

مدیکال استوز

سوالات راهتمای معلم

ریاضی دوازدهم



نمونه سؤالات ارزشیابی

نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

الف) $y = -(x-1)^3 + \frac{1}{4}$

ب) $y = (x+2)^3 - \frac{3}{4}$

نمودار توابع $y = \cos x + 1$ و $y = -\sin x - 1$ را در بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ رسم کرده و بازه‌هایی را که در آنها صعودی یا نزولی است مشخص نمایید.

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

الف) $y = 3^x - 1$

ب) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

پ) $y = -\log_3 x + 2$

ت) $y = x^2 - 4x$

ث) $y = -|x+1| - 2$

ج) $y = \begin{cases} 2x-3 & x > 2 \\ x^3 & -1 \leq x \leq 1 \\ -x+1 & x \leq -3 \end{cases}$

اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = 2x-3$ ، حاصل عبارات زیر در صورت امکان را به دست آورید.

الف) $(g \circ f)(5)$

ب) $(g \circ f)\left(\frac{3}{4}\right)$

پ) $(f \circ f)(6)$

ت) $(g \circ g)(-3)$

ث) $(f \circ g)(-3)$

ج) $(f \circ g)\left(\frac{3}{4}\right)$

فصل اول: تابع

در هر قسمت ضابطه و دامنه $f \circ g$ و $g \circ f$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $f(x) = -5x + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$

ب) $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$, $g(x) = \sqrt{x-3}$

تابع $f(x) = \frac{1}{-x^2 + 2x - 3}$ را طوری بنویسید که حاصل ترکیب دو تابع دیگر باشد.

در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{x-3} & x \geq 5 \\ -x^2 - 3x & x < 5 \end{cases}$ مقدار $f(f(7)) + f(f(-1))$ را به دست آورید.

نقطه $A(1, -4)$ روی نمودار تابع $y = 3 - f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطه نظیر A را روی نمودار

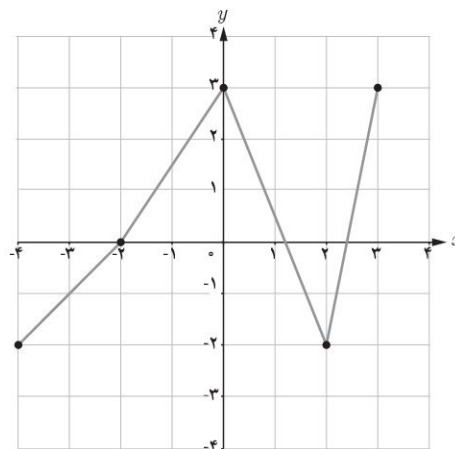
تابع $y = \frac{1}{3}f(x-2)$ بیابید.

اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.

الف) $y = -f(x+1)$

ب) $y = f(2x) - 1$

پ) $y = f(x-2) + 2$



اگر $f(x) = \cos x$ ، نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2\cos x - 2$

ب) $y = \cos(-x) + 1$

پ) $y = \cos(\frac{x}{3}) - 1$

ت) $y = -\cos^2 x - 1$

اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = x^2 + bx$ باشد، a و b را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:

$(f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 1$

اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ باشد، حاصل $(fog)(x) - (gof)(x)$ را حساب کنید.
 اگر $f(x) = \sqrt{x-2} + 2$ ، دامنه و برد توابع f و f^{-1} را به دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید،
 ضابطه f^{-1} را نیز محاسبه کنید.

ضابطه تابع وارون توابع زیر را به دست آورید. دامنه و برد هر تابع را مشخص نمایید.

الف) $f(x) = \frac{2x}{5} - 8$

ب) $g(x) = -3 + \sqrt{x+3}$

پ) $h(x) = x^2 - 4x + 6 \ (x \geq 2)$

ت) $l(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{2}$

برای تابع $f(x) = \frac{x-3}{2}$ ثابت کنید $(f \circ f^{-1})(x) = x$ و $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ در هر مورد دامنه تابع را مشخص کنید.

توابع زیر یک به یک نیستند. به دو روش مختلف از آنها تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = x^2 - 4x + 11$

ب) $y = -|x-1| + 3$

پ) $y = |x+3| - 4$

اگر $y = m_1x + b_1$ و $y = m_2x + b_2$ معادله دو خط باشند که نسبت به نیم سازه ربع اول و سوم قرینه اند،
 نشان دهید $m_1m_2 = 1$.

اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, 1)\}$ و $g = 2|x| + 1$ و $f^{-1}(g(a)) = 2$ ، a را بیابید.

در صورت یک به یک بودن تابع $f(x) = -(x-2)^2$ برای $x \leq 2$ ، وارون آن را بیابید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

فصل دوم: مثلثات

نمونه سؤالات ارزشیابی

دوره تناوب توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = \frac{\pi}{2} \sin 2x$

ب) $y = \sin \frac{x}{\pi} + 3$

پ) $y = \sqrt{5} - \cos(\sqrt{2}x)$

ت) $y = -\cos \frac{x}{\sqrt{3}}$

کدامیک از جملات زیر درست و کدامیک نادرست است.

الف) تابع تناوب در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ نزولی است.ب) تابع تناوب در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ محور x ها را قطع نمی کند.

پ) تابع تناوب یک تابع متناوب است.

ت) تابع $y = \sin \frac{x}{\sqrt{3}}$ متناوب نیست.ث) دوره تناوب تابع $y = \sqrt{5} \cos \frac{x}{\sqrt{5}}$ برابر $T = \sqrt{5}$ است.ج) دامنه تابع تناوب برای IR (مجموعه اعداد حقیقی) است.

نمونه سؤالات ارزشیابی

فرض کنید $\sin \alpha = a$ و α زاویه ای حاده باشد. حاصل عبارات زیر را بر حسب a به دست آورید.

