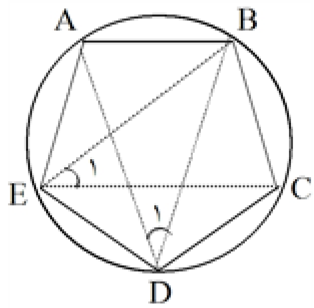


راه‌حل دوم: فرض کنیم ABCDE پنج‌ضلعی محاط در دایره باشد داریم:

$$\widehat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}, \widehat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{ED}}{۲}, \widehat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲}, \widehat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}, \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

در نتیجه:

$$\widehat{A}_۱ + \widehat{B}_۱ + \widehat{C}_۱ + \widehat{D}_۱ + \widehat{E}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$



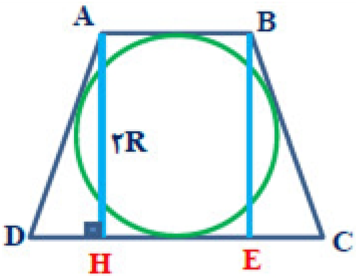
۱۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{(OO'^{۲}) - (R+R'^{۲})} \Rightarrow (R+R'^{۲}) = ۸۱ - (۲\sqrt{۱۴})^{۲} \Rightarrow R+R' = ۵$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{(OO'^{۲}) - (R-R'^{۲})} \Rightarrow (R-R'^{۲}) = ۸۱ - (۴\sqrt{۵})^{۲} \Rightarrow R-R' = ۱$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} ۲R = ۶ \Rightarrow R = ۳$$

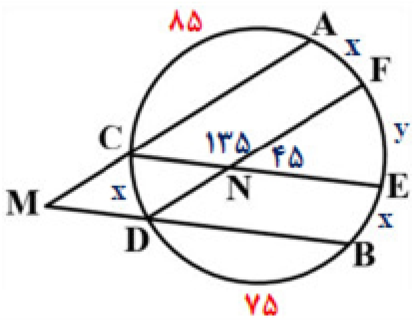
۱۵ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم ذوزنقه بر دایره‌ای به شعاع R محاط باشد، پس ارتفاع ذوزنقه برابر $۲R$ است. با رسم ارتفاع‌های AH و BE داریم:



$$\mathrm{DH} = \mathrm{CE} = \frac{\mathrm{DC}-\mathrm{AB}}{۲} = \frac{۱۶}{۲} \Rightarrow \mathrm{DH} = ۸$$

$$\mathrm{AD}^{۲} = \mathrm{AH}^{۲} + \mathrm{DH}^{۲} \Rightarrow \mathrm{AD}^{۲} = (۴\sqrt{۵})^{۲} + ۸ = ۱۴۴ \Rightarrow \mathrm{AD} = ۱۲$$

۱۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساویند، پس $\widehat{\mathrm{BE}} = \widehat{\mathrm{CD}}$ و $\widehat{\mathrm{CD}} = \widehat{\mathrm{AF}}$ اکنون با توجه به شکل می‌نویسیم:



$$\left.\begin{array}{l} F\widehat{N}E = ۴۵^{\circ} = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۹۰^{\circ} \\ ۸۵^{\circ} + ۷۵^{\circ} + ۳x + y = ۳۶۰^{\circ} \Rightarrow ۳x + y = ۲۰۰^{\circ} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲x = ۱۱۰^{\circ} \Rightarrow \begin{cases} x = ۵۵ \\ y = ۳۵ \end{cases}$$

۱۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث BDC داریم:

$$\widehat{D}_{۲}+\widehat{B}_{۱}+\widehat{C}_{۱}=۱۸۰^\circ$$

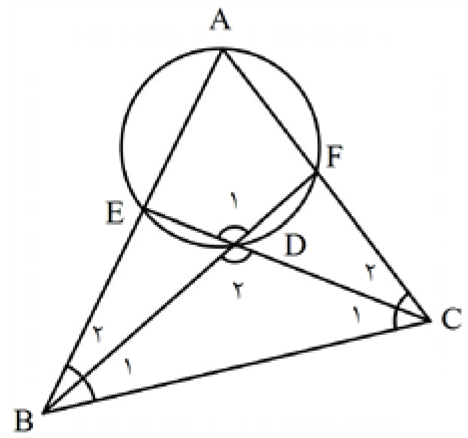
BD و CD نیمساز زوایای B و C هستند، پس داریم:

$$\widehat{D}_{۲}+\frac{\widehat{B}}{۲}+\frac{\widehat{C}}{۲}=۱۸۰^\circ\ (۱)$$

از طرفی چهارضلعی AEDF محاطی است، بنابراین:

$$\widehat{A}+\widehat{D}_{۱}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{D}_{۱}=\widehat{D}_{۲}} \widehat{A}+\widehat{D}_{۲}=۱۸۰^\circ\ (۲)$$

$$۱,۲\Rightarrow \widehat{A}=\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{۲}\Rightarrow \widehat{A}=\frac{۱۸۰^\circ-\widehat{A}}{۲}\Rightarrow ۲\widehat{A}=۱۸۰^\circ-\widehat{A}\Rightarrow ۳\widehat{A}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \widehat{A}=۶۰^\circ$$



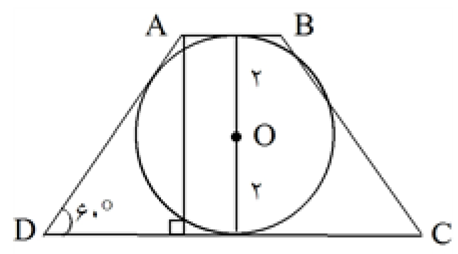
۱۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل طول ارتفاع ذوزنقه برابر طول قطر دایره یعنی برابر ۴ است. از طرفی در مثلث ADH داریم:

$$\text{Sin}\,۶۰^\circ=\frac{\text{AH}}{\text{AD}}\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۴}{\text{AD}}\Rightarrow \text{AD}=\frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

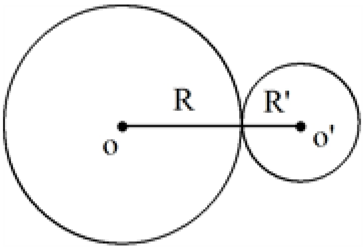
چهارضلعی $ABCD$، یک چهارضلعی محیطی است، پس داریم:

$$\text{AB}+\text{CD}=\text{AD}+\text{BC}=۲\text{AD}=\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$$

$$S_{\text{ABCD}}=\frac{۱}{۲}\text{AH}\,(\text{AB}+\text{CD})=\frac{۱}{۲}\times ۴\times\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}=\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$$



۱۹ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول خط المرکزین دو دایره مماس خارج مساوی $R+R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $۲\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال داریم.



$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R \Rightarrow ۲\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

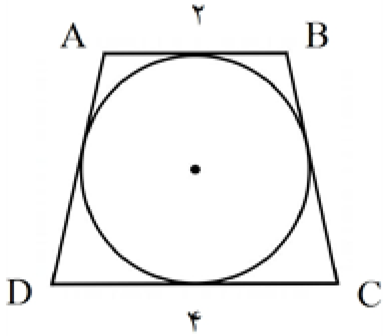
$$\Rightarrow ۴RR' = \frac{۳}{۴}R^۲ \Rightarrow ۴R' = \frac{۳}{۴}R \Rightarrow R = \frac{۱۶}{۳}R'$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر $\frac{۱۶}{۳}$ برابر شعاع دایره کوچکتر است.

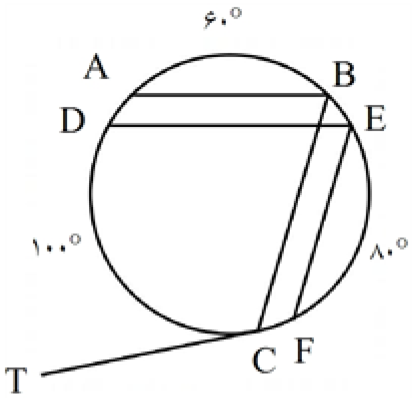
۲۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی قطر دایرهٔ محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده ذوزنقه است. به عبارتی اگر R شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد آن‌گاه $۴R^۲ = AB \times DC$ پس:

$$۴R^۲ = AB \times DC \Rightarrow ۴R^۲ = ۲\times۴ \Rightarrow R^۲ = ۲$$

بنابراین: $\text{مساحت دایره} = \pi R^۲ = ۲\pi$



۲۱ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازهٔ کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند.



$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BE} \\ BC \parallel EF \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{BE} = x$$

در ضمن:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{CF} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۶۰^\circ + x + ۸۰^\circ + x + ۱۰۰^\circ + x = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۲۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

از طرف دیگر زاویهٔ BCT زاویهٔ ظلی است بنابراین:

$$B\hat{C}T = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۴۰^\circ + ۱۰۰^\circ + ۶۰^\circ}{۲} = ۱۰۰^\circ$$

۲۲ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره بزرگتر و R' شعاع دایره‌ی کوچکتر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند پس $R-R'$ $OO'=$ یعنی:

$$R-R'=۳/۵$$

از طرف دیگر:

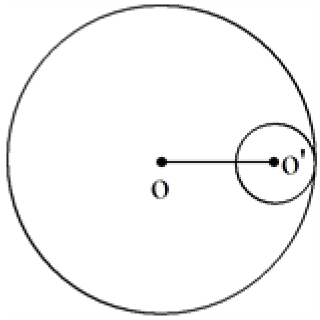
$$\text{مساحت بین دو دایره}=۲۱\pi \Rightarrow \pi R^{۲}-\pi R'^{۲}=۲۱\pi \Rightarrow R^{۲}-R'^{۲}=۲۱$$

$$\Rightarrow (R-R')(R+R')=۲۱ \xrightarrow{R-R'=۳/۵} ۳/۵(R+R')=۲۱$$

$$\Rightarrow R+R'=\frac{۲۱}{۳/۵}=\frac{۲۱}{\frac{۷}{۲}}=۶$$

بنابراین:

$$\begin{cases} R-R'=۳/۵ \\ R+R'=۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲R'=۶-۳/۵ \Rightarrow ۲R'=۲/۵ \Rightarrow R'=\frac{۲/۵}{۲}=۱/۲۵$$



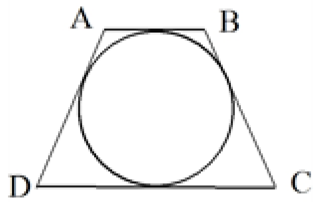
۲۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره به شعاع R محیط باشد آنگاه قطر دایره‌ی محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده است. پس:

$$۴R^{۲}=AB\times DC \quad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$\text{مساحت دایره}=۱۵\pi \Rightarrow \pi R^{۲}=۱۵\pi \Rightarrow R^{۲}=۱۵ \quad (۲)$$

$$(۲),(۱) \text{ از} \Rightarrow ۴\times۱۵=a\times۶ \Rightarrow a=۱۰$$



۲۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمانهای محصور بین دو وتر موازی مساویند پس:

$$\mathrm{AB} \parallel \mathrm{EF} \Rightarrow \overset{\frown}{\mathrm{BF}} = \overset{\frown}{\mathrm{AE}} \xrightarrow{\overset{\frown}{\mathrm{AE}}=۱۵^\circ} \overset{\frown}{\mathrm{BF}} = ۱۵^\circ$$

با فرض $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = x$ و $\overset{\frown}{\mathrm{CD}} = y$ می‌نویسیم.

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{BF}} + \overset{\frown}{\mathrm{FD}} + \overset{\frown}{\mathrm{CD}} + \overset{\frown}{\mathrm{EC}} + \overset{\frown}{\mathrm{AE}} = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow x + ۱۵^\circ + ۱۰۰^\circ + y + ۸۰^\circ + ۱۵^\circ = ۳۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow x + y = ۱۵۰^\circ \ (۱)$$

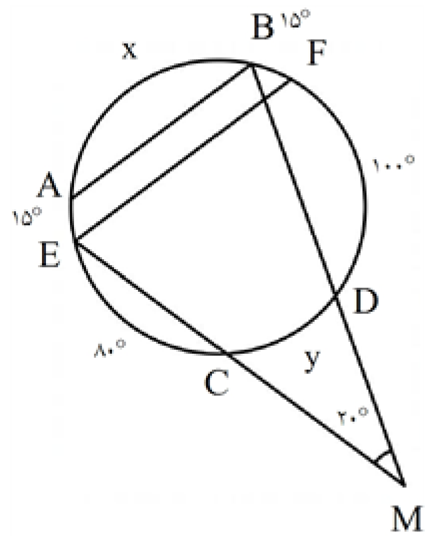
از طرف دیگر:

$$\widehat{M} = \frac{\mathrm{E}\overset{\frown}{\mathrm{A}}\mathrm{B} - \overset{\frown}{\mathrm{CD}}}{۲} \Rightarrow ۲۰^\circ = \frac{۱۵^\circ + x - y}{۲} \Rightarrow x - y = ۲۵^\circ \ (۲)$$

$$۲,۱ \text{ از} \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۱۵۰^\circ \\ x - y = ۲۵^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲y = ۱۲۵^\circ \Rightarrow y = ۶۲/۵^\circ$$

بنابراین:

$$A\widehat{B}D = \frac{\overset{\frown}{\mathrm{AD}}}{۲} \Rightarrow A\widehat{B}D = \frac{۶۲/۵^\circ + ۸۰^\circ + ۱۵^\circ}{۲} = \frac{۱۵۷/۵^\circ}{۲} = ۷۸/۷۵$$



۲۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر باشد. چون AB محور تقارن این شکل است پس $\mathrm{DN} = N'C = ۱۰$.

در ضمن قطر AB عمودمنصف 'NN است پس $\mathrm{ON} = \mathrm{ON}'$.

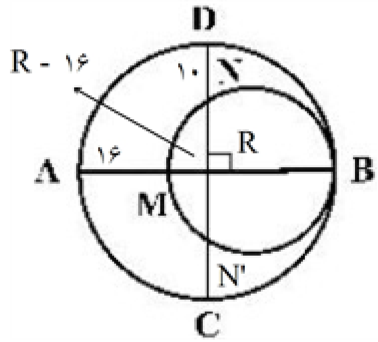
حال با استفاده از قضیه‌ی رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.

$$\mathrm{ON} \times \mathrm{ON}' = \mathrm{OB} \times \mathrm{OM} \xrightarrow{\mathrm{ON}=\mathrm{ON}'=R-۱۰}$$

$$(R-۱۰)^{۲} = R(R-۱۶) \Rightarrow R^{۲} + ۱۰۰ - ۲۰R = R^{۲} - ۱۶R$$
$$\Rightarrow ۴R = ۱۰۰ \Rightarrow R = ۲۵$$

در شکل MB قطر دایره‌ی کوچک‌تر است از طرف دیگر MB مساوی $۲R - ۱۶$ است. پس:

$$\mathrm{MB} = ۲R - ۱۶ \Rightarrow \text{قطر دایره کوچک} = ۵۰ - ۱۶ = ۳۴ \Rightarrow \text{شعاع دایره کوچک} = ۱۷$$

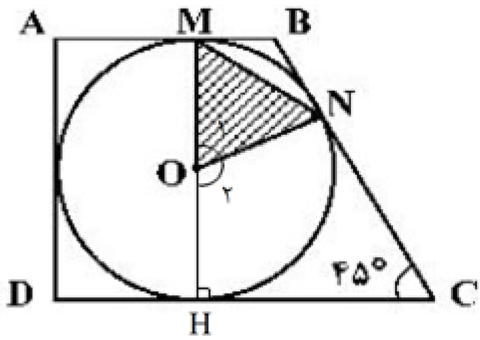


۲۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شعاع OM را امتداد می‌دهیم در این صورت شعاع OH بر DC عمود است. چون $\widehat{N} = \widehat{H} = ۹۰^\circ$ پس چهارضلعی ONCH محاطی است در نتیجه:

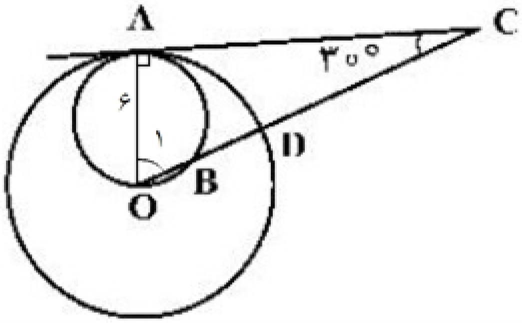
$$\widehat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_۱ + \widehat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ} \widehat{O}_۱ = ۴۵^\circ$$

بنابراین:

$$S_{\mathrm{OMN}} = \frac{۱}{۲}\mathrm{OM} \times \mathrm{ON} \,\mathrm{Sin}\, ۴۵^\circ = \frac{۱}{۲}(۳)(۳)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$$



۲۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطه‌ی A وصل می‌کنیم در این صورت $\widehat{A} = 90^\circ$ است.



$$\overset{\triangle}{OAC} : \widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{1}{2}OC \xrightarrow{OA=6} OC = 12$$

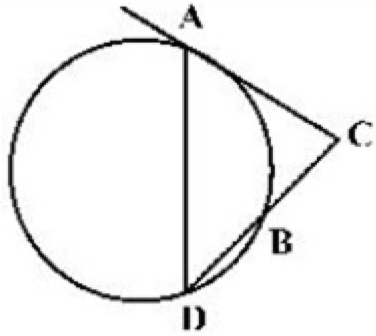
$$\overset{\triangle}{OAC} : \widehat{O}_1 = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2}OC = \frac{\sqrt{3}}{2}(12) = 6\sqrt{3}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره‌ی کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$CA^2 = CB \times CO \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = CB \times 12 \Rightarrow 108 = 12BC \Rightarrow BC = 9$$

از طرف دیگر $CD = CO - OD = 12 - 6 = 6$ بنابراین: $BD = BC - CD = 9 - 6 = 3$

۲۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

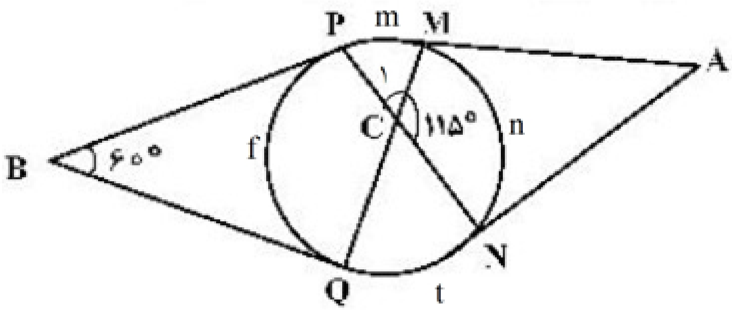


$$CA^2 = CB \times CD \Rightarrow CA^2 = CB\,(CB + BD) \xrightarrow{DB=BC}$$

$$CA^2 = CB\,(CB + CB) \Rightarrow CA^2 = 2CB^2 \Rightarrow CA = \sqrt{2}\,CB$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$$

۲۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اندازه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{PM}$ و $\overset{\frown}{MN}$ و $\overset{\frown}{NQ}$ و $\overset{\frown}{PQ}$ به‌ترتیب برابر m و n و t و f باشند داریم:



$$60^\circ = \frac{m+n+t-f}{2} \Rightarrow m+n+t-f = 120 \ (1)$$

$$\widehat{C} = 115^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 = 180 - 115 = 65^\circ$$

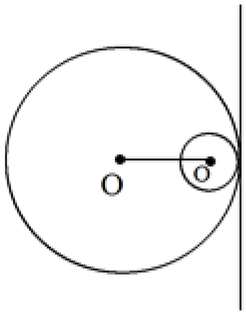
$$\Rightarrow \frac{m+t}{2} = 65 \Rightarrow m+t = 130 \ (2)$$

از ۱, ۲ $\Rightarrow n - f = -10$

بنابراین:

$$\widehat{A} = \frac{m+f+t-n}{2} = \frac{(m+t)+(f-n)}{2} = \frac{130^\circ + 10^\circ}{2} = 70^\circ$$

۳۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند که مماس داخلی باشند. پس باید $OO' = |R - R'|$ باشد.



$$OO' = |R - R'| \Rightarrow ۶ = \left|a^۲ - ۲ - ۶a + ۱\right|$$
$$\Rightarrow ۶ = \left|a^۲ - ۶a - ۱\right|$$

حالت اول: $a^۲ - ۶a - ۱ = ۶ \Rightarrow a^۲ - ۶a - ۷ = ۰ \Rightarrow S_۱ = ۶$

حالت دوم: $a^۲ - ۶a - ۱ = -۶ \Rightarrow a^۲ - ۶a + ۵ = ۰ \Rightarrow S_۲ = ۶$

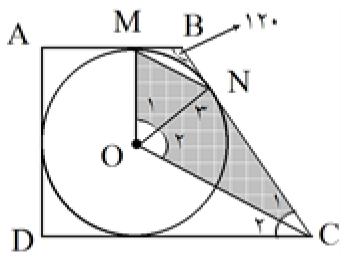
پس میانگین مقادیر ممکن برای a برابر است با: $\dfrac{S_۱ + S_۲}{۲} = ۶$

۳۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از O به N وصل می‌کنیم در این صورت ON برابر شعاع دایره است. در ضمن در چهارضلعی OMBN دو زاویه‌ی $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ قائمه هستند پس این چهارضلعی محاطی است. بنابراین $\widehat{O}_۱ + \widehat{B} = ۱۸۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ$ پس مثلث OMN متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر دو زاویه‌ی B و C در این ذوزنقه مکملند و OC نیمساز زاویه‌ی $\widehat{C}$ است پس $\widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۲ = ۶۰^\circ$ داریم.

$$\overset{\triangle}{ONC} : \widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ \Rightarrow \mathrm{ON} = \frac{۱}{۲}\mathrm{OC} \xrightarrow{\mathrm{ON}=۳} \mathrm{OC} = ۶$$

بنابراین:

$$S_{\mathrm{OMNC}} = S_{\mathrm{OMN}} + S_{\mathrm{ONC}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳)^۲ + \frac{۱}{۲}\mathrm{ON} + \mathrm{OC}\,\mathrm{Sin}\,۶۰^\circ = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۱}{۲}(۶)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$
$$= \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} + \frac{۹\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$



۳۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

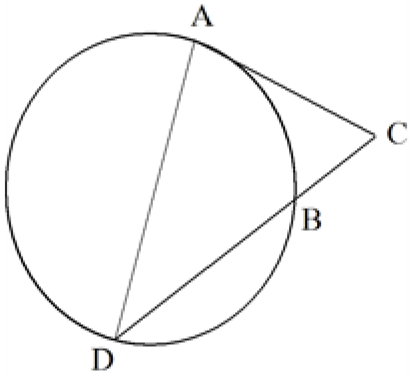
با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^{۲} = BC \times DC \ (۱)$$

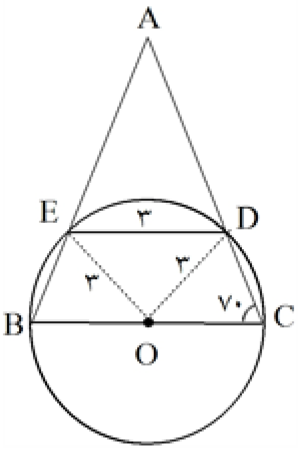
از طرف دیگر بنابر فرض سؤال $\sqrt{۳} = \frac{AC}{BC}$ پس: $AC = \sqrt{۳}BC$

پس بنابر تساوی ۱ نتیجه می‌گیریم:

$$۳BC^{۲} = BC \times DC \Rightarrow ۳BC = DC \Rightarrow \frac{DC}{BC} = ۳ \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل از}} \frac{DB}{BC} = ۲$$



۳۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقاط D و E وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OED مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. پس $\overset{\frown}{ED} = ۶۰^{\circ}$. داریم:



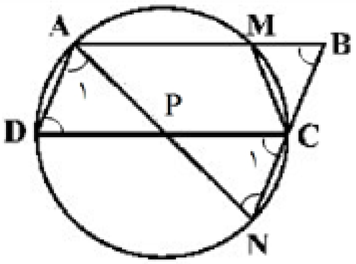
$$\widehat{C} = ۷۰^{\circ} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{ED}}{۲} = ۷۰^{\circ} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BE} + ۶۰^{\circ}}{۲} = ۷۰^{\circ} \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = ۸۰^{\circ}$$

بنابراین:

$$\overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{DC} = ۱۸۰^{\circ} \xrightarrow{\overset{\frown}{BE}=۸۰^{\circ}} ۸۰^{\circ} + \overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{DC} = ۱۸۰ \Rightarrow \overset{\frown}{ED} + \overset{\frown}{DC} = ۱۰۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{EDC} = ۱۰۰^{\circ}$$

۳۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو زاویه‌ی محاطی N و D روبه‌رو به یک کمان هستند پس مساویند.

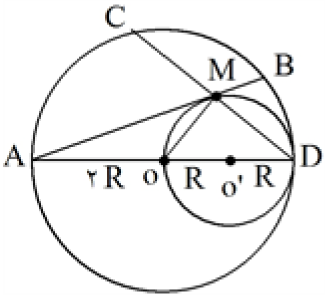


$\widehat{D}=\widehat{N} \xrightarrow{\widehat{D}=\widehat{B}} \widehat{B}=\widehat{N} \Rightarrow$ مثلث ABN متساوی‌الساقین است

از طرف دیگر دو وتر AM و DC موازیند پس دو کمان $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{MC}$ که بین آن‌ها هستند مساویند پس $AD=MC$. در ضمن $AD=BC$ پس $BC=MC$ یعنی مثلث BMC متساوی‌الساقین است. در ضمن چون $AD \parallel BN$ و AN مورب، پس $\widehat{A}_۱=\widehat{N}$ و $\widehat{N}=\widehat{D}$ پس $\widehat{A}_۱=\widehat{D}$ یعنی مثلث APD متساوی‌الساقین است و چون $AD \parallel BN$ و DC مورب، پس $\widehat{D}=\widehat{C}_۱$ و $\widehat{D}=\widehat{N}$ پس $\widehat{C}_۱=\widehat{N}$ یعنی مثلث PNC نیز متساوی‌الساقین است. بنابراین چهار مثلث ABN و BMC و APD و PNC متساوی‌الساقین هستند.

۳۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از مرکز O به نقطه‌ی M وصل می‌کنیم در این صورت زاویه‌ی M زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر OD است پس $\widehat{M}=۹۰^\circ$.
بنابراین OM بر وتر CD عمود است پس OM وتر CD نصف می‌کند یعنی $CM=MD$.
حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.



$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MB = MD^۲ \quad (۱)$

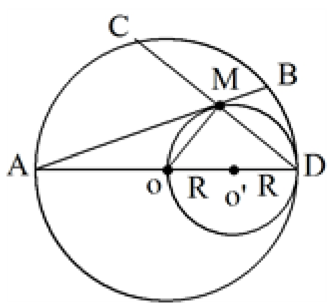
در ضمن با وصل کردن نقطه‌ی B به D نتیجه می‌گیریم زاویه‌ی محاطی B که روبه‌رو به قطر دایره‌ی بزرگ‌تر است قائمه است و شعاع O'M بر وتر AB عمود است پس:

$$O'M \parallel BD \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{O'A}{O'D} \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{۳R}{R}=۳ \Rightarrow MA=۳MB \quad (۲)$$

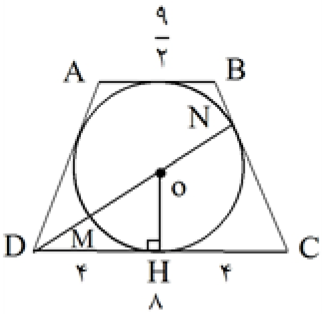
$$\text{از } ۱,۲ \Rightarrow ۳MB \times MB = MD^۲ \Rightarrow \sqrt{۳}MB = MD$$

بنابراین:

$$\frac{MC}{MB}=\frac{MD}{MB}=\frac{\sqrt{۳}\,MB}{MB}=\sqrt{۳}$$



۳۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی حاصل‌ضرب دو قاعده مساوی مربع قطر دایره‌ی محاطی است. اگر R شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه داریم:



$$AB \times DC = ۴R^{۲} \Rightarrow \frac{۹}{۲} \times ۸ = ۴R^{۲}$$
$$\Rightarrow R^{۲} = ۹ \Rightarrow R = ۳$$

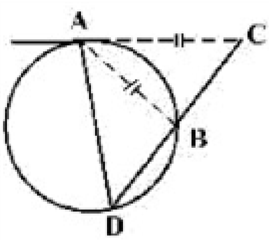
حال از مرکز O به رأس D وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصله‌ی نقاط دایره تا رأس D هستند. مسلماً $DN = DO + R$.

برای به دست آوردن DO در مثلث قائم‌الزاویه ODH می‌نویسیم:

$$OD^{۲} = OH^{۲} + DH^{۲} = ۳^{۲} + ۴^{۲} = ۲۵ \Rightarrow OD = ۵$$

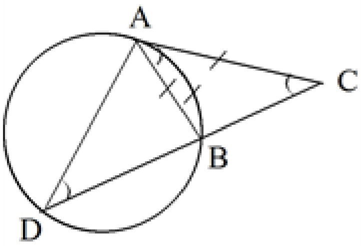
بنابراین: فاصله‌ی دورترین نقاط دایره تا D $= OD + R = ۵ + ۳ = ۸$

۳۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه‌ی طولی تساوی $CA^{۲} = CB \times CD$ برقرار است و بنابر قضیه‌ی استوارت در مثلث ADC می‌نویسیم:



$$AC^{۲} \times BD + AD^{۲} \times BC = AB^{۲} \times DC + BD \times BC \times DC$$
$$\xrightarrow[AB=AC]{AC^{۲}=CB \times CD} CB \times \cancel{CD} \times BD + AD^{۲} \times BC$$
$$= CB \times CD \times DC + BD \times \cancel{BC} \times DC \Rightarrow AD^{۲} \times BC$$
$$= CB \times CD \times CD \Rightarrow AD^{۲} = CD^{۲} \Rightarrow AD = CD$$

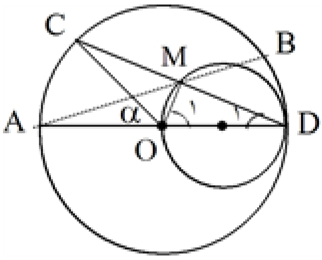
راه حل دوم: دو زاویه‌ی ظلی $A_{۱}$ و زاویه محاطی D برابرند زیرا:



$$\left.\begin{array}{l} \text{ظلی } \widehat{A}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \text{محاطی } \widehat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{A}_{۱} = \widehat{D} \\ \widehat{C} = \widehat{C} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(\text{ز ز})} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADC} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} \xrightarrow{AB=AC} AD = DC$$

۳۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه کنید که شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر قطر دایره‌ی کوچک‌تر است پس اگر OM را رسم کنیم آن‌گاه زاویه‌ی M قائمه است. پس عمود OM وتر CD را نصف می‌کند یعنی $CM = CD$. حال بنابر رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:



$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow{MC=MD} MA \times MB = MD^۲ \ (۱)$$

در ضمن طول کمان AC ازرابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

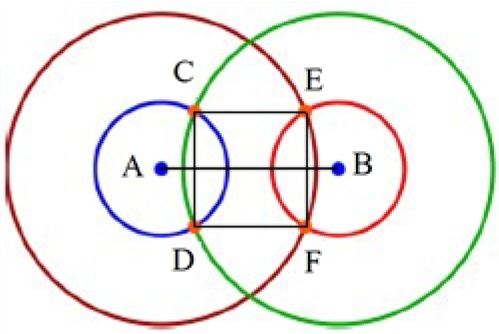
$$AC \text{ طول کمان} = \frac{\alpha}{۳۶۰}(۲\pi R) \Rightarrow \frac{۴\pi}{۳} = \frac{\alpha}{۳۶۰} ۲\pi \times ۴ \Rightarrow \alpha = ۶۰ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۶۰^\circ$$

بنابراین $\widehat{D}_۱ = ۳۰^\circ$ پس $\widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ$.

$$\overset{\triangle}{OMD} : \widehat{O}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow MD = \frac{\sqrt{۳}}{۲} OD = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳}$$

در نتیجه: $$\text{از ۱} \Rightarrow MA \times MB = MD^۲ = (۲\sqrt{۳})^۲ = ۱۲$$

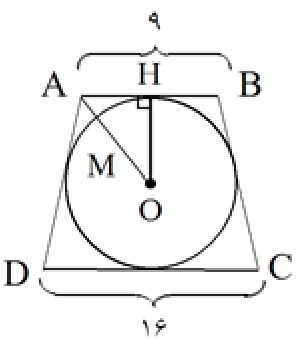
۳۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل رسم شده، وتر مشترک‌های EF و CD بر خط‌المرکزین AB عمود هستند و $CD = EF$ بنابراین چهارضلعی CEFD مستطیل است.



۴۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از مرکز O مرکز دایره‌ی محاطی به رأس A وصل می‌کنیم تا دایره را در M قطع کند آن‌گاه طول پاره‌خط AM نزدیک‌ترین نقاط دایره تا رأس قاعده‌ی کوچک ذوزنقه است.

اگر R شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه $۴R^۲ = AB \times DC$ پس $۴R^۲ = ۹ \times ۱۶$ در نتیجه $R^۲ = ۳۶$ پس $R = ۶$.