الف) $\sin 2\alpha$

ب) $\cos 2\alpha$

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin 5x = \sin(2x+1)$

ب) $\cos 2x - \sin x - 2 = -2$

پ) $\sin 2x - \cos x = 0$

نمونه سؤالات ارزشیابی

حدود زیر را بیابید :

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 6x + 5}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{3x+4} - 2}$

آیا تابع زیر در نقطه $x = -1$ دارای حد است؟ چرا؟

$$f(x) = x^5 - \frac{\sqrt{(x+1)^7}}{x+1} \quad (x \neq -1)$$

به ازای چه مقدار برای a تابع زیر در $x = -2$ دارای حد است؟

$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x + 3 & x > -2 \\ -2x^2 + 1 & x < -2 \end{cases}$$

حدهای زیر را بیابید :

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+1}{x+2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{x^2 - 1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{2x-3}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + x + 1}{x^3 - x + 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-[x] - 1}{x^2 - 4}$

خ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cot x}$

فصل سوم: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^3 + x + 1}{5x^n + 2x - 1} = \frac{4}{5}$ آنگاه مقدار m و n را بیابید.

هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2 - 1)(x+1)}{x^3 - 2}$

ث) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - \sqrt{x-3}}{5x^2 - \sqrt{x+1}}$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x^4 + 3x + 1}}{5x^2}$

چ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{2x - 3}$

ح) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 + 3}$

نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بیابید.

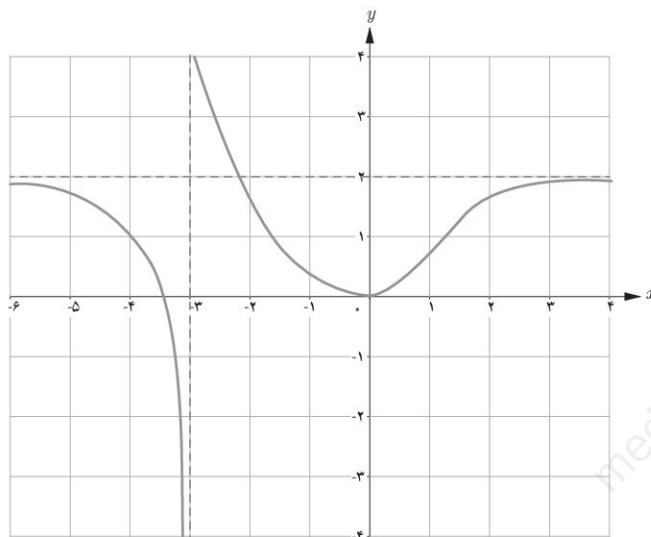
الف) $f(x) = \frac{2}{x+1} : \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x), \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) $g(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -1 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases} : \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

با توجه به نمودار توابع داده شده حدود خواسته شده را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x), \lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)$$

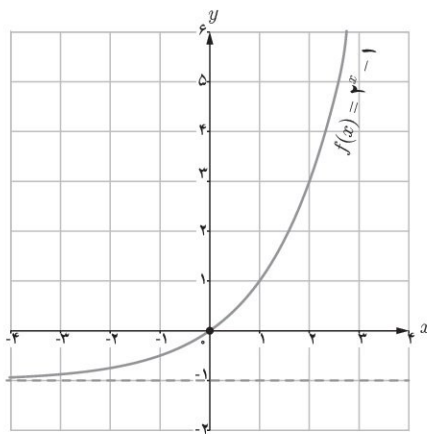
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$



(الف)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

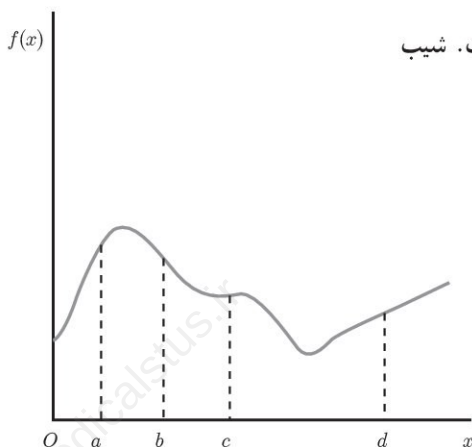
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$



(ب)

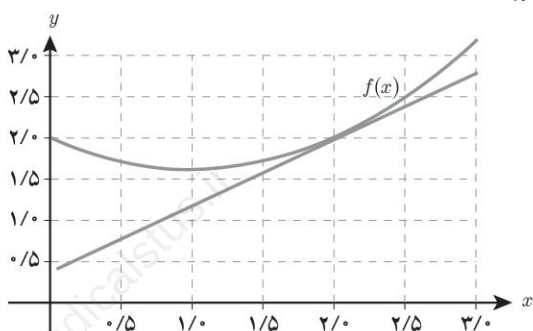
فصل چهارم: مشتق

نمونه سؤالات ارزشیابی



فرض کنید نمودار تابع f به صورت زیر است. شیب نمودار در نقاط a, b, c, d را با هم مقایسه کنید.

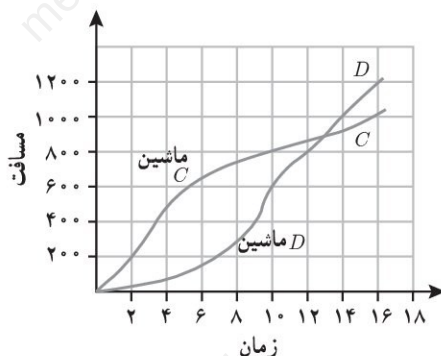
الف) $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ به ازای $h = -0.5$ تقریب بزنید. آیا این مقدار بزرگ تر یا کوچک تر از $f'(2)$ است؟ توضیح دهید.
 ب) مقادیری از h را بیابید که $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0$.



دو ماشین مسابقه‌ای C و D در یک پیست مسیری به طور مستقیم در ۱۶ ثانیه مطابق شکل صفحه بعد طی می‌کنند.

الف) سرعت متوسط هر دو ماشین را در ۱۶ ثانیه اول بنویسید.

ب) بازه‌ای با شروع $t=4$ برای ماشین D بیابید به طوری که سرعت متوسط ماشین D تقریباً مشابه سرعت متوسط ماشین C در بازه $t=2$ تا $t=10$ باشد.