حال در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH می‌توان نوشت:



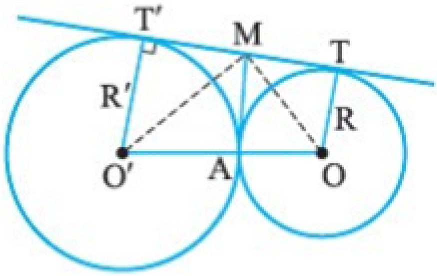
$$\left.\begin{aligned} AH &= \frac{AB}{۲} = \frac{۹}{۲} \\ OH &= R = ۶ \end{aligned}\right\} \Rightarrow OA^۲ = OH^۲ + AH^۲$$

$$\Rightarrow OA^۲ = ۳۶ + \frac{۸۱}{۴} = \frac{۲۲۵}{۴} \Rightarrow OA = \frac{۱۵}{۲}$$

بنابراین: $$AM = OA - OM = \frac{۱۵}{۲} - ۶ = \frac{۳}{۲}$$

۴۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

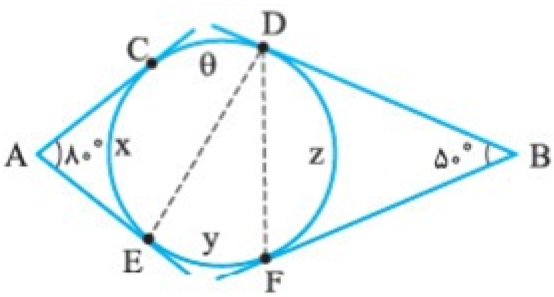
مماس مشترک خارجی $\mathrm{TT}' = \sqrt{\mathrm{OO}'^{۲} - (R - R')^{۲}} = \sqrt{۱۳^{۲} - (۹ - ۴)^{۲}} = ۱۲$



اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی را در M قطع کند، آن‌گاه $O'M$ نیمساز $T'\widehat{M}A$ و OM نیز نیمساز $T\widehat{M}A$ است، پس $O'\widehat{M}O = ۹۰^\circ$ است. اگر دایره‌ای به قطر OO' رسم شود از M همان نقطهٔ مطلوب است. از طرفی:

$$\mathrm{MA} = \mathrm{MT}' = \mathrm{MT} = \frac{\mathrm{TT}'}{۲} = ۶$$

۴۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر کمان $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ برابر θ باشد، آن‌گاه:



$$\mathrm{CD} = ۲R\,\mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow R = ۲R\,\mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{۲}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\theta}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

$$\widehat{A} = \frac{(\theta + z + y) - x}{۲} \Rightarrow ۸۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + z + y - x}{۲} \Rightarrow z + y - x = ۱۰۰^\circ \quad (۱)$$

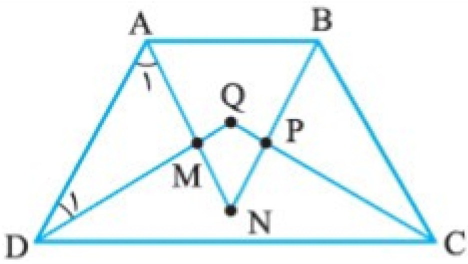
$$\widehat{B} = \frac{(\theta + x + y) - z}{۲} \Rightarrow ۵۰^\circ = \frac{۶۰^\circ + x + y - z}{۲} \Rightarrow x + y - z = ۴۰^\circ \quad (۲)$$

$$(۱) + (۲) \Rightarrow ۲y = ۱۴۰^\circ \Rightarrow y = ۷۰^\circ$$

زاویهٔ EDF محاطی است و برابر با نصف کمان مقابلش است. پس:

محاطی $E\widehat{D}F = \frac{y}{۲} = ۳۵^\circ$

۴۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{A} + \widehat{D} = ۱۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_{۱} + \widehat{D}_{۱} = ۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{M} = ۹۰^\circ$$

به صورت مشابه $\widehat{P} = ۹۰^\circ$ و چون مجموع دو زاویهٔ مقابل در چهارضلعی MNPQ برابر ۱۸۰° است، پس این چهارضلعی محاطی است.

از طرفی مثلث‌های ABN و DQC متساوی‌الساقین و دو مثلث AMD و BPC هم‌نهشت هستند، پس:

$\mathrm{MQ} = \mathrm{QP}$ و $\mathrm{MN} = \mathrm{NP}$

در نتیجه $\mathrm{MQ} + \mathrm{NP} = \mathrm{QP} + \mathrm{MN}$، یعنی در چهارضلعی MNPQ مجموع دو ضلع مقابل، برابر با مجموع دو ضلع دیگر است، پس این چهارضلعی محیطی است. در نتیجه چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است.

۴۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری‌که O مرکز دایره محاطی داخلی و O' مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر ضلع BC است. طول HH' که تصویر قائم OO' روی ضلع BC است را باید به دست آوریم.

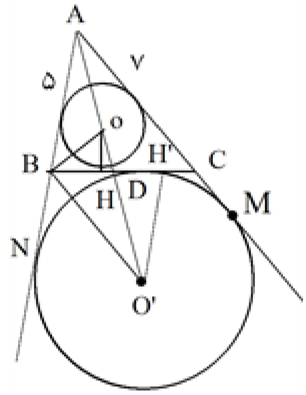
می‌دانیم که P نصف محیط مثلث ABC برابر ۱۰ است. پس:

$$\mathrm{BH} = P - \mathrm{AC} = ۱۰ - ۷ = ۳$$

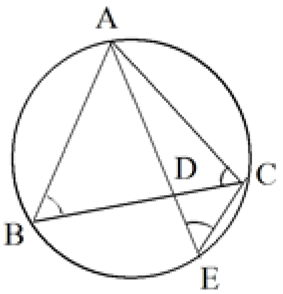
$$\mathrm{AM} = P = ۱۰ \Rightarrow \mathrm{CM} = P - \mathrm{AC} = ۳$$

در ضمن $\mathrm{CM} = \mathrm{CH'}$ پس $\mathrm{CH'} = ۳$ بنابراین:

$$\mathrm{HH'} = \mathrm{BC} - \mathrm{BH} - \mathrm{CH'} \Rightarrow \mathrm{HH'} = ۸ - ۳ - ۳ = ۲$$



۴۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{E} = \widehat{B} = \text{رو به روی یک کمان} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC} \sim \overset{\triangle}{AEC}$$

$$\begin{cases} D\widehat{A}C = E\widehat{A}C \\ \widehat{E} = \widehat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}}$$

$$\mathrm{AD} \times \mathrm{AE} = \mathrm{AC}^۲ \xrightarrow{\mathrm{AC}=\mathrm{AB}} \mathrm{AD} \times \mathrm{AE} = \mathrm{AB}^۲$$

۴۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با نام‌گذاری‌های صورت مسئله داریم:

۱) محیط $\overset{\triangle}{ABC}$:

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BD} + \mathrm{DC} + \mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BE} + \mathrm{CF} + \mathrm{AC} = \mathrm{AE} + \mathrm{AF} = ۲\,\mathrm{AE}$$

از این‌که مماس‌های خارجی یک دایره با هم برابرند استفاده کردیم و $\mathrm{BD} = \mathrm{BE}$ و $\mathrm{CD} = \mathrm{CF}$ قرار دادیم. در آخر نیز $\mathrm{AF} = \mathrm{AE}$.

چون نقطه‌ی A روی یک دایره بیرونی در حرکت است مقدار AE همواره ثابت است. این مقدار ثابت بنا به قضیه‌ی فیثاغورت برابر با $\sqrt{R^۲ - r^۲}$ است. (قوت نقطه A نسبت به دایره کوچک‌تر)

این یعنی محیط $\overset{\triangle}{ABC}$ ثابت است.

اگر D را ثابت نگه داریم و A را به طرف امتداد BC حرکت دهیم، مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ به صفر نزدیک می‌شود. می‌توانیم حتی A را ثابت نگه داریم و D را به طرف F حرکت دهیم و مساحت $\overset{\triangle}{ABC}$ به صفر میل کند.

این یعنی مساحت نه نسبت به A ثابت و نه D ثابت، عددی یکتا نیست. هر طور بگیرید مساحت متغیر است.

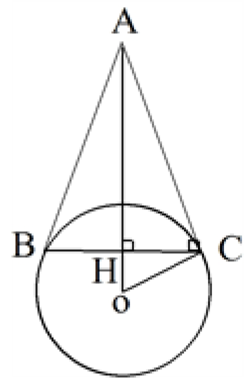
۴۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به رأس C وصل می‌کنیم در این‌صورت OC بر AC عمود خواهد بود. در مثلث متساوی الساقین ارتفاع میانه است بنابراین $\mathrm{CH} = ۳$ در مثلث قائم‌الزاویه AHC نتیجه می‌گیریم.

$$\mathrm{AC}^۲ = \mathrm{AH}^۲ + \mathrm{HC}^۲ = ۴^۲ + ۳^۲ = ۲۵ \Rightarrow \mathrm{AC} = ۵$$

بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه AOC داریم:

$$\mathrm{CH}^۲ = \mathrm{AH} \times \mathrm{OH} \Rightarrow ۹ = ۴.H \Rightarrow \mathrm{OH} = \frac{۹}{۴}$$

$$\overset{\triangle}{OHC} : \mathrm{OC}^۲ = \mathrm{CH}^۲ + \mathrm{OH}^۲ = ۹ + \frac{۸۱}{۱۶} = \frac{۲۲۵}{۱۶} \Rightarrow \mathrm{OC} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$$



۴۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهار ضلعی ABCD محیطی است پس $\mathrm{AB} + \mathrm{DC} = \mathrm{AD} + \mathrm{BC}$ بنابراین $\mathrm{DC} - \mathrm{BC} = \mathrm{AD} - \mathrm{AB}$ چون AB کوچک‌ترین ضلع است پس $\mathrm{AD} - \mathrm{AB}$ مثبت است بنابراین DC - BC مثبت می‌باشد پس $\mathrm{DC} > \mathrm{BC}$.

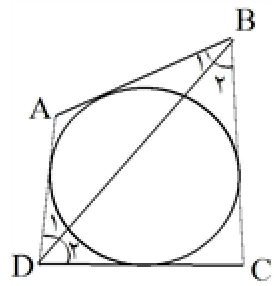
اگر قطر BD را رسم کنیم خواهیم داشت:

$$\overset{\triangle}{ABD} : \mathrm{AB} < \mathrm{AD} \Rightarrow \widehat{D}_۱ < \widehat{B}_۱ \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{BCD} : \mathrm{BC} < \mathrm{DC} \Rightarrow \widehat{D}_۲ < \widehat{B}_۲ \quad (۲)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

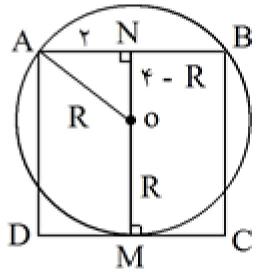
$$\widehat{D} < \widehat{B}$$



۴۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دایره‌ی گذرا از دو رأس A و B در نقطه‌ی M بر ضلع DC مماس باشد. در این صورت اگر O مرکز دایره باشد آن‌گاه OM بر DC و امتداد آن بر AB عمود خواهد بود در مثلث قائم‌الزاویه OAN قضیه‌ی فیثاغورس را می‌نویسیم.

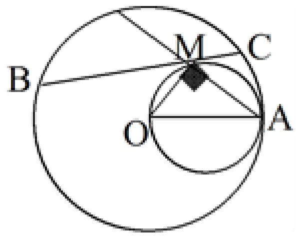
$$\mathrm{OA}^{۲} = \mathrm{AN}^{۲} + \mathrm{ON}^{۲} \Rightarrow R^{۲} = ۲^{۲} + (۴ - R)^{۲} \Rightarrow R^{۲} = ۴ + ۱۶ - ۸R + R^{۲}$$

$$\Rightarrow R = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$



۵۰ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر از نقطه‌ی M به نقاط O و A وصل کنیم در این‌صورت زاویه‌یM قائمه خواهد بود زیرا محاطی روبه‌رو به قطر می‌باشد چون OM عمود بر وتر AD است پس $\mathrm{MA} = \mathrm{MD}$ داریم:

$$\mathrm{MB} \times \mathrm{MC} = \mathrm{MA} \times \mathrm{MD} \xrightarrow{\mathrm{MA}=\mathrm{MD}} \mathrm{MB} \times \mathrm{MC} = \mathrm{MA}^{۲}$$



۵۱ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث MBA و DBC متشابه‌اند. چون:

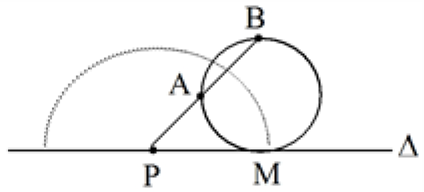
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A} = \widehat{C} = \frac{\widehat{\mathrm{BD}}}{۲} \\ \left.\begin{array}{l} \widehat{B}_{۱} = \frac{\widehat{\mathrm{AE}}}{۲} \\ \widehat{B}_{۲} = \frac{\widehat{\mathrm{CD}}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\widehat{\mathrm{AE}}=\widehat{\mathrm{CD}}} \widehat{B}_{۱} = \widehat{B}_{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\triangle}{B}M \sim D\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$$

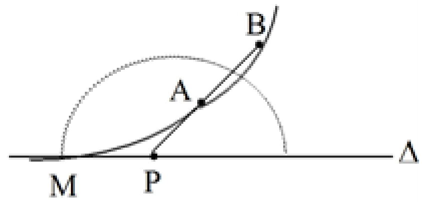
$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۶}{۸} \Rightarrow x = ۲/۲۵$$

۵۲ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. در شکل، صورت مساله ازنقطه‌ی P پاره‌خط قاطع PAB و مماس PD بر دایره‌ی کوچک رسم شده است بنابراین:

$$\mathrm{PD}^{۲} = \mathrm{PA.PB} \quad (۱)$$

حال دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که از نقاط ثابت A و B بگذرد و بر خط Δ در نقطه‌ی M مماس باشد. مطابق شکل‌های داده شده، با این شرایط باز هم پاره‌خط PAB قاطع این دو دایره است، بنابراین $\mathrm{PM}^{۲} = \mathrm{PA.PB}$ و در نتیجه با توجه به رابطه‌ی (۱) داریم $\mathrm{PD} = \mathrm{PM}$. از آن‌جا که PD شعاع نیم‌دایره‌ی خطچین بود پس PM نیز برابر با شعاع همان دایره خواهد بود، یعنی M یکی از نقاط C یا C' است.





۵۳ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

از نقاط B و C به نقطه‌ی تلاقی دوم دو دایره یعنی N وصل می‌کنیم.

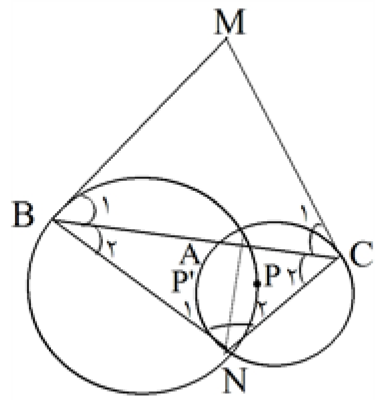
$$\widehat{N}_{۱} + \widehat{N}_{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \widehat{B}_{۱} + \widehat{C}_{۱} = ۱۸۰ - \widehat{M} \quad (۱)$$

از طرفی در مثلث BNC داریم:

$$\widehat{N}_{۱} + \widehat{N}_{۲} = ۱۸۰ - (\widehat{B}_{۲} + \widehat{C}_{۲})$$

$= ۱۸۰ - \left(\frac{\overset{\frown}{APN}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{AP'N}}{۲}\right) = ۱۸۰ -$ مقدار ثابت (۲)

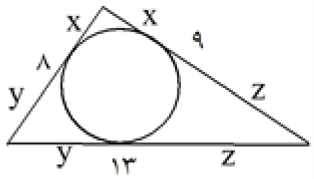
$\Rightarrow ۱۸۰ - \widehat{M} = ۱۸۰ -$ مقدار ثابت $\Rightarrow \widehat{M} =$ مقدار ثابت (۱) و (۲)



۵۴ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=۸ \\ x+z=۹ \\ y+z=۱۳ \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} ۲(x+y+z)=۳۰ \rightarrow x+y+z=۱۵$$

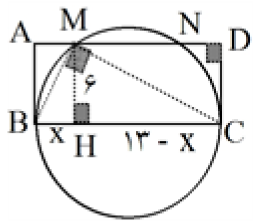
بنابراین: $x=۲$ و $y=۶$ و $z=۷$ می‌باشد، در نتیجه: $\frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$



۵۵ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث MBC در راس M قائمه است چون BC قطر دایره است و زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر ۹۰° است، حال در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده بر وتر است، بنابراین:

$$۶^۲=x(۱۳-x) \Rightarrow x^۲-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=۹ \end{cases}$$

بنابراین قطعه‌ی کوچک‌تر یعنی $BH=۴$ می‌باشد و در نتیجه $AM=۴$ وبه همین ترتیب $ND=۴$ و در نتیجه: $MN=۱۳-(۴+۴)=۵$

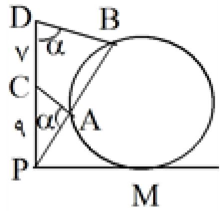


۵۶ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث PAC و PDB با دو زاویه‌ی برابر متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB} \rightarrow \frac{PA}{۹+۷}=\frac{۹}{PB} \rightarrow PA.PB=۹\times۱۶$$

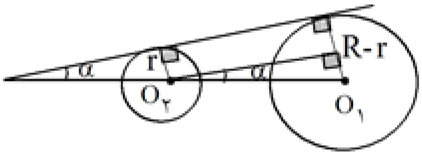
از طرفی PM مماس بر دایره و PAB قاطع است، بنابراین:

$$PA.PB=PM^۲ \rightarrow PM^۲=۹\times۱۶ \rightarrow PM=۳\times۴=۱۲$$



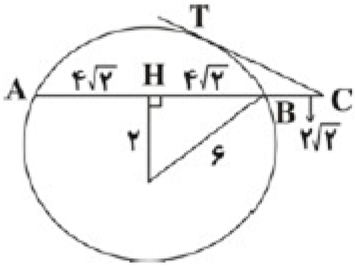
۵۷ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر شعاع دایره‌ها را r و R و زاویه‌ی بین مماس مشترک و خط المرکزین را α فرض کنیم، مطابق شکل خواهیم داشت:

$$\text{Sin}\,\alpha=\frac{R-r}{O_۱O_۲} \xrightarrow{\alpha=۳۰^\circ} \frac{۱}{۲}=\frac{۳۰-۷/۵}{O_۱O_۲} \rightarrow O_۱O_۲=۴۵$$



۵۸ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. شعاع دایره برابر ۶ واحد است، بنابراین $\text{BH} = \sqrt{۶^۲ - ۲^۲} = ۴\sqrt{۲}$. طبق قضیه‌ی مماس و قاطع داریم:

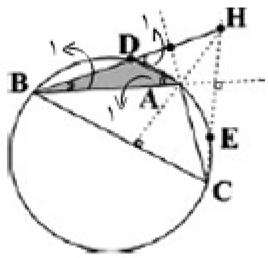
$$\text{CT} = \sqrt{\text{CB}.\text{CA}} = \sqrt{۴\sqrt{۲}\times ۱۰\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲۰}$$



۵۹ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اضلاع زاویه‌ی AHD بر اضلاع زاویه‌ی ACB عمود است، بنابراین این دو زاویه برابرند.

$$A\widehat{H}D = A\widehat{C}B = \frac{\overset{\frown}{\text{AD}}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{\text{BD}}}{۲} = \widehat{B}_۱ + \widehat{A}_۱ = \widehat{D}_۱ = A\widehat{D}H$$

دقت کنید که $D_۱$ در مثلث $\overset{\triangle}{ADB}$ زاویه ی خارجی است. بنابراین برابر با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با خودش می‌باشد.



۶۰ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{r} \text{AB} = \text{AC} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \text{زاویه خارجی } \widehat{A} = ۲\widehat{B} \\ \text{زاویه ظلی } \widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{\text{AB}}}{۲} \text{ و زاویه محاطی } \widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{\text{AD}}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{\text{AB}}}{۲} = \overset{\frown}{\text{AD}} \Rightarrow \overset{\frown}{\text{AB}} = ۲\overset{\frown}{\text{AD}} \quad (۱)$$

از طرف $\overset{\frown}{\text{DMB}} = ۲۲۲$ پس $\overset{\frown}{\text{BAD}} = ۳۶۰ - ۲۲۲ = ۱۳۸$ پس $\overset{\frown}{\text{AB}} + \overset{\frown}{\text{AD}} = ۱۳۸$ از (۱) داریم:

$$۲\overset{\frown}{\text{AD}} + \overset{\frown}{\text{AD}} = ۱۳۸ \Rightarrow \overset{\frown}{\text{AD}} = ۴۶ \Rightarrow \widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{\text{AD}}}{۲} = ۲۳ \Rightarrow \widehat{C} = ۲۳$$

۶۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

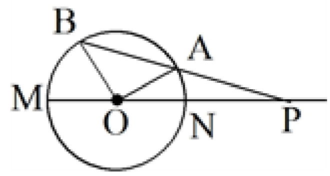
$\overset{\triangle}{OAB} : \mathrm{OA} = \mathrm{OB} = R, A\widehat{O}B = ۶۰^\circ \Rightarrow$ متساوی الاضلاع $\Rightarrow \mathrm{AB} = R$

$\mathrm{PM} = ۳\mathrm{R} \Rightarrow \mathrm{PN} = ۳\mathrm{R} - ۲\mathrm{R} = R$

$\mathrm{PA} \times \mathrm{PB} = \mathrm{PN} \times \mathrm{PM}$

$\mathrm{PA} = x \Rightarrow x(x+R) = ۳\mathrm{R}^۲ \Rightarrow x^۲ + \mathrm{R}x - ۳\mathrm{R}^۲ = ۰$

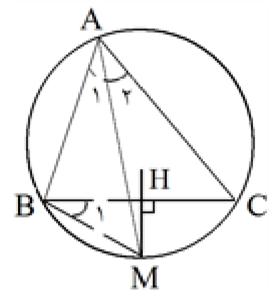
$$\Rightarrow x = \frac{-R \pm \sqrt{R^۲ + ۱۲\mathrm{R}^۲} \text{ منفی غیرقابل قبول}}{۲} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۱۳} - ۱}{۲}$$



۶۲ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. دایره‌ی محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی M روی این دایره قرار دارد.

$$A_۱ = \frac{۱۸۰ - (B+C)}{۲} = ۳۵$$

محاطی روبروی یک کمان $\widehat{B}_۱ = \widehat{A}_۱ = ۳۵$

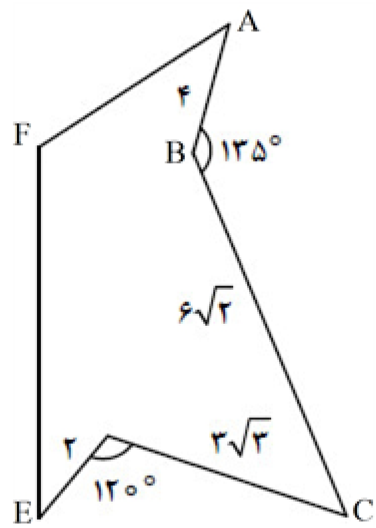


۶۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هم‌پیرامونی میزان افزایش مساحت برابر $۲S_{\mathrm{ABC}} + ۲S_{\mathrm{DEC}}$ است.

$$۲S_{\mathrm{ABC}} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\mathrm{AB} \times \mathrm{BC}\,\mathrm{Sin}\,۱۳۵^\circ\right) = ۴ \times ۶\sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲۴$$

$$۲S_{\mathrm{DEC}} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\mathrm{DE} \times \mathrm{DC}\,\mathrm{Sin}\,۱۲۰^\circ\right) = ۲ \times ۳\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۹$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $۳۳ = ۹ + ۲۴$ است.



۶۴ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در صورتی که بازتاب A نسبت به خط d نقطهٔ A' باشد و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند آنگاه بنابر مسئله هرون محیط مثلث ABC مینیمم است. پس $\widehat{C}_3 = \widehat{C}_1$ و $\widehat{C}_3 = \widehat{C}_2$ پس $C_1 = \widehat{C}_2$

بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{BCH}$ و $\overset{\triangle}{ACH'}$ متشابه می‌شوند.

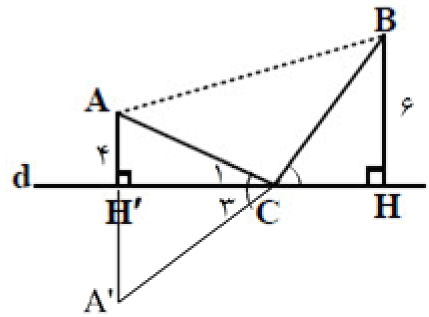
$$\overset{\triangle}{BCH} \sim \overset{\triangle}{ACH'} \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{BH}{AH'} \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{HH'} = \frac{۳}{۵} \ (۱)$$

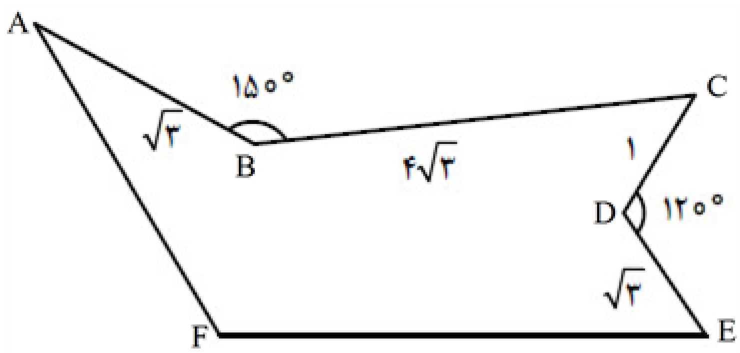
از طرف دیگر:

$$S_{ABHH'} = ۵۰\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}HH'(BH + AH') = ۵۰\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}HH'(۱۰) = ۵۰\sqrt{۳} \Rightarrow HH' = ۱۰\sqrt{۳} \ (۲)$$

$$(۲), (۱) \text{ از} \Rightarrow \frac{CH}{۱۰\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow CH = ۶\sqrt{۳}$$



۶۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هم پیرامونی میزان افزایش مساحت برابر $۲S_{ABC} + ۲S_{DEC}$ است.



$$۲S_{ABC} = ۲\left(\frac{۱}{۲}AB \times BC \operatorname{Sin} ۱۵۰^\circ\right)$$
$$= \sqrt{۳} \times ۴\sqrt{۳} \times \frac{۱}{۲} = ۶$$
$$۲S_{DEC} = ۲\left(\frac{۱}{۲}DC \times DE \operatorname{Sin} ۱۲۰^\circ\right)$$
$$= ۱ \times \sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $۶ + \frac{۳}{۲} = ۷/۵$ است.

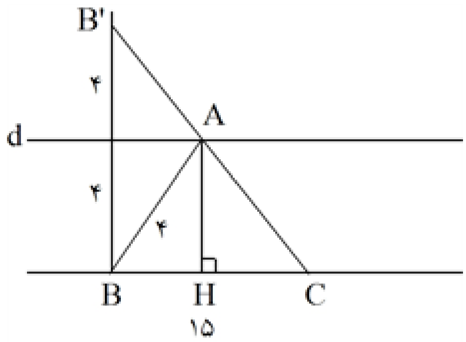
۶۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.
تذکر: سؤال موجود در دفترچه سازمان سنجش غلط بود و صورت سؤال به شکل صحیح ویرایش شد.

۶۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های با مساحت ۳۰ و ضلع مشترک ۱۵ واحد دارای ارتفاع برابر ۴ $= \frac{۲\times۳۰}{۱۵}$ $h =$ هستند.
اگر ABC مثلث موردنظر باشد و $BC = ۱۵$، آنگاه رأس A روی خط d موازی BC به فاصلهٔ ۴ $h =$ قرار دارد. برای پیدا کردن رأس A روی خط d به طوری که محیط ABC مینیمم باشد از مسئله هرون استفاده کرده بازتاب B را نسبت به d نقطهٔ B' نامیده از B' به C وصل می‌کنیم تا خط d را در A قطع کند در این صورت $AB + AC$ مینیمم است. در این صورت چون $AH \parallel BB'$ طبق قضیهٔ تالس $\frac{CH}{BC} = \frac{AH}{BB'} = \frac{۱}{۲}$ پس AH میانه است بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$$\overset{\triangle}{AHC} : AC^۲ = AH^۲ + CH^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۴^۲ + \left(\frac{۱۵}{۲}\right)^۲ = ۱۶ + \frac{۲۲۵}{۴} = \frac{۲۸۹}{۴} \Rightarrow AC = \frac{۱۷}{۲}$$

بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ABC} \text{ مینیمم محیط } = AB + AC + BC = \frac{۱۷}{۲} + \frac{۱۷}{۲} + ۱۵ = ۱۷ + ۱۵ = ۳۲$$



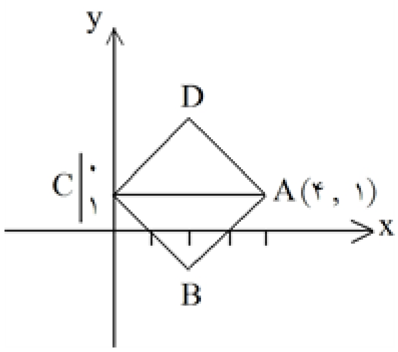
۶۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون بازتاب نقطهٔ C نسبت به محور yها بر خودش منطبق است پس نقطهٔ C روی محور yها قرار دارد پس مختصات C به صورت $(۰,۱)$ است. در ضمن عرض نقطهٔ D برابر ۳ است. فرض کنیم $D(x,۳)$ چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند پس رأس $B(x,y)$ بازتاب D نسبت به قطر AC است و چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند. پس:

$$A + C = B + D \Rightarrow (۴,۱) + (۰,۱) = (x,۳) + (x,y)$$

$$A+C = B+D \Rightarrow (۴,۱) + (۰,۱) = (x,۳) + (x,y) \Rightarrow \begin{cases} ۴ = ۲x \Rightarrow x = ۲ \\ ۲ = ۳ + y \Rightarrow y = -۱ \end{cases} \Rightarrow B(۲,-۱)$$

بنابراین:

$$OB = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$



۶۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هرون دو زاویهٔ $\widehat{C}_۱$ و $\widehat{C}_۲$ مساویند پس مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ $A\overset{\triangle}{C}H$ و $B\overset{\triangle}{C}H'$ متشابهند. اکنون بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

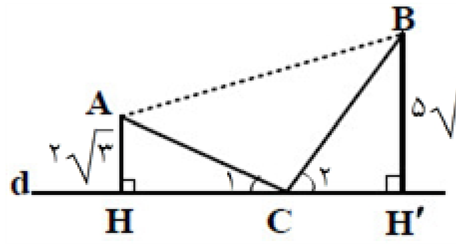
$$S_{\mathrm{ACH}} = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲\sqrt{۳})\mathrm{CH} = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow \mathrm{CH} = ۶$$

از طرف دیگر:

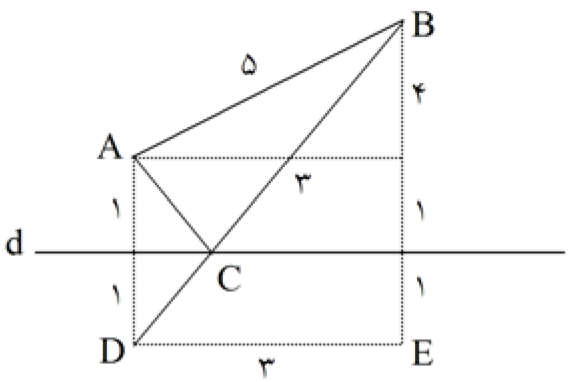
$$A\overset{\triangle}{C}H \sim B\overset{\triangle}{C}H' \Rightarrow \frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CH}'} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BH}'} \Rightarrow \frac{۶}{\mathrm{CH}'} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۵\sqrt{۳}} \Rightarrow \mathrm{CH}' = ۱۵$$

پس:

$$\mathrm{HH}' = \mathrm{CH} + \mathrm{CH}' = ۶ + ۱۵ = ۲۱$$



۷۰ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

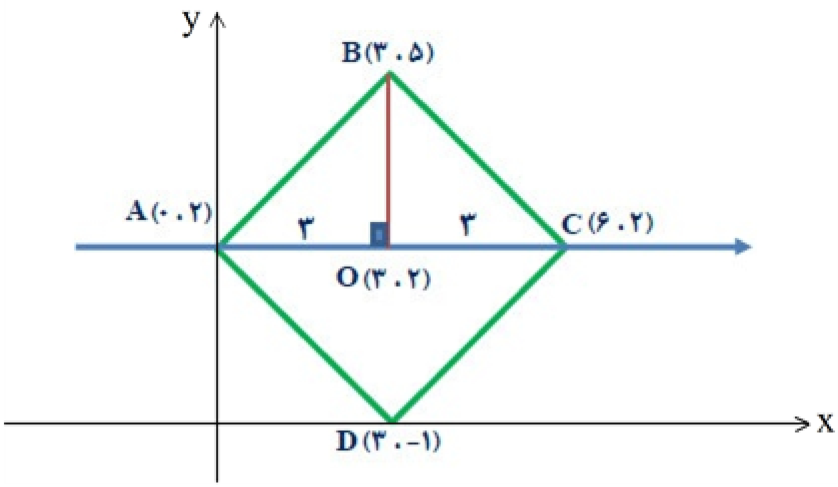


$$\mathrm{Min}\,(\mathrm{AC} + \mathrm{BC}) = \mathrm{BD}$$

$$\mathrm{BD}^۲ = \mathrm{BE}^۲ + \mathrm{DE}^۲ \Rightarrow \mathrm{BD}^۲ = ۶^۲ + ۳^۲$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{۴۵} = ۳\sqrt{۵}$$

۷۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه A نسبت به محور yها بر خودش منطبق شده است، پس A روی محور yها است.
چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگر و با هم مساویند. پس مختصات سایر رأس‌های مربع به صورت شکل زیر است.



فاصله B تا مبدأ مختصات $= \sqrt{۳^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۳۴}$

۷۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه‌ی D نسبت به محور xها بر خودش منطبق است پس نقطه‌ی D روی محور xها قرار دارد پس: $D=(۳,۰)$.

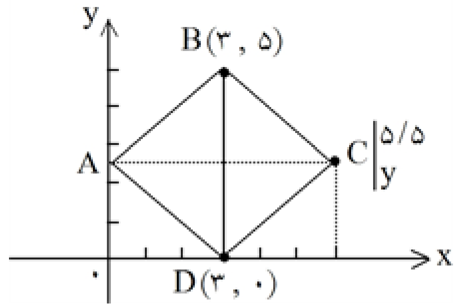
مسلماً بازتاب نقطه‌ی C نسبت به قطر BD نقطه‌ی A است زیرا قطرهای مربع عمود منصف یکدیگرند. فرض کنیم $A=(x,y)$ و $C=(۵/۵,y)$ در این صورت چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند بنابراین:

$$A+C=B+D\Rightarrow (x,y)+(۵/۵,y)=(۳,۵)+(۳,۰)=(x+۵/۵,۲y)=(۶/۵)$$

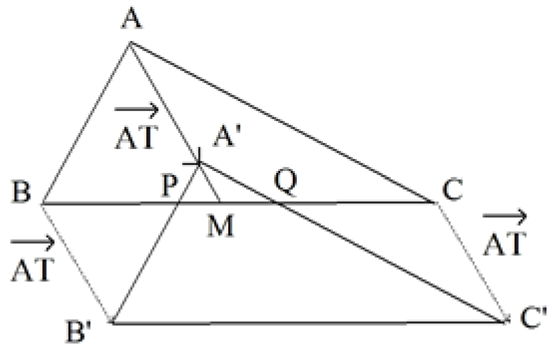
پس:
$$\begin{cases} x+۵/۵=۶\Rightarrow x=۰/۵\\ ۲y=۵\Rightarrow y=۲/۵\end{cases}\Rightarrow A(۰/۵,۲/۵)$$

بنابراین:

$$\mathrm{OA}=\sqrt{۰/۵^۲+۲/۵^۲}=\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲+\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۴}}=\sqrt{۶/۵}$$



۷۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید مثلث A'B'C' تصویر مثلث ABC تحت انتقال با بردار $\overrightarrow{\mathrm{AT}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ باشد. بنابر فرض سوال مساحت مثلث A'PQ مساوی $\frac{۱}{۱۶}$ مساحت مثلث ABC است داریم.