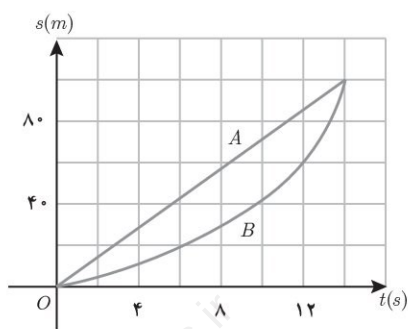
پ) با استفاده از خطوط قاطع و شیب‌ها نشان دهید ماشین D در بازه $t=4$ تا $t=10$ دارای سرعت متوسط بالاتری نسبت به ماشین C است.

فرض کنید $f(0) = 0$ ، درستی یا نادرستی تعیین کنید.

الف) اگر برای هر x ، $f(x) \leq x$ ، آنگاه $f'(x) \leq 1$.

ب) اگر برای هر x ، $f'(x) \leq 1$ ، آنگاه $f(x) \leq x$.

نمودار زیر تابع موقعیت دو دوندۀ B و A در یک مسابقه دو ۱۰۰ متر را نشان می‌دهد.



الف) چگونگی حرکت دوندۀها را مقایسه و تشریح کنید.

ب) در چه زمانی تقریباً فاصله بین دو دوندۀ بیشترین

است؟

پ) در چه زمانی تقریباً سرعت هر دو دوندۀ یکسان

است؟

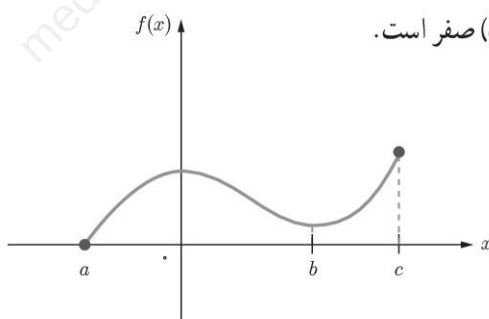
برای تابع رسم شده در شکل زیر بازه یا نقاطی روی محور طول‌ها بیابید که آهنگ تغییر $f(x)$ نسبت

به x :

پ) صفر است.

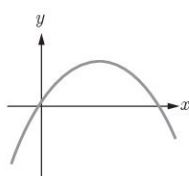
ب) منفی

الف) مثبت

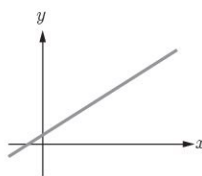


فصل چهارم: مشتق

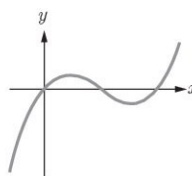
توابع A و B ، C ، D را به مشتقات آنها I و II ، III نظیر کنید.



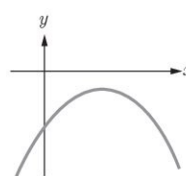
(A)



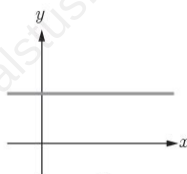
(B)



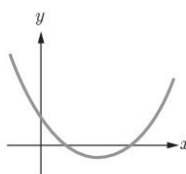
(C)



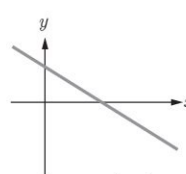
(D)



(I)



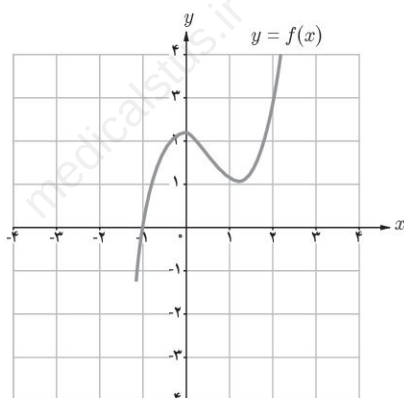
(II)



(III)

بشکه‌ای حاوی یک مایع است که در پایین آن سوراخی وجود دارد و مایع در حال خروج از آن می‌باشد. حجم مایع درون بشکه در حال کاهش است و از رابطه $V(t) = 10(2 - \frac{1}{6}t)^2$ پیروی می‌کند. سرعت خروج مایع در $t = 4^\circ$ را محاسبه کنید.

از روی شکل خارج قسمت تفاضلی $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ را تفسیر کنید.



الف) $f(1)$ به چه معنی است؟

ب) $f(1+h)$ به چه معنی است؟ مثلاً برای $h = 0.2$ ؟

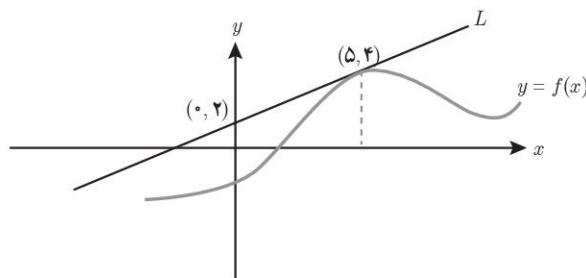
پ) $1+h$ به چه معنی است؟

ت) $1+h$ ، $f(1)$ و $f(1+h)$ را روی نمودار مشخص کنید.

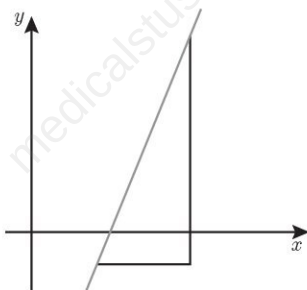
ث) از روی شکل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ را تفسیر کنید.

ج) مقدار حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ را برآورد کنید.

فرض کنید خط مماس L بر نمودار تابع f در نقطه $(5, 4)$ است. $f(5)$ و $f'(5)$ را به دست آورید.



فرض کنید P و Q دو نقطه دلخواه روی نمودار باشند و تغییرات طول‌های آنها ۸ و تغییرات عرض‌های آنها y باشد. اگر بین x و y رابطه $y = mx + b$ برقرار باشد، مقدار m را به‌طور تقریبی محاسبه کنید.