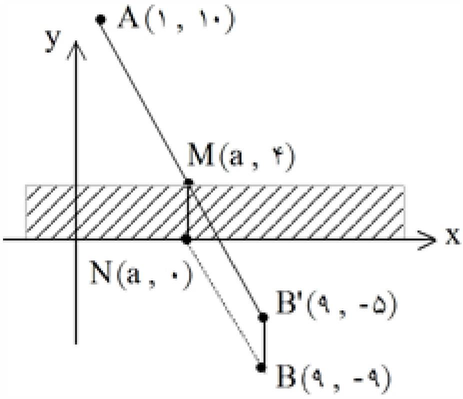
$$A'\overset{\triangle}{P}Q \sim A\overset{\triangle}{B}C \Rightarrow \frac{S_{A'PQ}}{S_{\mathrm{ABC}}}=\left(\frac{A'M}{\mathrm{AM}}\right)^۲ \xrightarrow{\frac{S_{A'PQ}}{S_{\mathrm{ABC}}}=\frac{۱}{۱۶}} \frac{A'M}{\mathrm{AM}}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}}$$

$$\frac{\mathrm{AA}'}{\mathrm{AM}}=\frac{۳}{۴} \xrightarrow{\mathrm{AM}=\frac{\mathrm{BC}}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴} \frac{\mathrm{AA}'}{۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow \mathrm{AA}'=۳$$

پس اندازه بردار $\overrightarrow{\mathrm{AT}}$ برابر ۳ است.

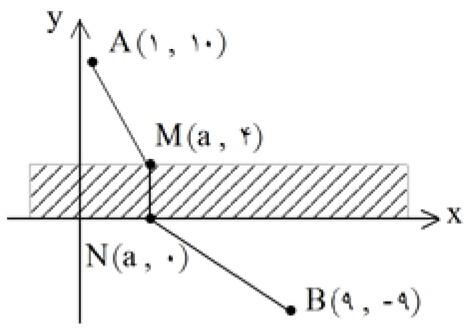
۷۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل پاره‌خط MN موازی محور yها است. پس طول مینیمم خط شکسته AMNB همان مسئله رودخانه است که می‌خواهیم پلی در مسیر آن حداث کنیم (شکل را ببینید)

در این صورت باید نقطه‌ی B را در راستای محور yها به اندازه‌ی ۴ واحد (طول MN) انتقال دهیم تا به B' برسیم و از B' به A وصل کرده تا M به دست آید. سپس عمود MN مسیر مینیمم AMNB را ایجاد می‌کند. طول این مسیر برابر $AB' + MN$ یعنی $AB' + ۴$ است.

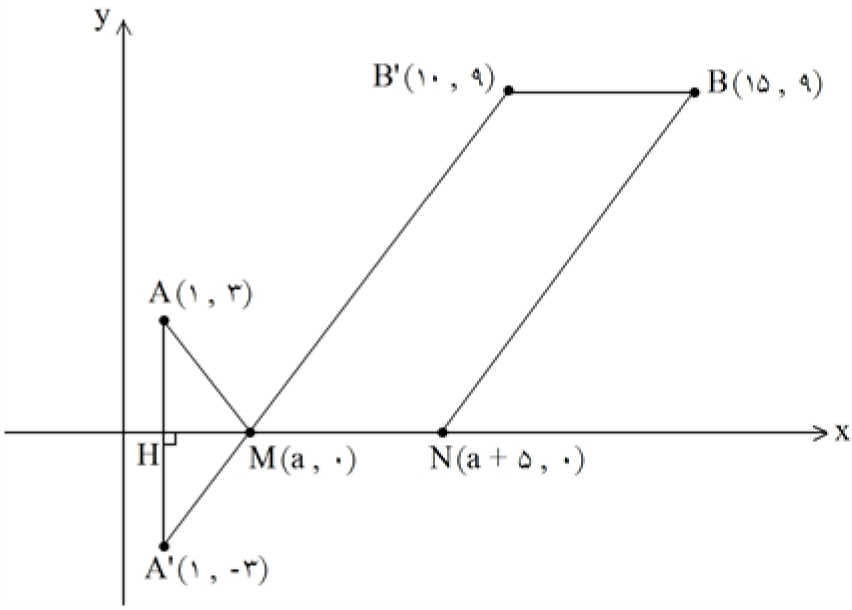


$$AB' = \sqrt{(۹-۱)^{۲} + (۱۰+۵)^{۲}} = \sqrt{۶۴ + ۲۲۵}$$
$$= \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$$

پس طول مسیر مینیمم مساوی $۱۷ + ۴ = ۲۱$ است.



۷۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



با توجه به شکل و موقعیت نقاط A , B , M , N این سؤال همان مسئله جاده‌ی ساحلی است که می‌خواهیم از A به B برویم به طوری که $MN = ۵$ قسمتی از مسیر در ساحل رودخانه باشد.

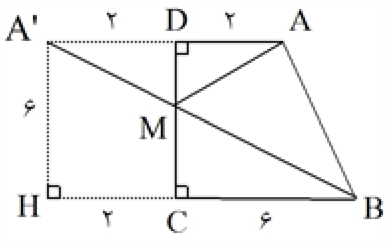
برای تعیین مسیر مینیمم ابتدا B را به اندازه‌ی ۵ واحد در راستای محور xها به طرف A منتقل می‌کنیم تا به B' برسیم و بازتاب A را نسبت به محور xها نقطه‌ی A' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا محور xها در M قطع شود آن‌گاه مسیر AMNB مسیر مینیمم است و طول آن برابر $A'B' + BB'$ است.

$$\begin{matrix} A'(۱, -۳) \\ B'(۱۰, ۹) \end{matrix} \Rightarrow A'B' = \sqrt{(۱۰ - ۱)^۲ + (۹ + ۳)^۲} = \sqrt{۸۱ + ۱۴۴} = \sqrt{۲۲۵} = ۱۵$$

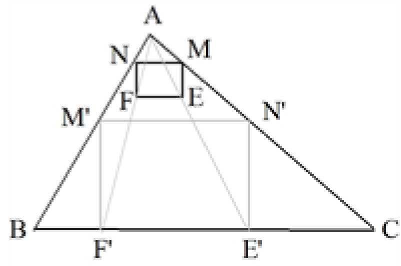
$$\text{مسیر مینیمم} = A'B' + BB' = ۱۵ + ۵ = ۲۰$$

۷۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به DC نقطه‌ی A' می‌نامیم، از A' به B وصل می‌کنیم تا DC را در نقطه‌ی M قطع کند. در این صورت AMB کوتاه‌ترین مسیر است یعنی مقدار $MA + MB$ کم‌ترین است و چون بازتاب ایزومتری است $MA + MB$ برابر A'B است. مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه‌ی A'HB می‌توان طول A'B را به دست آورد.

$$\overset{\triangle}{A'HB} : A'B^۲ = A'H^۲ + BH^۲ = ۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰۰ \Rightarrow A'B = ۱۰$$



۷۷ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مربع دلخواه MNEF به طوری‌که MN موازی با BC باشد را مطابق شکل ترسیم می‌کنیم. از A به E و F وصل کرده امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در E' و F' قطع کند. در نقاط E' و F' عمودهایی بر BC رسم کرده تا اضلاع AC و AB را در نقاط N' و M' قطع کند در این صورت M'N'E'F' مجانس مربع MNEF به مرکز A است پس M'N'E'F' مربع مطلوب است.



۷۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی دلخواه (x,y) تحت تجانسی به مرکز $(۲,۱)$ و ضریب $\frac{۳}{۲}$ به راحتی چنین است:

$$\begin{cases} x'-۲=\frac{۳}{۲}(x-۲) \\ y'-۱=\frac{۳}{۲}(y-۱) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x'=\frac{۳}{۲}x-۱ \\ y'=\frac{۳}{۲}y-\frac{۱}{۲} \end{array}$$

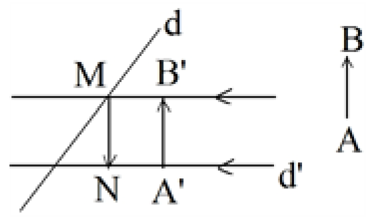
از این دو معادله، x و y را محاسبه کرده در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} x=\frac{۲}{۳}(x'+۱) \\ y=\frac{۲}{۳}\left(y'+\frac{۱}{۲}\right) \end{array} \xrightarrow{۲y+x=۶} \frac{۴}{۳}\left(y'+\frac{۱}{۲}\right)+\frac{۲}{۳}(x'+۱)=۶$$

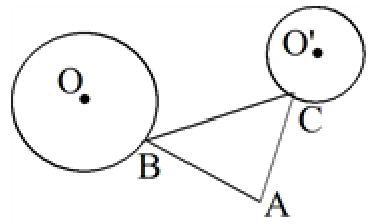
$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}y'+\frac{۲}{۳}x'+\frac{۴}{۳}=۶ \Rightarrow ۴y'+۲x'+۴=۱۸ \Rightarrow ۴y'+۲x'=۱۴ \Rightarrow ۲y'+x'=۷$$

۷۹ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث $\overset{\triangle}{OAE}$ و $\overset{\triangle}{OCD}$ مساویند پس $\mathrm{OE}=\mathrm{OD}$ و از طرفی $A\hat{O}C=۱۲۰$ پس $E\hat{O}D=۱۲۰$ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۳ و۴ درست هستند و در نتیجه گزینه‌ی ۲ غلط می‌باشد.

۸۰ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل یک نقطه از خط d' مثل A' را با بردار AB انتقال می‌دهیم تا به نقطه‌ی B' برسیم و از آن‌جا خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را درنقطه‌ی M قطع کند. حال نقطه‌ی M را با بردار BA انتقال می‌دهیم تا نقطه‌ی N واقع برخط d' حاصل می‌شود. اکنون پاره خط MN همان پاره‌خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $\mathrm{MB}'A'N$ متوازی الاضلاع است). توجه کنید که دوران ممکن است شیب خط و تجانس ممکن است طول پاره‌خط‌ها را تغییر دهد و به همین دلیل گزینه‌های ۳ و۴ از ابتدا به راحتی حذف می‌شوند.



۸۱ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین مثلث مطلوب باشد آن‌گاه نقاط B وC دوران یک‌دیگر به مرکز A و زاویه‌ی ۹۰ درجه هستند بنابراین دوران برای این رسم قابل استفاده است.



۸۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله کتاب درسی هندسه یازدهم فصل ۳ پاره‌خط PQ موازی BC است. پس:

$$\overset{\triangle}{ABC} : \mathrm{PQ} \,||\, \mathrm{BC} \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BC}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۵}}{۴\sqrt{۵}} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{BC}} = \frac{۱}{۴} \quad (۱)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیهٔ نیمساز می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{AMC} : \text{نیمساز}\ \mathrm{MP} \Rightarrow \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MC}} \Rightarrow \frac{\sqrt{۵}}{۳\sqrt{۵}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MC}} \Rightarrow \mathrm{MC} = ۳\,\mathrm{AM}$$

$$\overset{\triangle}{AMC} : \text{نیمساز}\ \mathrm{MP} \Rightarrow \mathrm{MP}^۲ = \mathrm{AM} \times \mathrm{MC} - \mathrm{AP} \times \mathrm{PC}$$

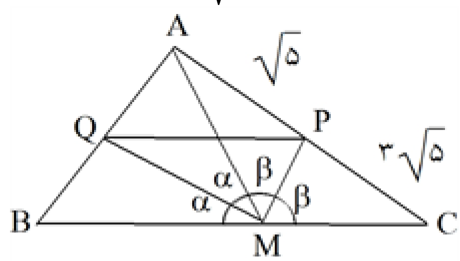
$$\Rightarrow \sqrt{۳۳}^{\,۲} = \mathrm{AM} \times ۳\mathrm{AM} - (\sqrt{۵})(۳\sqrt{۵}) \Rightarrow ۳۳ = ۳\mathrm{AM}^۲ - ۱۵ \Rightarrow ۱۱ = \mathrm{AM}^۲ - ۵$$

$$\Rightarrow \mathrm{AM}^۲ = ۱۶ \Rightarrow \mathrm{AM} = ۴ \Rightarrow \mathrm{MC} = ۱۲ \Rightarrow \mathrm{BC} = ۲۴ \xrightarrow{\text{از (۱)}} \frac{\mathrm{PQ}}{۲۴} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \mathrm{PQ} = ۶$$

در ضمن MP و MQ نیمساز زاویه‌های AMC و AMB هستند پس: $۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$ پس: $\alpha + \beta = ۹۰^\circ$.

در نتیجه مثلث MPQ قائم‌الزاویه است. بنابراین:

$$\mathrm{PQ}^۲ = \mathrm{MP}^۲ + \mathrm{MQ}^۲ \Rightarrow ۶^۲ = \sqrt{۳۳}^{\,۲} + \mathrm{MQ}^۲ \Rightarrow \mathrm{MQ}^۲ = ۳۶ - ۳۳ = ۳ \Rightarrow \mathrm{MQ} = \sqrt{۳}$$



۸۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از فرض $A\widehat{D}B = B\widehat{A}D$ نتیجه می‌گیریم مثلث $\overset{\triangle}{ADB}$ متساوی‌الساقین است پس $AB = BD$.

اکنون با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم.

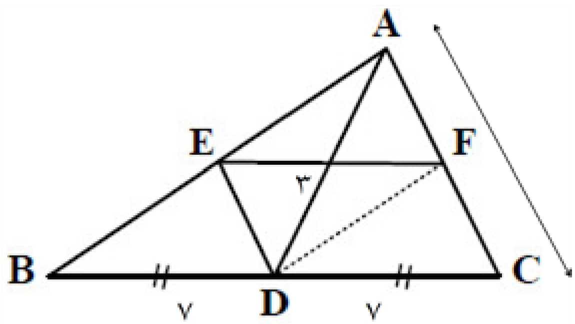
$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABC}: \dfrac{BC}{\operatorname{Sin} x} = \dfrac{AB}{\operatorname{Sin} ۴۵^\circ} \\ \overset{\triangle}{BDC}: \dfrac{BC}{\operatorname{Sin} y} = \dfrac{BD}{\operatorname{Sin} ۱۲۰^\circ} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تقسیم می کنیم}} \dfrac{\dfrac{BC}{\operatorname{Sin} y}}{\dfrac{BC}{\operatorname{Sin} x}} = \dfrac{\dfrac{BD}{\operatorname{Sin} ۱۲۰^\circ}}{\dfrac{AB}{\operatorname{Sin} ۴۵^\circ}} \xrightarrow{AB=BD}$$

$$\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} y} = \frac{\operatorname{Sin} ۴۵^\circ}{\operatorname{Sin} ۱۲۰^\circ} \quad (۱)$$

از طرف دیگر $x + y = ۹۰$ پس $\operatorname{Sin} y = \operatorname{Cos} x$ داریم:

$$\text{از } (۱) \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

۸۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:



$$\overset{\triangle}{ABD}: \text{نیمساز } DE \Rightarrow \frac{AE}{EBB} = \frac{AD}{DB} = \frac{۳}{۷} \quad (۱)$$

اکنون از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم.

$$\overset{\triangle}{ABC}: EF \,||\, BC \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \xrightarrow{\text{از } (۱)} \frac{AF}{FC} = \frac{۳}{۷} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{AF}{AC} = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow \frac{AF}{۸} = \frac{۳}{۱۰}$$

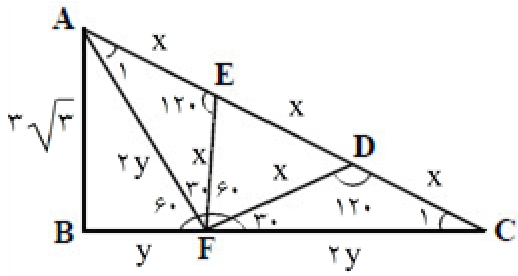
$$\Rightarrow AF = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow FC = ۸ - \frac{۱۲}{۵} = \frac{۲۸}{۵}$$

بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ADC}: \text{نیمساز } DF \Rightarrow DF^۲ = AD \times DC - AF \times FC \Rightarrow DF^۲ = ۳ \times ۷ - \left(\frac{۱۲}{۵}\right)\left(\frac{۲۸}{۵}\right)$$

$$= ۲۱ - ۲۱ \times \frac{۱۶}{۲۵} = ۲۱\left(۱ - \frac{۱۶}{۲۵}\right) = ۲۱ \times \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow DF = \frac{۳}{۵}\sqrt{۲۱} = ۰/۶\sqrt{۲۱}$$

۸۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نظر می‌گیریم $\mathrm{AE} = \mathrm{ED} = \mathrm{DC} = x$ چون مثلث EFD متساوی‌الاضلاع است پس:
$\mathrm{EF} = \mathrm{FD} = x$. در نتیجه هر دو مثلث $\overset{\triangle}{AEF}$ و $\overset{\triangle}{DFC}$ متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ۱۲۰° هستند پس
$\widehat{C}_۱ = \widehat{A}_۱ = ۳۰^\circ$ پس $\mathrm{AF} = \mathrm{FC}$.