مشتق بگیرید.

$$۱) y = x^4 - 3x + 5$$

$$۲) y = (x+1)(4x-x^2) + x$$

$$۳) y = (x^2 - 3x)^2 (x+2)$$

$$۴) y = (8x^2 - x + 5)^2$$

$$۵) y = \frac{2x-5}{x^2}$$

$$۶) y = \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{x+3}$$

آیا تابع‌های زیر در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف) $f(x) = x^3$ در $x = 0$

ب) $f(x) = |x|$ در $x = 1$

فصل چهارم: مشتق

در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر روی بازه $[2/25, 2/56]$ از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کمتر است؟

معادله حرکت یک گلوله توپ که از زمین به طور قائم به طرف بالا پرتاب می شود به صورت $s(t) = -5t^2 + 20t$ است. سرعت لحظه ای این گلوله در زمان برخورد با زمین چند متر بر ثانیه است؟

در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2+h$ تغییر می کند برابر $\frac{1}{9}$ است. h کدام است؟

حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، برحسب لیتر برابر است با:

$$V(t) = 250(16-t)^2$$

آهنگ لحظه ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است و آن را توصیف کنید.

در تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 1 \\ x^2+1 & x < 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ چقدر است؟

مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه $x=1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ ، $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد، مقدار $g(1)$ کدام است؟

مقدار مشتق عبارت $y = \frac{x}{1+x^2}$ به ازای $x = \frac{1}{2}$ چقدر است؟

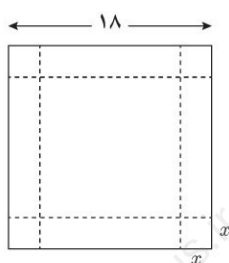
مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & x \leq 0 \\ ax+a+b & x > 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد.

تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax-a & x < 1 \\ x^2-x & x \geq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x=1$ مشتق پذیر است؟

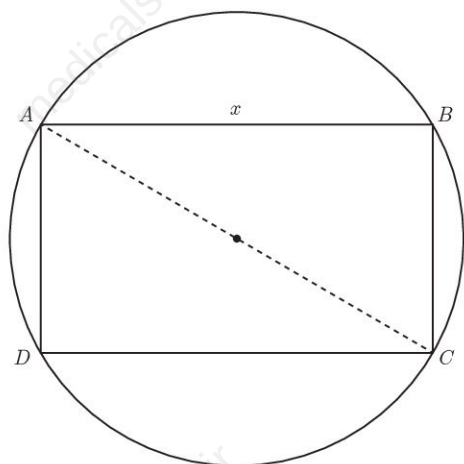
فرض کنید تابع f در $x=1$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = 3$ ، مقدار $f(1)$ و $f'(1)$ را به دست آورید.

نمونه سؤال های ارزشیابی

۱- دو عدد پیدا کنید که مجموعشان ۶ و مجموع مربعات آنها کمترین مقدار ممکن باشد.



۲- از یک قطعه مقوای مربع شکل به ضلع ۱۸ سانتی متر می خواهیم یک قوطی در باز بسازیم. برای این منظور از چهار گوشه این مقوا چهار مربع بریده اطراف آن را تا می کنیم. مربع های اطراف را به ضلع چند سانتی متر انتخاب کنیم تا حجم قوطی حاصل بیشترین مقدار ممکن باشد؟



۳- در دایره ای به شعاع ۵ مستطیلی به مساحت ماکزیم محاط کرده اند، اضلاع مستطیل را بیابید.

۴- ثابت کنید اگر حاصل ضرب دو عدد حقیقی و مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آنها وقتی مینیمم خواهد بود که دو عدد با هم برابر باشند.

۵- ثابت کنید اگر حاصل جمع دو عدد حقیقی و مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آنها وقتی ماکزیم خواهد بود که آن دو عدد با هم برابر باشند.

۶- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ را در بازه $[-2, 2]$ در نظر بگیرید و اکسترم های مطلق آن را در این بازه بیابید.

۷- تابع $y = ax^2 + bx - 3$ داده شده است. ضریب های a و b را چنان بیابید که (-4) و (-1) یک نقطه اکسترم نسبی آن باشد.

فصل پنجم: کاربرد مشتق

اگر مقدار ماکزیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 3mx^2$ برابر ۸ باشد، مقدار m را بیابید.

نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ در بازه $[-\frac{3}{4}, 3]$ را بیابید.

تویی به فضا پرتاب می‌شود. مسیر حرکت توپ به گونه‌ای است که در ثانیه t ام در ارتفاع $h(t) = 30t - 5t^2$ متری قرار دارد.

الف) در ثانیه چندم پس از پرتاب، توپ در بالاترین نقطه ممکن قرار دارد؟

ب) ارتفاع نقطه اوج توپ چقدر است؟

تابع $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ روی بازه‌ای مثل $[a, b]$ صعودی اکید است بیشترین مقدار $b - a$ را محاسبه کنید.

مشخص کنید تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی را بیابید که در نیم‌دایره‌ای به شعاع R محاط شده است و یک ضلع مستطیل روی قطر نیم‌دایره قرار دارد.

نمونه سوالات بیشتر (سوالات ستاره دار فقط مخصوص دانش آموزان علاقمند)

- روی دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ دو نقطه A و B را به طول ۲ در نظر می‌گیریم.
- الف) مختصات نقطه C را روی این دایره چنان بیابید که مثلث ABC در رأس C متساوی الساقین شود. چند مثلث با این ویژگی داریم؟
- ب) چند نقطه مثل D روی این دایره می‌توان یافت، به طوری که مثلث ABD در رأس D قائمه شود؟
- معادله وتره‌ای که از نقطه $A(2, 1)$ درون دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ می‌گذرد و بر شعاع OA عمود است چیست؟
- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(1, 0)$ و $(6, 0)$ بگذرد و بر خط $y = 1$ مماس باشد. *
- نقاط $(5, -2)$ و $(-1, -2)$ دوسر قطر بزرگ یک بیضی هستند.
- الف) مختصات مرکز این بیضی چیست؟
- ب) اگر قطر کوچک این بیضی ۴ واحد باشد کدام نقاط دو سر قطر کوچک هستند؟
- پ) اندازه فاصله کانونی و مختصات نقاط کانونی را محاسبه کنید.
- ت) خروج از مرکز بیضی چقدر است؟
- معادله دایره‌ای را بنویسید که با دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ هم مرکز باشد و شعاع آن، دو برابر شعاع این دایره باشد.
- اگر نقاط $(1, 0)$ ، $(-2, 3)$ و $(-1, 2)$ سه نقطه از یک شهر باشد،
- دکل مخابراتی را در کدام نقطه باید نصب کرد که سرویس دهی یکسانی به هر سه نقطه انجام شود؟ *



- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه‌های $A(1, 1)$ و $B(3, 3)$ بگذرد و مرکز آن روی خط $x = 3y$ واقع باشد.