از طرف دیگر با استفاده از فرض $\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BC}} = \frac{۲}{۳}$ در نظر می‌گیریم $\mathrm{AF} = ۲y$ و $\mathrm{BC} = ۳y$ پس $\mathrm{FC} = ۲y$ پس $\mathrm{BF} = y$.

اکنون با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم: (با توجه به شکل مشخص است که: $A\widehat{F}B = ۶۰^\circ$)

$$\overset{\triangle}{ABF} : \mathrm{AB}^۲ = \mathrm{AF}^۲ + \mathrm{BF}^۲ - ۲\,\mathrm{AF} \times \mathrm{BF}\,\mathrm{Cos}\,۶۰^\circ \Rightarrow (۳\sqrt{۳})^۲ = (۲y)^۲ + y^۲ - ۲(۲y)(y)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow ۲۷ = ۴y^۲ + y^۲ - ۲y^۲ \Rightarrow ۲۷ = ۳y^۲ \Rightarrow y^۲ = ۹ \Rightarrow y = ۳$$

بنابراین: $\mathrm{FC} = ۲y = ۶$

۸۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در چهارضلعی ABCD مجموع زوایای داخلی برابر ۳۶۰° است پس:

$$\widehat{A} + A\widehat{B}C + \widehat{C} + A\widehat{D}C = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{A} + ۱۰۵^\circ + \alpha + ۱۶۵^\circ = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \alpha = ۹۰ \Rightarrow \mathrm{Sin}\,\widehat{A} = \mathrm{Cos}\,\alpha \quad (۱)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیهٔ سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{ABD} : \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{Sin}\,۳۰} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{Sin}\,\widehat{A}} \xrightarrow{\text{از }(۱)} \frac{\mathrm{AD}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{Cos}\,\alpha} \quad (۲)$$

$$\overset{\triangle}{BDC} : \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{Sin}\,۱۳۵} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{Sin}\,\alpha} \Rightarrow \frac{\mathrm{BC}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{Sin}\,\alpha} \quad (۳)$$

اکنون از تقسیم روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\sqrt{۲}\,\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} \xrightarrow{\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}} = \frac{۲}{۳}} \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} = \tan\alpha$$

۸۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیهٔ نیمساز می‌نویسیم.

$$\overset{\triangle}{ABD}: \text{DE نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{۳}{۵}$$

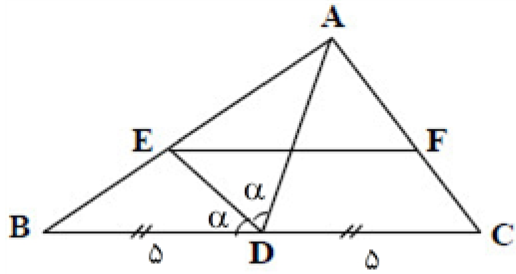
$$\overset{\triangle}{ABC}: EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} = \frac{۳}{۵}$$

پس $\frac{AD}{DC} = \frac{AF}{FC}$ در نتیجه در مثلث ADC پاره‌خط DF نیمساز زاویه $\overset{\triangle}{ADC}$ است.

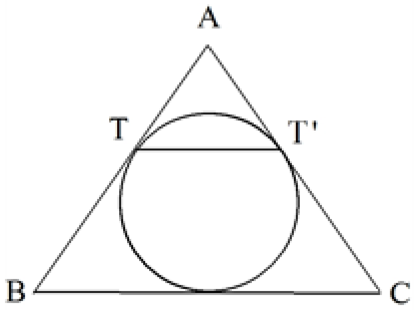
$$\frac{AF}{FC} = \frac{۳}{۵} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow \frac{AF}{۷} = \frac{۳}{۸} \Rightarrow AF = \frac{۲۱}{۸} \Rightarrow FC = ۷ - \frac{۲۱}{۸} = \frac{۳۵}{۸}$$

$$\overset{\triangle}{ADC}: \text{DF نیمساز} \Rightarrow DF^۲ = AD \times DC - AF \times FC = ۳\times۵ - \frac{۲۱}{۸}\times\frac{۳۵}{۸} = ۱۵\left(۱ - \frac{۴۹}{۶۴}\right)$$

$$\Rightarrow ۱۵\times\frac{۱۵}{۶۴} \Rightarrow DF = \frac{۱۵}{۸}$$



۸۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک قضیه کسینوس‌های $\text{Cos}\,\widehat{A}$ را به دست می‌آوریم:



$$\overset{\triangle}{ABC}: BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB \times AC\,\text{Cos}\,\widehat{A}$$

$$\Rightarrow ۷^۲ = ۴^۲ + ۵^۲ - ۲(۴)(۵)\,\text{Cos}\,\widehat{A} \Rightarrow \text{Cos}\,\widehat{A} = -\frac{۱}{۵}$$

از طرف دیگر داریم. $AT = AT' = P - a = \frac{۴+۵+۷}{۲} - ۷ = ۱$

بنابراین:

$$\overset{\triangle}{ATT'}: TT'^۲ = AT^۲ + AT'^۲ - ۲AT \times AT'\,\text{Cos}\,\widehat{A} \Rightarrow TT'^۲ = ۱ + ۱ - ۲(۱)(۱)\left(-\frac{۱}{۵}\right)$$

$$= ۲ + \frac{۲}{۵} = \frac{۱۲}{۵} \Rightarrow TT' = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۵}} \Rightarrow TT' = \frac{۲\sqrt{۱۵}}{۵} = \frac{۴\sqrt{۱۵}}{۱۰} = ۰/۴\sqrt{۱۵}$$

۸۹ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در شکل A' بازتاب A نسبت به خط d است چون بازتاب تبدیل ایزومتری است پس $OA = OA' = ۱۰$. در ضمن ارتفاع $A'H$ بنابر فرض برابر ۹/۶ است. پس:

$$\overset{\triangle}{OA'H} : OH^۲ = OA'^۲ - A'H^۲ \Rightarrow OH^۲ = ۱۰^۲ - ۹/۶^۲$$
$$= (۱۰ - ۹/۶)(۱۰ + ۹/۶) \Rightarrow OH^۲ = (۰/۴)(۱۹/۶)$$
$$= \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۱۹۶}{۱۰} = \frac{۴ \times ۴ \times ۴۹}{۱۰۰} \Rightarrow OH = \frac{۴ \times ۷}{۱۰} = \frac{۱۴}{۵}$$

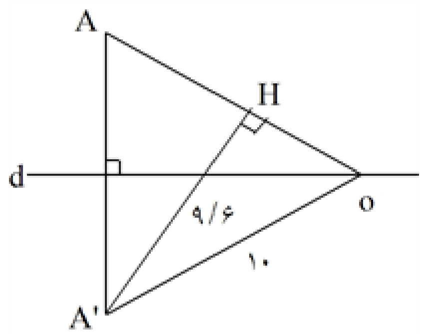
در نتیجه:
$$\overset{\triangle}{OA'H} : \operatorname{Cos}\widehat{O} = \frac{OH}{OA'} = \frac{\frac{۱۴}{۵}}{۱۰} = \frac{۱۴}{۵۰} = \frac{۷}{۲۵}$$

اکنون با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم.

$$\overset{\triangle}{OAA'} : AA'^۲ = OA^۲ + O'A'^۲ \pm ۲\,OA \times OA'\operatorname{Cos}\widehat{O} \Rightarrow AA'^۲ = ۱۰۰ + ۱۰۰ \pm ۲(۱۰۰)\left(\frac{۷}{۲۵}\right)$$
$$\Rightarrow AA'^۲ = ۲۰۰ \pm ۵۶ \Rightarrow \begin{cases} AA'^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow AA' = ۱۶ \\ AA'^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow AA' = ۱۲ \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای AA' برابر ۲۸ است.

(توجه کنید زاویهٔ $\widehat{O}$ در مثلث AOA' می‌تواند حاده یا منفرجه باشد به همین علت $\operatorname{Cos}\widehat{O}$ را برابر $\pm\frac{۷}{۲۵}$ قرار داده‌ایم.)



۹۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله کتاب درسی، EF موازی BC است. پس:

$$\mathrm{EF} \parallel \mathrm{BC} \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AB}} \Rightarrow \frac{\mathrm{EF}}{۱۰} = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۱۵\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{EF} = ۸$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز}\ \mathrm{DF} : \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{BF}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} \Rightarrow \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲}} = \frac{\mathrm{AD}}{۵} \Rightarrow \mathrm{AD} = ۲۰$$

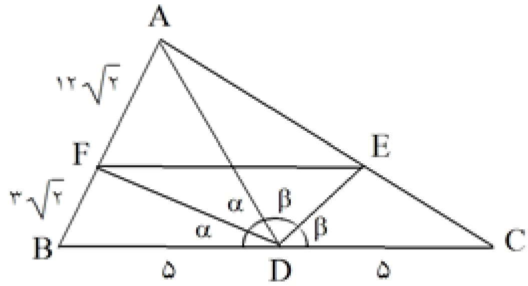
$$\text{نیمساز}\ \mathrm{DF} \Rightarrow \mathrm{DF}^۲ = \mathrm{AD} \times \mathrm{BD} - \mathrm{AF} \times \mathrm{BF} \Rightarrow \mathrm{DF}^۲ = ۲۰ \times ۵ - ۱۲\sqrt{۲} \times ۳\sqrt{۲} = ۱۰۰ - ۷۲$$

$$\Rightarrow \mathrm{DF}^۲ = ۲۸ \Rightarrow \mathrm{DF} = \sqrt{۲۸}$$

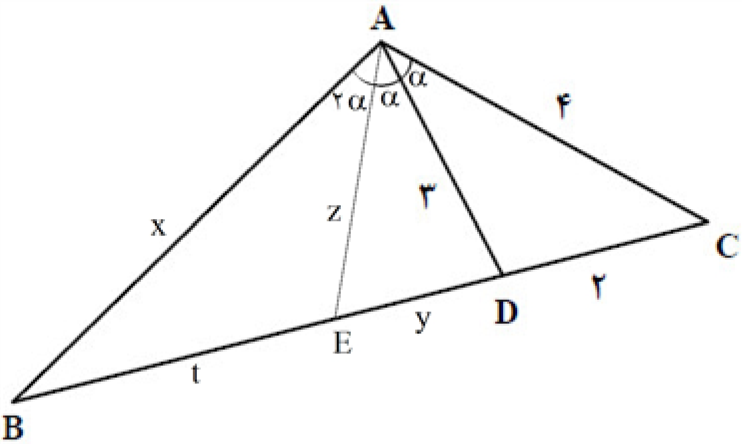
در ضمن DE و DF نیمساز زاویه‌های $\overset{\triangle}{ADC}$ و $\overset{\triangle}{ADB}$ هستند پس: $۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$

در نتیجه: $\alpha + \beta = ۹۰^\circ$ پس مثلث DEF قائم‌الزاویه است.

$$\overset{\triangle}{DEF} : \mathrm{DE}^۲ = \mathrm{EF}^۲ - \mathrm{DF}^۲ = ۸^۲ - \sqrt{۲۸}^{\,۲} = ۶۴ - ۲۸ = ۳۶ \Rightarrow \mathrm{DE} = ۶$$



۹۱ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\overset{\triangle}{AEC} : \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DE}} \Rightarrow \frac{۴}{z} = \frac{۲}{y} \Rightarrow z = ۲y$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{AD}^۲ = \mathrm{AC}.\,\mathrm{AE} - \mathrm{CDED} \\ ۳^۲ = ۴ \times z - ۲y \Rightarrow ۹ = ۶y\end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{۳}{۲}$$

$$z = ۳ \text{ و } \mathrm{EC} = ۳/۵$$

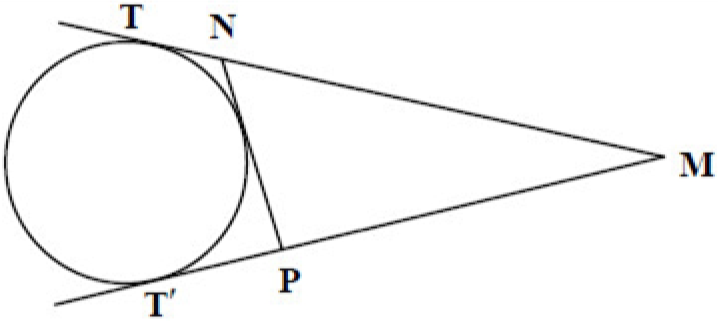
$$\overset{\triangle}{ABC} : \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} \Rightarrow \frac{x}{۴} = \frac{t}{۳/۵} \Rightarrow t = \frac{۷}{۸}x$$

$$\mathrm{AE}^۲ = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} - \mathrm{BE}.\,\mathrm{EC}$$

$$۳^۲ = ۴x - ۳/۵ \xrightarrow{t = \frac{۷}{۸}x} ۹ = \frac{۱۵}{۱۶}x \Rightarrow x = ۹/۶$$

$$\text{محیط} = ۹/۶ + ۴ + ۳ + ۳/۵ + ۸/۴ = ۲۵/۵$$

۹۲ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\mathrm{MT} = \mathrm{MT}' = P$ پس $P = ۱۸$ در نتیجه محیط مثلث MNP برابر ۳۶ است پس:



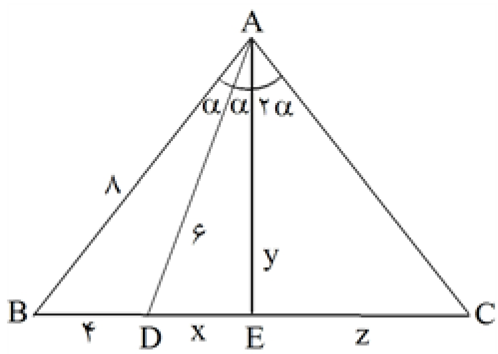
$$\mathrm{MN} + \mathrm{MP} + \mathrm{NP} = ۳۶$$
$$۱۵ + ۱۲ + \mathrm{NP} = ۳۶ \Rightarrow \mathrm{NP} = ۹$$

از طرف دیگر اگر r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع NP باشد داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} \xrightarrow{a=\mathrm{NP}=۹} r_a = \frac{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{P-a} = \frac{\sqrt{۱۸(۱۸-۱۵)(۱۸-۱۲)(۱۸-۹)}}{۱۸-۹}$$
$$= \frac{\sqrt{۱۸\times۳\times۶\times۹}}{۹} = \frac{۱۸\times۳}{۹} = ۶$$

۹۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویهٔ $\widehat{A}$ در مثلث ABC یعنی AE را رسم می‌کنیم. در این صورت AD نیمساز مثلث ABE است. با استفاده از قضیهٔ نیمساز می‌نویسیم:

$$\overset{\triangle}{ABE} : \text{نیمساز } \mathrm{AD} \Rightarrow \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DE}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}} \Rightarrow \frac{۴}{x} = \frac{۸}{y}$$
$$\Rightarrow y = ۲x \ (۱)$$
$$\overset{\triangle}{ABE} : \text{نیمساز } \mathrm{AD} \Rightarrow \mathrm{AD}^۲ = \mathrm{AB}\times\mathrm{AE} - \mathrm{BD}\times\mathrm{DE}$$
$$\Rightarrow ۳۶ = ۸y - ۴x \xrightarrow{\text{از } (۱)} ۳۶ = ۱۶x - ۴x \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{\text{از } (۱)} y = ۶$$
$$\overset{\triangle}{ABC} : \text{نیمساز } \mathrm{AE} \Rightarrow \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \Rightarrow \frac{۴+x}{z} = \frac{۸}{\mathrm{AC}} \xrightarrow{x=۳} \frac{۷}{z} = \frac{۸}{\mathrm{AC}} \Rightarrow z = \frac{۷}{۸}\mathrm{AC}$$
$$\overset{\triangle}{ABC} : \text{نیمساز } \mathrm{AE} \Rightarrow \mathrm{AE}^۲ = \mathrm{AB}\times\mathrm{AC} - \mathrm{BE}\times\mathrm{EC} \Rightarrow y^۲ = ۸\mathrm{AC} - (۴+x)(z) \xrightarrow[y=۶]{\text{از } (۲)}$$
$$۳۶ = ۸\mathrm{AC} - ۷\times\frac{۷}{۸}\mathrm{AC} \Rightarrow ۳۶ = \left(۸ - \frac{۴۹}{۸}\right)\mathrm{AC} \Rightarrow \mathrm{AC} = \frac{۳۶}{\frac{۱۵}{۸}} \Rightarrow \mathrm{AC} = \frac{۸\times۳۶}{۱۵} = \frac{۹۶}{۵} = ۱۹/۲$$



۹۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم.

$$\text{نیمساز } AD = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۳/۵}{۲/۵} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{۳۵}{۲۵} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۷}{۵} = \frac{AB}{AC}$$

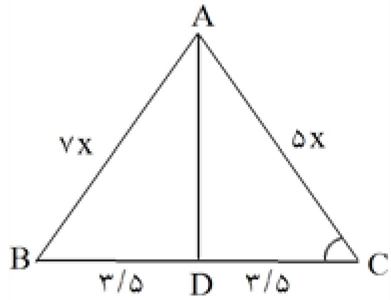
با توجه به تناسب بدست آمده فرض می‌کنیم $AB = ۷x$ و $AC = ۵x$ اکنون از قضیه‌ی کسینوسها داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ - ۲AC \times BC \cos ۶۰^\circ \xrightarrow{BC=۶} ۴۹x^۲ = ۲۵x^۲ + ۳۶ - ۲(۵x)(۶)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow ۴۹x^۲ = ۲۵x^۲ + ۳۶ - ۳۰x \Rightarrow ۲۴x^۲ + ۳۰x - ۳۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۶} ۴x^۲ + ۵x - ۶ = ۰$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۵ + ۹۶}}{۸} = \frac{-۵ \pm \sqrt{۱۲۱}}{۸} = \frac{-۵ \pm ۱۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{-۵ + ۱۱}{۸} \Rightarrow x = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین ضلع کوچکتر این مثلث یعنی AC برابر $۵x = ۵ \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۴} = ۳/۷۵$ است. (توجه کنید اگر $BD = ۲/۵$ و $DC = ۳/۵$ آنگاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB > AC$)

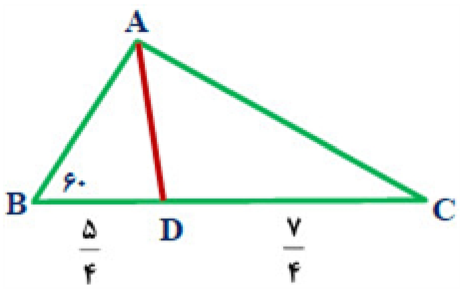


۹۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{قضیه نیمساز}: \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{۷}{۴}}{\frac{۵}{۴}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{۷}{۵} \Rightarrow AC = \frac{۷}{۵}AB$$

$$\text{قضیه کسینوس‌ها}: AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲AB \times BC \times \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{۴۹}{۲۵}AB^۲ = AB^۲ + ۳^۲ - ۲AB \times ۳ \times \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲۴}{۲۵}AB^۲ + ۳AB - ۹ = ۰ \begin{cases} AB = -۵ \quad \text{غ ق ق} \\ AB = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow AC = \frac{۲۱}{۸} \end{cases}$$



$$AD^۲ = AC \times AB - DC \times BD$$

$$AD^۲ = \frac{۲۱}{۸} \times \frac{۱۵}{۸} - \frac{۵}{۴} \times \frac{۷}{۴} = \frac{۲۵ \times ۷}{۶۴} \Rightarrow AD = \frac{۵}{۸}\sqrt{۷}$$

۹۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC فرض کنیم $AB = ۴x$ و $AC = ۵x$ و $BC = ۶x$. در این صورت زاویهٔ B زاویهٔ متوسط است. فرض کنیم BD نیمساز زاویهٔ B باشد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (۱)$$

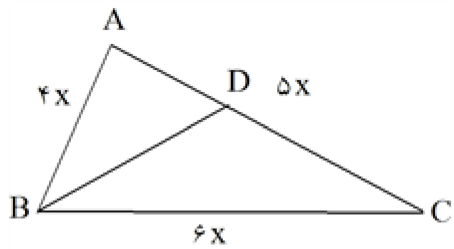
از طرف دیگر بنابر قضیهٔ نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$\text{نیمساز } BD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$$

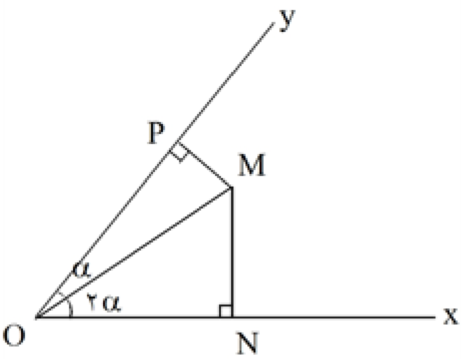
$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۴x+۶x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۱۰x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۲}{۵} \ (۲)$$

بنابراین:

$$\text{از } (۱), (۲) \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{۵}{۲}$$



۹۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره‌های محیطی دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMN و OMP مساوی $R = \frac{OM}{۲}$ است. پس با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم.



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{OMN} : \frac{MN}{\text{Sin } ۲\alpha} = ۲R \\ \overset{\triangle}{OMP} : \frac{MP}{\text{Sin } \alpha} = ۲R \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{\text{Sin } ۲\alpha} = \frac{MP}{\text{Sin } \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{\text{Sin } ۲\alpha}{\text{Sin } \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{۲ \text{Sin } \alpha \text{Cos } \alpha}{\text{Sin } \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = ۲ \text{Cos } \alpha \ (۱)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OMP می‌نویسیم:

$$\text{Cos } \alpha = \frac{OP}{OM} \quad (۲)$$

$$\text{از } (۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{۲\,OP}{OM}$$

۹۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل شش‌ضلعی MNPQRS که درون مثلث ABC محاط شده است، بر دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث، محیط است. بنابراین کافی است شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را محاسبه کرده و سپس طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محیطی این دایره را به دست آوریم.

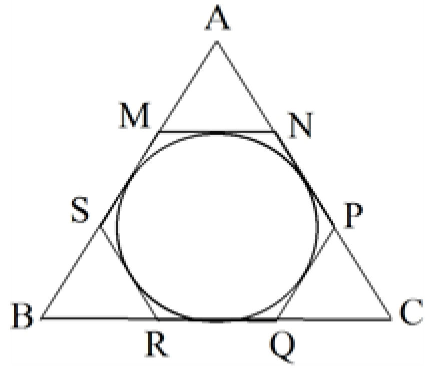
$$p = \frac{۱۳ + ۱۴ + ۱۵}{۲} = ۲۱$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{۲۱ \times ۸ \times ۷ \times ۶} = ۸۴$$

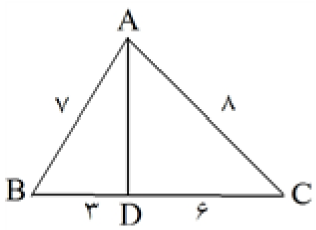
$$r = \frac{S}{p} = \frac{۸۴}{۲۱} = ۴$$

$$\mathrm{MN} = ۲r\tan\frac{۱۸۰^\circ}{۶} = ۲ \times ۴ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

توجه کنید شش‌ضلعی منتظم در مثلث ABC محاط شده است پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باید باشد که خلاف فرض سؤال است و اگر منتظم در نظر گرفته نشود هر ضلع آن هر اندازه‌ای می‌تواند داشته باشد.



۹۹ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی استوارت داریم.

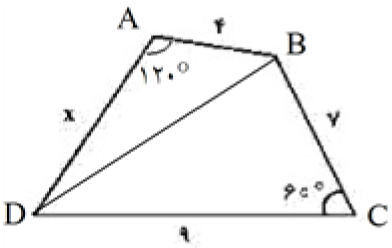


$$\mathrm{AB}^۲ \times \mathrm{DC} + \mathrm{AC}^۲ \times \mathrm{BD} = \mathrm{AD}^۲ \times \mathrm{BC} + \mathrm{BD} \times \mathrm{DC} \times \mathrm{BC}$$

$$\Rightarrow ۴۹ \times ۶ + ۶۴ \times ۳ = \mathrm{AD}^۲ \times ۹ + ۳ \times ۶ \times ۹ \xrightarrow{\div ۳} ۴۹ \times ۲ + ۶۴$$

$$= \mathrm{AD}^۲ \times ۳ + ۶ \times ۹ \Rightarrow ۱۶۲ = ۳\mathrm{AD}^۲ + ۵۴ \Rightarrow \mathrm{AD}^۲ = ۳۶ \Rightarrow \mathrm{AD} = ۶$$

۱۰۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چهارضلعی ABCD محاطی است پس زاویه‌های مقابل آن مکمل‌اند پس $\widehat{A} = ۱۲۰$. با رسم قطر BD و استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌نویسیم:



$$\overset{\triangle}{BDC} : \mathrm{BD}^۲ = \mathrm{BC}^۲ + \mathrm{DC}^۲ - ۲\,\mathrm{BC} \times \mathrm{DC}\ \mathrm{Cos}\, ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \mathrm{BD}^۲ = ۴۹ + ۸۱ - ۲(۷)(۹)\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۶۷ \Rightarrow \mathrm{BD} = \sqrt{۶۷}$$

$$\overset{\triangle}{ABD} : \mathrm{BD}^۲ = \mathrm{AB}^۲ + \mathrm{AD}^۲ - ۲\,\mathrm{AB} \times \mathrm{AD}\ \mathrm{Cos}\, ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۶۷ = ۱۶ + x^۲ - ۲(۴)(x)\left(-\frac{۱}{۲}\right)$$

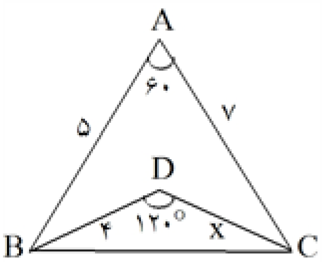
$$۶۷ = ۱۶ + x^۲ + ۴x \Rightarrow x^۲ + ۴x - ۵۱ = ۰$$

جواب‌های این معادله را از دستور b' به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b'\pm\sqrt{b'^۲ - \mathrm{ac}}}{a} = \frac{-۲\pm\sqrt{۴ + ۵۱}}{۱} \Rightarrow x = -۲ + \sqrt{۵۵}$$

بنابراین $x + ۲$ مساوی $\sqrt{۵۵}$ است.

۱۰۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از B به C وصل کرده با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌نویسیم.



$$\overset{\triangle}{ABC} : \mathrm{BC}^۲ = \mathrm{AB}^۲ + \mathrm{AC}^۲ - ۲\,\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}\ \mathrm{Cos}\, ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \mathrm{BC}^۲ = ۲۵ + ۴۹ - ۲(۵)(۷)\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۳۹$$

$$\overset{\triangle}{BDC} : \mathrm{BC}^۲ = \mathrm{BD}^۲ + \mathrm{DC}^۲ - ۲\,\mathrm{BD} \times \mathrm{DC}\ \mathrm{Cos}\, ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۳۹ = ۱۶ + x^۲ - ۲(۴)(x)\left(-\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow ۳۹ = ۱۶ + x^۲ + ۴x$$

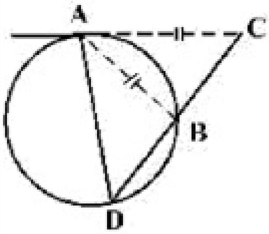
$$\Rightarrow x^۲ + ۴x - ۲۳ = ۰$$

این معادله را با فرمول 'b حل می‌کنیم.

$$x = \frac{-b'\pm\sqrt{b'^۲ - \mathrm{ac}}}{a} = \frac{-۲\pm\sqrt{۴ + ۲۳}}{۱} = -۲\pm\sqrt{۲۷}$$

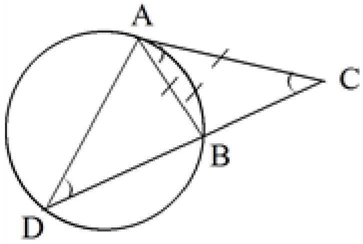
مسلماً $x = -۲ - \sqrt{۲۷}$ قابل قبول نیست پس $x = -۲ + \sqrt{۲۷}$ بنابراین $x + ۲ = \sqrt{۲۷}$.

۱۰۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه‌ی طولی تساوی $CA^۲ = CB \times CD$ برقرار است و بنابر قضیه‌ی استوارت در مثلث ADC می‌نویسیم:



$$AC^۲ \times BD + AD^۲ \times BC = AB^۲ \times DC + BD \times BC \times DC$$
$$\xrightarrow[AB=AC]{AC^۲=CB \times CD} CB \times \cancel{CD} \times BD + AD^۲ \times BC$$
$$= CB \times CD \times DC + BD \times \cancel{BC} \times DC \Rightarrow AD^۲ \times BC$$
$$= CB \times CD \times CD \Rightarrow AD^۲ = CD^۲ \Rightarrow AD = CD$$

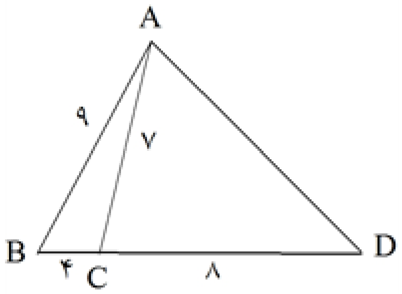
راه حل دوم: دو زاویه‌ی ظلی $A_۱$ و زاویه محاطی D برابرند زیرا:



$$\left.\begin{array}{l} \text{ظلی } \widehat{A}_۱ = \dfrac{\widehat{AB}}{۲} \\ \text{محاطی } \widehat{D} = \dfrac{\widehat{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \widehat{A}_۱ = \widehat{D} \\ \widehat{C} = \widehat{C} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{(\text{ز ز})} A\overset{\triangle}{B}C \sim A\overset{\triangle}{D}C \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} \xrightarrow{AB=AC} AD = DC$$

۱۰۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی استوارت می‌نویسیم:



$$AB^۲ \times CD + AD^۲ \times BC = AC^۲ \times BD + BC \times CD \times BD$$
$$\Rightarrow ۸۱ \times ۸ + ۴AD^۲ = ۴۹ \times ۱۲ + ۴ \times ۸ \times ۱۲ \xrightarrow{\div ۴}$$
$$۱۶۲ + AD^۲ = ۱۴۷ + ۹۶ \Rightarrow AD^۲ = ۸۱ \Rightarrow AD = ۹$$

۱۰۴ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

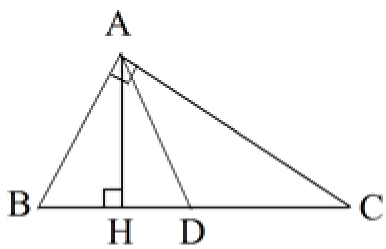
$$A\overset{\triangle}{B}C : BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۹ = BH \times ۵ \Rightarrow BH = \frac{۹}{۵}$$

از طرفی طبق قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{۳}{۴ + ۳} \Rightarrow \frac{BD}{۵} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow BD = \frac{۱۵}{۷}$$

$$DH = BD - BH = \frac{۱۵}{۷} - \frac{۹}{۵} = \frac{۷۵ - ۶۳}{۳۵} = \frac{۱۲}{۳۵}$$



۱۰۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی‌الساقین است، بنابراین ارتفاع AH، میانهٔ نظیر ضلع BC نیز هست و داریم:

$$\overset{\triangle}{AHB} : AH^{۲} = AB^{۲} - BH^{۲} = ۱۷^{۲} - ۸^{۲} = ۲۲۵ \Rightarrow AH = ۱۵$$

اگر پای ارتفاع وارد از نقطهٔ C بر پاره‌خط BD را K بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}CK \times BD \\ S_{\overset{\triangle}{BCD}} = \frac{۱}{۲}DH' \times BC \end{array}\right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times ۲۵ = ۱۵ \times ۱۶ \Rightarrow CK = \frac{۲۴۰}{۲۵} = ۹/۶$$

دقت کنید که DH' و AH فاصلهٔ دو خط موازی AD و BC هستند و برابر یکدیگرند.

روش دوم:

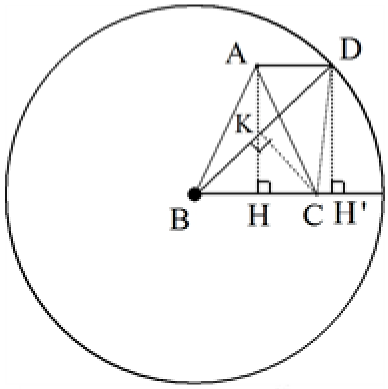
دو مثلث ABC و BCD در قاعدهٔ BC مشترک و ارتفاع برابر دارند، پس مساحت آن‌ها برابر است. طبق قضیهٔ هرون داریم:

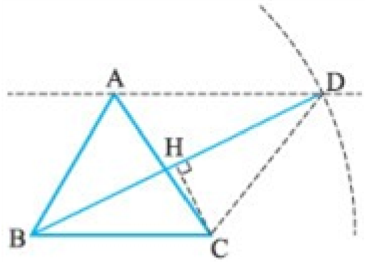
$$P = \frac{۱۷ + ۱۷ + ۱۶}{۲} = ۲۵$$

$$S_{ABC} = \sqrt{۲۵(۲۵-۱۷)(۲۵-۱۷)(۲۵-۱۶)}$$
$$= \sqrt{۲۵\times۸\times۸\times۹} = ۵\times۸\times۳ = ۱۲۰$$

پس $S_{BCD} = ۱۲۰$، اگر CH بر BD عمود باشد، داریم:

$$S_{BCD} = \frac{۱}{۲}BD \times CH \Rightarrow ۱۲۰ = \frac{۱}{۲}\times۲۵\times CH \Rightarrow CH = \frac{۲۴۰}{۲۵} = ۹/۶$$





۱۰۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر AC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ADC می‌نویسیم:

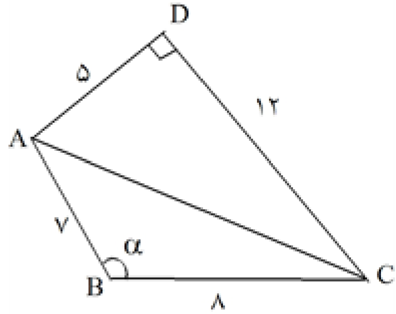
$$AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow AC = ۱۳$$

حال با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت.