فصل ششم: هندسه

چند دایره می توان به مرکز $M(2,1)$ رسم کرد به طوری که بر محورهای مختصات مماس باشد؟ معادله این دایره ها را بنویسید.

معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $(1,3)$ و $(1,5)$ دوسر قطری از آن باشند.

دایره ای به مرکز $(-1,2)$ بر خط $4y - 3x - 1 = 0$ مماس است. شعاع این دایره چقدر است؟

اگر خط l در نقطه $(-1,3)$ بر دایره ای به مرکز $(0,2)$ مماس باشد:

الف) معادله خط مماس را پیدا کنید.

ب) معادله دایره را بنویسید.

مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a را حول ضلع آن دوران می دهیم. حجم شکل حاصل چقدر است؟

فصل ششم: هندسه

نمونه سؤالات ارزشیابی

یک اتوبوس در حال انتقال تعدادی ورزشکار از رشته‌های والیبال و بسکتبال است. ۴۵ درصد ورزشکارانی که در اتوبوس هستند، بسکتبالیست و ۵۵ درصد آنها والیبالیست هستند. از طرفی ۲۰ درصد بسکتبالیست و ۱۵ درصد والیبالیست‌هایی که در اتوبوس هستند قدی بالای ۲ متر دارند. اگر از میان ورزشکاران این اتوبوس فردی به تصادف انتخاب شود، با چه احتمالی فرد انتخابی قدی بالای ۲ متر خواهد داشت؟

جمعیت شهرتشین یک شهرستان دو برابر جمعیت روستانشین آن است. ۷۰ درصد شهرنشینان و ۵۰ درصد روستائیان این شهرستان دارای تحصیلات دانشگاهی هستند. اگر فردی به تصادف از این شهرستان انتخاب شود:

(الف) با چه احتمالی فرد انتخابی جزء شهرنشینان و با چه احتمالی جزء روستانشینان است؟

(ب) با چه احتمالی فرد انتخابی تحصیلات دانشگاهی دارد؟

سه درصد از افراد بالای ۴۰ سال از یک جامعه و یک درصد از سایر افراد آن جامعه به نوعی بیماری خاص مبتلا هستند. اگر ۳۰ درصد افراد این جامعه بالای ۴۰ سال داشته باشند، چند درصد افراد این جامعه به بیماری مذکور مبتلا هستند؟

در یک مدرسه دوره دوم متوسطه نصف دانش‌آموزان پایه دهم، یک سوم آنها پایه یازدهم و یک ششم آنها پایه دوازدهم هستند. اگر رشته ورزشی ۳۰ درصد از دانش‌آموزان پایه دهم، ۲۵ درصد از دانش‌آموزان

پایه یازدهم و ۲۰ درصد از دانش‌آموزان پایه دوازدهم، فوتبال باشد و یک نفر به تصادف از دانش‌آموزان این مدرسه انتخاب شود، با چه احتمالی رشته ورزشی فرد مورد نظر فوتبال است؟

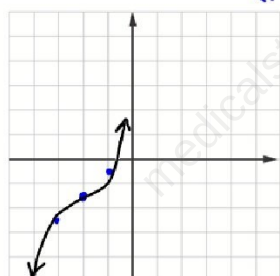
دو جعبه داریم که در اولی ۴ مهره سفید و ۸ مهره مشکی و در دومی ۶ مهره سفید و ۲ مهره مشکی قرار دارد. اگر تمام مهره‌های هر دو جعبه را در یک جعبه سوم بریزیم و یک مهره به تصادف از جعبه سوم خارج کنیم:

(الف) با چه احتمالی مهره خارج شده قبلاً در جعبه اول بوده و با چه احتمالی قبلاً در جعبه دوم بوده است؟

(ب) با توجه به قسمت (الف) و قانون احتمال کل با چه احتمالی مهره مورد نظر سفید است؟

پاسخ سوالات ارزشیابی، راهنمای معلم

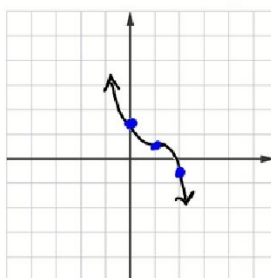
(ب)



x	-۳	-۲	-۱
y	$-\frac{5}{1}$	$-\frac{4}{1}$	$-\frac{1}{1}$

دامنه = $\mathbb{R}$ بزرگ = $\mathbb{R}$

(الف)



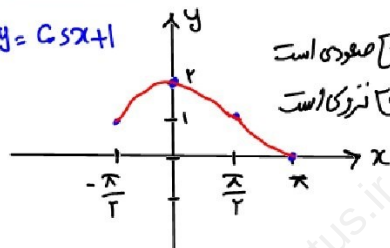
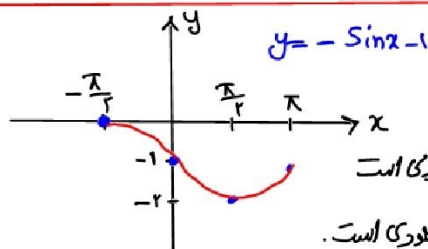
x	۰	۱	۲
y	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$

دامنه = $\mathbb{R}$ بزرگ = $\mathbb{R}$

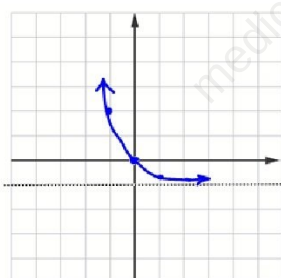
منصلاول

۱

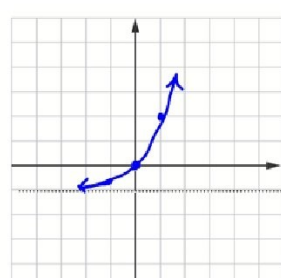
$y = \cos x + 1$

دبرازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ صعودی است
ودبرازه $[\pi, 2\pi]$ نزولی است

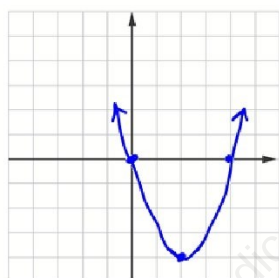
$y = -\sin x - 1$

دبرازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ نزولی است
ودبرازه $[\pi, 2\pi]$ صعودی استب

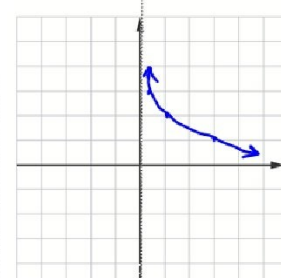
x	-۱	۰	۱
y	۲	۰	$-\frac{1}{1}$

 روی $\mathbb{R}$ نزولی است
 $y = -1$ الف

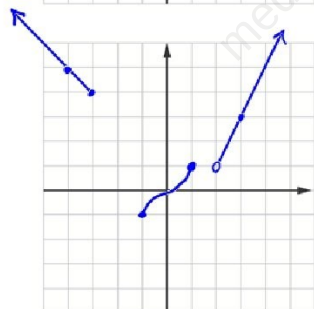
x	-۱	۰	۱
y	$-\frac{1}{1}$	۰	۲

 روی $\mathbb{R}$ صعودی است
 $y = 1$ ب

x	۰	۲	۴
y	۰	-۴	۰

 دبرازه $[0, +\infty)$ صعودی
 ودبرازه $[-\infty, 0]$ نزولی استب

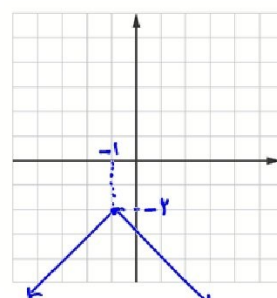
x	$\frac{1}{1}$	۱	۳
y	۳	۲	۱

 روی $\mathbb{R}$ نزولی استج

x	۲	۳
$2x-3$	۱	۳

x	-۱	۰	۱
x^3	-۱	۰	۱

x	-۴	-۳
$-x+1$	۵	۴

روی بازه $[-1, +\infty)$ نزولی و روی بازه $[0, 1]$ صعودی
روی بازه $(2, +\infty)$ صعودی استد
 دبرازه $[-1, +\infty)$ صعودی
 ودبرازه $(-\infty, 0]$ نزولی است

آمادگی امتحان نهایی ۱۴۰۳

الف) $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3$ -۴

ب) $f(\frac{3}{4}) = \sqrt{\frac{3}{4}}$ تعریف شده

پ) $f(4) = \sqrt{4-2} = 1$, $f(2) = 0$

ت) $g(4) = -9$, $g(-9) = -21$

ث) $g(2) = -9$, $f(-9) = \sqrt{-9-2}$ تعریف نشده

ج) $g(\frac{3}{4}) = 2(\frac{3}{4}) - 3 = -\frac{3}{2}$, $f(-\frac{3}{2}) = \sqrt{-\frac{3}{2}-2}$ تعریف نشده

الف) $D_f = \mathbb{R}$ $D_g = [0, +\infty)$ -۵

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \rightarrow D_{f \circ g} = [0, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -\omega \sqrt{x} + 3$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid -\omega x + 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{\omega}\} \rightarrow D_{g \circ f} = (-\infty, \frac{3}{\omega}]$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{-\omega x + 3}$$

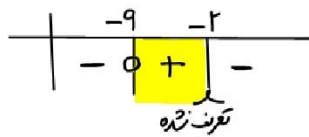
ب) $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ $D_g = [2, +\infty)$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in [2, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq -1\} \rightarrow D_{f \circ g} = [2, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2\sqrt{x-3} - 1}{\sqrt{x-3} + 1}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \rightarrow D_{g \circ f} = \{x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \mid \frac{2x-3}{x+1} \geq 2\}$$

$$\frac{2x-3}{x+1} - 2 \geq 0 \rightarrow \frac{2x-3-2x-2}{x+1} \geq 0 \rightarrow \frac{-5}{x+1} \geq 0$$



$$\rightarrow x \in [-5, -1)$$

$$D_{g \circ f} = [-5, -1)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{2x-3}{x+1} - 3}$$

$g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = -x^2 + 2x - 3 \rightarrow f(x) = g(h(x))$ -۶

$f(v) = 2(v) - \sqrt{v-3} = 14-3=11 \rightarrow f(11) = 2(11) - \sqrt{11-3} = 24-3=21$ -۷

$f(-1) = -(-1)^2 - 3(-1) = -1+3=2 \rightarrow f(2) = -(2)^2 - 3(-2) = 2$

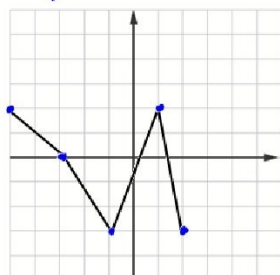
پاسخ سوالات ارزشیابی، راهنمای معلم

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{استقال افتر} \\ \text{استقال عمودی} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f(x-2) \xrightarrow{\text{واحد استقال بر راست}} f(x) \\ x=1 \quad \quad \quad x=3 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{نقطه نظر} \\ \text{روی نمودار تابع} \end{array} \quad \begin{array}{l} A(3, \frac{7}{4}) \\ y = \frac{1}{4}f(x-2) \end{array} \quad @niaziat_fatemi$$

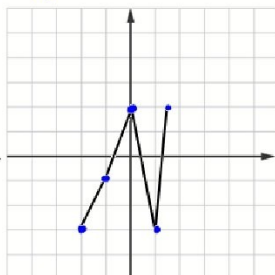
-۸ ★

-۹

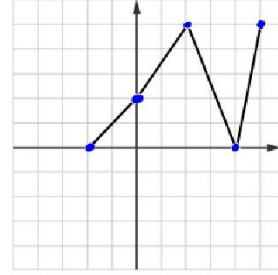
الف)



ب)



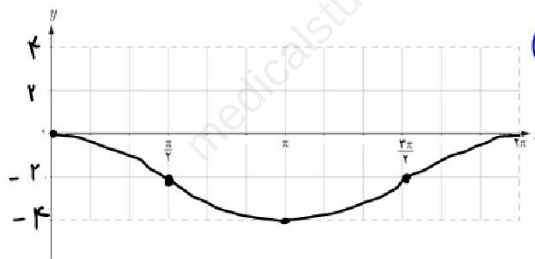
پ)