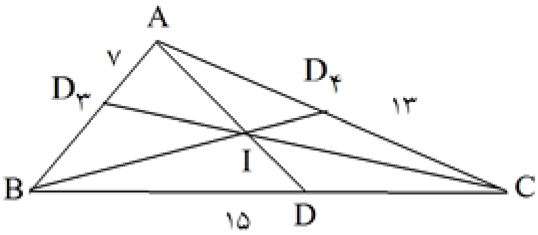
$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲\,AB \times BC \operatorname{Cos}\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۳^۲ = ۷^۲ + ۸^۲ - ۲(۷)(۸)\operatorname{Cos}\alpha \Rightarrow \operatorname{Cos}\alpha = -\frac{۱}{۲}$$

بنابراین $\alpha = ۱۲۰^\circ$ در نتیجه $\operatorname{Sin}۱۲۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.



۱۰۷ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{BD}{DC} = \frac{۷}{۱۳} \Rightarrow DC = \frac{۱۳}{۲۰} \times ۱۵ = \frac{۳۹}{۴}$$

$$\frac{DI}{IA} = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{۳۹}{۴}}{۱۳} = \frac{۳}{۴}$$

نکته: این نسبت در مثلثی به اضلاع a, b, c که c ضلع بزرگ‌تر باشد برابر است با: $\frac{c}{a+b}$. در این مسئله $\frac{۳}{۴} = \frac{۱۵}{۷+۱۳}$

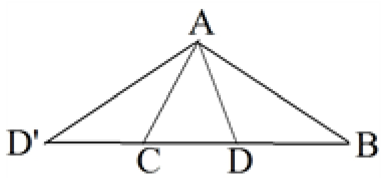
۱۰۸ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه داخلی و خارجی یک رأس مثلث بر هم عمودند پس مثلث ADD' قائم‌الزاویه است.

$$AD \text{ نیمساز داخلی} \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{DC}{۱۲} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow DC = ۳$$

$$AD' \text{ نیمساز خارجی} \Rightarrow \frac{D'C}{D'B} = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{۳} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل}} \frac{D'C}{۱۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow D'C = ۶$$

$$\Rightarrow DD' = DC + D'C = ۹$$

$$\overset{\triangle}{ADD'} : AD^۲ + AD'^۲ = DD'^۲ = ۹^۲ = ۸۱$$



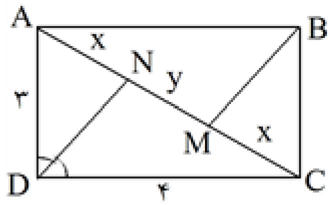
۱۰۹ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. DN نیمساز زاویه‌ی D در مثلث ADC است و در نتیجه ضلع AC را به نسبت اضلاع زاویه‌ی D تقسیم می‌کند، یعنی داریم:

$$\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NC}}=\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DC}}\to\frac{x}{y+x}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}}\frac{x}{y+x+x}=\frac{۳}{۴+۳}$$

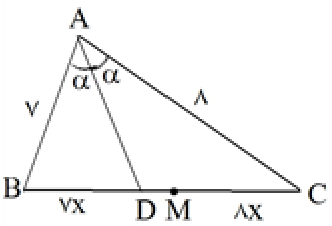
$$\xrightarrow{y+۲x=\mathrm{AC}=۵}\frac{x}{۵}=\frac{۳}{۷}\to x=\frac{۱۵}{۷}$$

$$\mathrm{MN}=y=\mathrm{AC}-۲x=۵-۲\left(\frac{۱۵}{۷}\right)\to\mathrm{MN}=\frac{۵}{۷}$$

(توجه کنید که $\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AD}^۲+\mathrm{DC}^۲}=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$)



۱۱۰ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. توجه کنید که زاویه‌ی بزرگ‌تر، مقابل به ضلع بزرگ‌تر است. حال با توجه به این‌که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری خود تقسیم می‌کند، پس $\mathrm{BD}=۷\mathrm{x}$ و $\mathrm{DC}=۸\mathrm{x}$ می‌باشد و در نتیجه:



$$۷\mathrm{x}+۸\mathrm{x}=۱۲\Rightarrow x=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{BD}=\frac{۲۸}{۵}\\ \mathrm{DC}=\frac{۳۲}{۵}\end{cases}$$

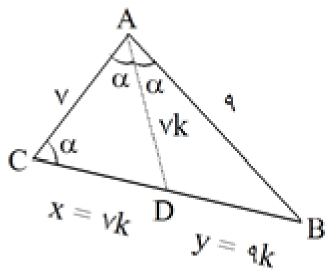
و از طرفی $\mathrm{BM}=\mathrm{MC}=۶$ می باشد، پس:

$$\mathrm{MD}=\mathrm{BM}-\mathrm{BD}=۶-\frac{۲۸}{۵}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

۱۱۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر نیمساز زاویه‌ی A را رسم کنیم و قطعات ایجاد شده بر ضلع BC به ترتیب x و y باشند، آن‌گاه چون نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می‌کند، خواهیم داشت $x=۷\mathrm{k}$ و $y=۹\mathrm{k}$. از طرفی چون مثلث ADC متساوی‌الساقین است، پس $\mathrm{AD}=\mathrm{CD}$ خواهد شد. همچنین می‌دانیم اگر AD نیمساز زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

$$\mathrm{AD}^۲=\mathrm{AC}.\mathrm{AB}-\mathrm{CD}.\mathrm{DB}\to(۷\mathrm{k})^۲=۷\times۹-(۷\mathrm{k})(۹\mathrm{k})\to۴۹\mathrm{k}^۲+۶۳\mathrm{k}^۲=۶۳$$

$$\to۱۱۲\mathrm{k}^۲=۶۳\to k^۲=\frac{۹}{۱۶}\to k=\frac{۳}{۴}\to\mathrm{BC}=x+y=۱۶\mathrm{k}=۱۶\left(\frac{۳}{۴}\right)=۱۲$$

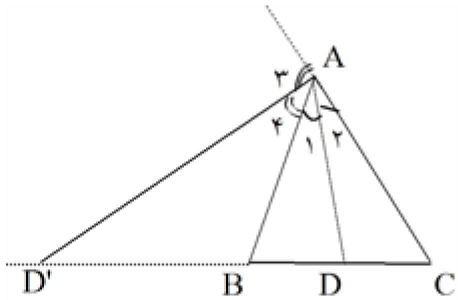


۱۱۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $(AB=۶, AC=۸, BC=۵)$

$$\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲ \Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{۵-DB}=\frac{۶}{۸} \Rightarrow DB=\frac{۱۵}{۷}$$

$$\widehat{A}_۳=\widehat{A}_۴ \Rightarrow \frac{D'B}{D'C}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{D'B}{۵-D'B}=\frac{۶}{۸} \Rightarrow D'B=۱۵$$

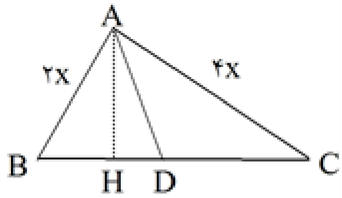
$$DD'=D'B+BD=۱۵+\frac{۱۵}{۷}=\frac{۱۲۰}{۷}$$



۱۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیمساز داخلی یک زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند،

بنابراین: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{۲x}{۴x}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow DC=۲BD$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABD}}}{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}AH}\times BD}{\cancel{\frac{۱}{۲}AH}\times BC}=\frac{BD}{BD+DC}=\frac{BD}{BD+۲BD}=\frac{۱}{۳}$$



۱	۱
۲	۱
۳	۲
۴	۴
۵	۳
۶	۳
۷	۴
۸	۳
۹	۴
۱۰	۲
۱۱	۳
۱۲	۴
۱۳	۲
۱۴	۳
۱۵	۴
۱۶	۳
۱۷	۳
۱۸	۴
۱۹	۴
۲۰	۱
۲۱	۳
۲۲	۱
۲۳	۴
۲۴	۴
۲۵	۳
۲۶	۳
۲۷	۲
۲۸	۴
۲۹	۳
۳۰	۳
۳۱	۱
۳۲	۳
۳۳	۳
۳۴	۴
۳۵	۳
۳۶	۳
۳۷	۴
۳۸	۴
۳۹	۳
۴۰	۱
۴۱	۱
۴۲	۳
۴۳	۱
۴۴	۳
۴۵	۳
۴۶	۱
۴۷	۳
۴۸	۴
۴۹	۲
۵۰	۲
۵۱	۲
۵۲	۱
۵۳	۴
۵۴	۱
۵۵	۳
۵۶	۴
۵۷	۲
۵۸	۱
۵۹	۳
۶۰	۳
۶۱	۲
۶۲	۳
۶۳	۳
۶۴	۲
۶۵	۳
۶۶	۱
۶۷	۲
۶۸	۱
۶۹	۳
۷۰	۳
۷۱	۱
۷۲	۲
۷۳	۱
۷۴	۱
۷۵	۳
۷۶	۱
۷۷	۲
۷۸	۲
۷۹	۲
۸۰	۲
۸۱	۴
۸۲	۴
۸۳	۳
۸۴	۴
۸۵	۳
۸۶	۱
۸۷	۴
۸۸	۲
۸۹	۱
۹۰	۲
۹۱	۲
۹۲	۲
۹۳	۱
۹۴	۱
۹۵	۲
۹۶	۳
۹۷	۴
۹۸	۲
۹۹	۲
۱۰۰	۲
۱۰۱	۱
۱۰۲	۴
۱۰۳	۱
۱۰۴	۳
۱۰۵	۳
۱۰۶	۳
۱۰۷	۳
۱۰۸	۳
۱۰۹	۲
۱۱۰	۲
۱۱۱	۱
۱۱۲	۳
۱۱۳	۳

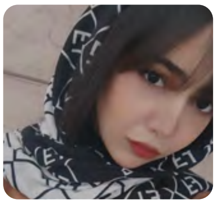
رتبه برترهای کنکور ۱۴۰۴ مدیکال

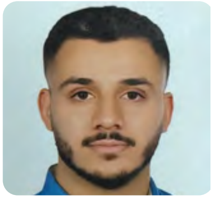
گروه آموزشی مدیکال استوز

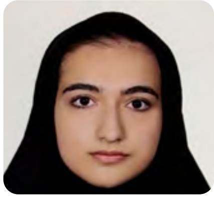

مهشید فاطمی
پزشکی
علوم پزشکی کاشان


هانیه مصدق
پرستاری
آزاد نیشابور


یاسینا نوروزی
پزشکی
جندی شاپور


نرگس مردانی
پرستاری
علوم پزشکی ایران

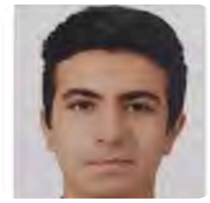

شایان جعفری
دندانپزشکی
علوم پزشکی بندرعباس


مهدیس رفیعی
اعضای مصنوعی و وسایل کمکی
علوم پزشکی ایران


ابراهیم هناره
دندانپزشکی
علوم پزشکی ارومیه


زهرا حمدی
علوم آزمایشگاهی
علوم پزشکی دزفول


محمدحسین نظری
پزشکی
علوم پزشکی همدان


ابوالفضل حسینی ارسون
دندانپزشکی
علوم پزشکی رشت


مائده نظری
تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی گرگان


مبینا گودرزی
تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی سبزوار


پریسا سادات موسوی
زیست شناسی سلولی و مولکولی
دانشگاه تهران

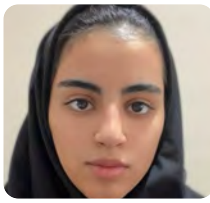

سحر درخشان
پزشکی
آزاد نجف آباد


نگار دلاوری
پرستاری
آزاد رشت


شنتیا زمانی
دندانپزشکی
علوم پزشکی شهید بهشتی


سارا مرادی
پرستاری
دانشگاه آزاد واحد شهرکرد


هستی عباسلو
هوشبری
علوم پزشکی رفسنجان


فاطمه حبیبی
پزشکی
علوم پزشکی سمنان


الینا بصیری
تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی همدان


ملیکا ابراهیمی نژاد
دندانپزشکی
آزاد بروجرد


محمدصفا مارمائی
پزشکی
علوم پزشکی گرگان

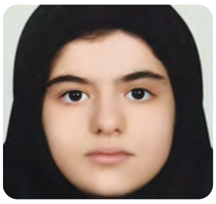

محدثه خان محمدی
تکنولوژی اتاق عمل
علوم پزشکی زنجان


سوگند تیموری
پزشکی
علوم پزشکی کرمانشاه


محمدفرحان کرمی
پرستاری
علوم پزشکی بابل


فاطمه شریفی پیرکوهی
فیزیوتراپی
دانشگاه علوم پزشکی جندی شاپور


محمدامین متین
پزشکی
علوم پزشکی دزفول


بهار اسلامی
پزشکی
علوم پزشکی رشت


زینب رنجبر
پرستاری
آزاد اسلامی واحد ساری


فاطمه محمد رحیمی
پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند

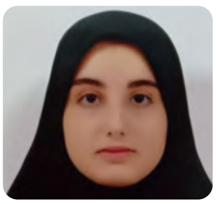

سانار جعفری
علوم تغذیه
علوم پزشکی اصفهان


مینو رسولی
پزشکی
علوم پزشکی شیراز


محمدرضا اسپرجانی
پزشکی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان


فاطمه میرزایی
پزشکی
علوم پزشکی زنجان


شایان جعفری
کار درمانی
علوم توانبخشی و سلامت اجتماعی تهران


نرگس کلیج
پزشکی
علوم پزشکی سمنان

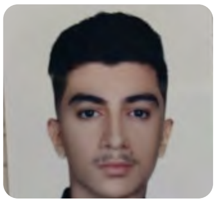
رتبه برترهای کنکور ۱۴۰۴ مدیکال

گروه آموزشی مدیکال استوز

سحر قنبری
داروسازی
علوم پزشکی کرمان

زهرا حمدی
پزشکی
علوم پزشکی زنجان

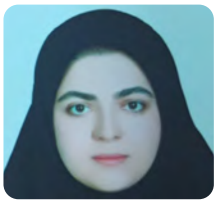
هانیه اعتمادی
پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساری



عرشیا نادری
پزشکی
آزاد اسلامی واحد نجف آباد

الهه غلامپور
پزشکی
علوم پزشکی مازندران

فاطمه علی پناه
پزشکی
علوم پزشکی مازندران



فرناز اقایی
پرستاری
علوم پزشکی کاشان

پارمیس یوسفی
پرستاری
دانشگاه آزاد اسلامی واحد مرند

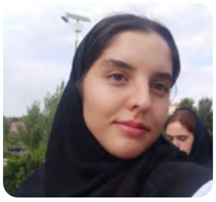
فاطمه رحمانی
دندانپزشکی
علوم پزشکی زنجان

امیرعلی جهانشاهی
داروسازی
علوم پزشکی مازندران

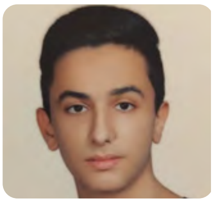
نرگس دهاقین
داروسازی
علوم پزشکی همدان

سجاد قوید
مهندسی صنایع
دانشگاه صنعتی اصفهان

عرشیا شفیع زاده
مهندسی برق
شهید باهنر کرمان



مهتاب سلیمی
ریاضیات و کاربرد ها
دانشگاه الزهرا(س)



علی فتاح
مهندسی صنایع
دانشگاه یزد

سوگند احمدی
مهندسی نفت
دانشگاه شیراز

ثنا شریفی
آمار
دانشگاه علامه طباطبایی تهران

محمد اکبری
مهندسی برق
دانشگاه صنعتی اصفهان

حمید رضا بهزادی
مهندسی مکانیک
دانشگاه صنعتی شریف

کوثر صحتی
مهندسی معماری
دانشگاه خوارزمی تهران

یاس سنجرانی
مهندسی مکانیک
دانشگاه کاشان

ماهان استرکی
مهندسی شیمی
دانشگاه صنعت نفت آبادان

محمد شیرزایی
مهندسی مکانیک
دانشگاه فردوسی مشهد

مهسا یاری
بیم سنجی
دانشگاه شهید بهشتی تهران

محمد حسن نوابی
مهندسی مکانیک
دانشگاه بوعلی همدان

مبینا مروتی
حسابداری
دانشگاه تهران

حامد لاوی
مهندسی شیمی
صنعتی نوشیروانی بابل

آرمین دارابی
مهندسی مکانیک
دانشگاه قم

محمد هادی تاجیکی
مهندسی مکانیک
دانشگاه شهید رجایی

مهلا الهی
مهندسی علم و مواد
دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

نگار مشهدی
عکاسی
دانشگاه سمنان

فهیمه امیری مقدم
نوازندگی موسیقی جهانی
دانشگاه تهران

ایلیاد پورمهدی
سینما
دانشگاه دامغان

زینب میرزائی
حسابداری
دانشگاه اراک

مبینا رودنی
حسابداری
دانشگاه زاهدان

ساره کریمی
اقتصاد
دانشگاه خوارزمی تهران