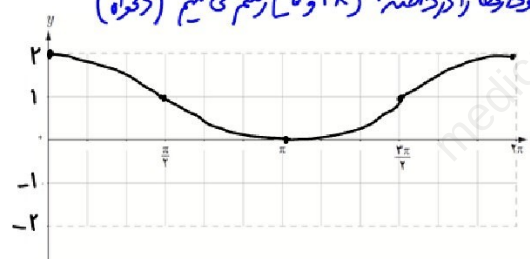
۱۰- خطها را ادامه بده! [۲ و ۳] رسم می کنیم (دکتره)

★

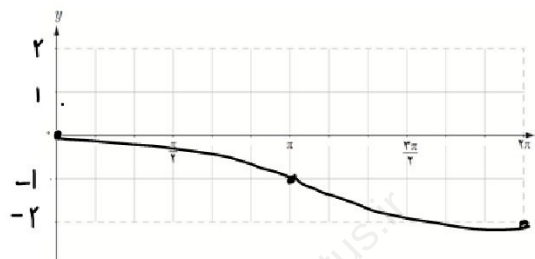
اند)



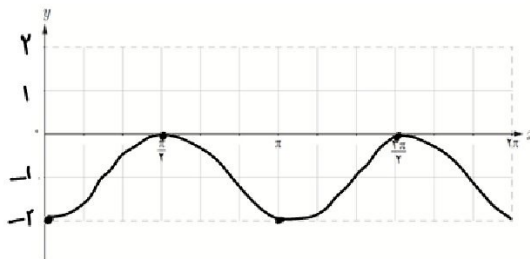
ب)



و)



د)



-۱۱

★

$$\left\{ \begin{array}{l} f(g(x)) = g(x) + a = x^2 + bx + a \\ (f \circ g)(x) = x^2 + 4x + 1 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + bx + a = x^2 + 4x + 1$$

مستقیم است $b=4$ و $a=1$ است.

-۱۲

$$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 1} \geq 1\}$$

$$\rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow x = (-\infty, -1\sqrt{1}] \cup [1\sqrt{1}, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1} = \sqrt{x^2 + 1 - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

آمادگی امتحان نهایی ۱۴۰۳

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}_-(-r, r) \mid \sqrt{x^2 - r} \in \mathbb{R}\} \rightarrow D_{g \circ f} = \mathbb{R}_-(-r, r)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(\sqrt{x^2 - r})^2 + 1} = \sqrt{x^2 - r + 1} = \sqrt{x^2 - r}$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - r} - \sqrt{x^2 - r} = 0$$

$$\begin{cases} D_f = [r, +\infty) \\ R_f = [r, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [r, +\infty) \\ R_{f^{-1}} = [r, +\infty) \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= \sqrt{x-r} + r \rightarrow y-r = \sqrt{x-r} \\ &\rightarrow x-r = (y-r)^2 \rightarrow x = (y-r)^2 + r \\ &\rightarrow f^{-1}(x) = (x-r)^2 + r \end{aligned} \quad -13$$

$$\text{الف)} \quad \begin{cases} D_f = \mathbb{R} \\ R_f = \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \\ R_{f^{-1}} = \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= \frac{rx}{\Delta} - 1 \rightarrow y + 1 = \frac{rx}{\Delta} \rightarrow \Delta y + \Delta = rx \\ &\rightarrow x = \frac{\Delta}{r} y + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\Delta}{r} x + 1 \end{aligned} \quad -14$$

$$\text{ب)} \quad \begin{cases} D_g = [-r, +\infty) \\ R_g = [-r, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{g^{-1}} = [-r, +\infty) \\ R_{g^{-1}} = [-r, +\infty) \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= -r + \sqrt{x+r} \rightarrow y+r = \sqrt{x+r} \rightarrow (y+r)^2 = x+r \\ &\rightarrow x = (y+r)^2 - r \rightarrow f^{-1}(x) = (x+r)^2 - r \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \quad \begin{cases} D_h = [r, +\infty) \\ R_h = [r, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{h^{-1}} = [r, +\infty) \\ R_{h^{-1}} = [r, +\infty) \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= x^2 - rx + r \rightarrow y = (x-r)^2 + r \rightarrow y-r = (x-r)^2 \\ &\rightarrow x-r = \pm \sqrt{y-r} \rightarrow x = \sqrt{y-r} + r \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-r} + r \\ &\quad \begin{cases} x-r = +\sqrt{y-r} \\ x-r = -\sqrt{y-r} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{ج)} \quad \begin{cases} D_L = [1, +\infty) \\ R_L = [1, +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} D_{L^{-1}} = [1, +\infty) \\ R_{L^{-1}} = [1, +\infty) \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{x-1}}{r} \rightarrow ry = \sqrt{x-1} \rightarrow x-1 = r^2 y^2 \\ &\rightarrow x = r^2 y^2 + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = r^2 y^2 + 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x-r}{r} \rightarrow y = \frac{x-r}{r} \rightarrow x-r = ry \rightarrow x = ry+r \rightarrow f^{-1}(x) = rx+r \quad -14 \quad \star$$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{rx+r-r}{r} = x \rightarrow x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = r\left(\frac{x-r}{r}\right) + r = x-r+r = x \rightarrow x \in D_f = \mathbb{R}$$

$$\text{الف)} \quad y = x^2 - rx + 11 \quad x \leq \frac{-(-r)}{2} = r \rightarrow \begin{cases} y = x^2 - rx + 11 & x \geq r \\ y = x^2 - rx + 11 & x \leq r \end{cases} \quad -14 \quad \star$$

$$\text{ب)} \quad y = -|x-1| + r \quad x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \begin{cases} y = -x+r & x \geq 1 \\ y = x+r & x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{ج)} \quad y = |x+r| - r \quad x+r=0 \rightarrow x=-r \rightarrow \begin{cases} y = x-1 & x \geq -r \\ y = -x-r & x \leq -r \end{cases}$$

پاسخ سوالات ارزشیابی، راهنمای معلم

۱۸- اگر دو تابع نسبت به هم معکوس باشند، وارون یکدیگرند. اگر دو تابع وارون یکدیگر باشند داریم:

$$\begin{cases} f(f^{-1}(x)) = x \\ f^{-1}(f(x)) = x \end{cases}$$

فرض کنیم $f(x) = m_1x + b_1$ و $f^{-1}(x) = m_2x + b_2$ داشته باشیم. داریم:

$$f(f^{-1}(x)) = m_1(m_2x + b_2) + b_1 = x \rightarrow m_1m_2x + m_1b_2 + b_1 = x$$

مشتق است که $m_1m_2 = 1$ است.

۱۹- $f^{-1}(g(a)) = 2 \rightarrow g(a) = f(2)$

$$f(2) = 3 \rightarrow 2|a| + 1 = 3 \rightarrow 2|a| = 2 \rightarrow |a| = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

$g(a) = 2|a| + 1$

۲۰- تابع درجه دوم به شکل کلی است.

$$\begin{cases} D_f = (-\infty, 2] \\ R_f = (-\infty, 0] \end{cases} \quad \begin{cases} D_{f^{-1}} = [-\infty, 2] \\ R_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \end{cases}$$

$y = -(x-2)^2 \rightarrow -y = (x-2)^2 \rightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{-y} \rightarrow x = 2 + \sqrt{-y} \\ x-2 = -\sqrt{-y} \rightarrow x = 2 - \sqrt{-y} \end{cases}$

$D_f = R_{f^{-1}}$ پس این تابع معکوس است.

مسئله

۱- $T = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (ب) $T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{\pi}|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\pi}} = 2\pi^2$ (ب) $T = \frac{2\pi}{|\sqrt{2}|} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$ (ت) $T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{\sqrt{2}}|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}\pi$ (ا)

۲- الف) نادرست (ب) نادرست (ج) نادرست (د) نادرست (ه) نادرست (و) درست

۱- $\sin \alpha = a \rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - a^2}$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2a \sqrt{1 - a^2}$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - a^2 - a^2 = 1 - 2a^2$

۲- الف) $\sin 2x = \sin(2x+1) \rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + 2x + 1 \rightarrow 1 = 0 \text{ (غیرممکن)} \\ 2x = 2k\pi + \pi - 2x - 1 \rightarrow 4x = 2k\pi - 1 \rightarrow x = \frac{2k\pi - 1}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

ب) $\cos 2x - \sin x - 2 = -2 \rightarrow \cos 2x - \sin x = 0 \rightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow \sin x = \sin \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

و) $\sin 2x - \cos x = 0 \rightarrow 2\sin x \cos x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

آمادگی امتحان نهایی ۱۴۰۳

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x - 6} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+6} = \frac{2}{7}$

منصه

۱-

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{5}$

★ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 1}{4x^2 - 2x + 1} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(12x-1)(x+1)}{(4x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12(\frac{1}{2}) - 1}{4(\frac{1}{2}) - 1} = \frac{5}{1} = 5$

★ ج) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - x + 1} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2(x-1) + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{2}$ @riaziat_fatemi

د) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} \times \frac{x + \sqrt{3x-2}}{x + \sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x^2 - 4)(x + \sqrt{3x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x + \sqrt{3x-2})} = \frac{1}{14}$

ه) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = 1$

و) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 4x + 5} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 4x + 5} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \frac{-1}{12}$

ز) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+4} - 2} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+4} - 2} \times \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} \times \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{2(x+4)(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4(x+4)} = \frac{0}{4} = 0$

۲-
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^a - \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^a - \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^a - \frac{x+1}{x+1} = -1 - 1 = -2$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^a - \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^a - \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^a - \frac{-(x+1)}{x+1} = -1 + 1 = 0$

خبر در این نقطه داران حد نیست. زیرا حد چپ و راست آن در این نقطه با هم برابر نیست.

۳-
 $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (a+1)x + 3 = -2a - 1 + 3 = -2a + 2$
 $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} -2x^2 + 1 = -2(-1)^2 + 1 = -1 + 1 = 0$
 $-2a + 2 = 0 \rightarrow -2a = -2 \rightarrow a = 1$

۴-
 ا) $\lim_{x \rightarrow (-\infty)^+} \frac{x+1}{x^2} = -\infty$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x]-1}{x^2-1} = +\infty$ ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

د) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 1}{x^2 - x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$ ه) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{|x|} = 1$

و) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = -\infty$ ز) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{[x]-1}{x^2-4} = -\infty$ ح) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan^2 x = +\infty$

پاسخ سوالات ارزشیابی، راهنمای معلم

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^r + x + 1}{\omega x^n + rx - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^r}{\omega x^n} = \frac{r}{\omega} \quad \begin{matrix} n=r \\ m=\omega \end{matrix} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{rx^r}{\omega x^r} = \frac{r}{\omega} \quad n=r, m=\omega$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^r+x+1)} = \frac{\omega}{r}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{rx+1}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{rx+1}}{1+\sqrt{rx+1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-rx} = \frac{1}{1-r} = \frac{r}{1-r}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{rx^r+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x)(x)(-x)}{rx^r} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{rx^r} = -\frac{1}{r}$$

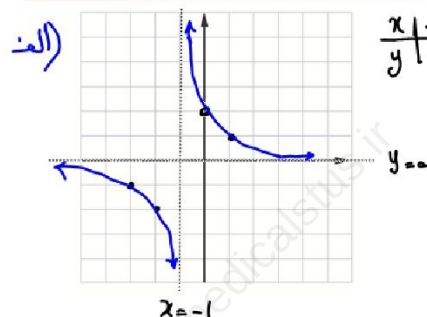
$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^r-1)(x+1)}{x^r-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^r)(x)}{x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{x^r} = 1$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^r - \sqrt{x-2}}{\omega x^r - \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^r}{\omega x^r} = \frac{4}{\omega}$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r + \sqrt{x^r+1}}{\omega x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r + \sqrt{x^r}}{\omega x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r + |x|^r}{\omega x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{rx^r}{\omega x^r} = \frac{r}{\omega}$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{rx^r+1}}{rx-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{rx^r}}{rx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{r}|x|}{rx} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r - \omega x + r}{rx^r + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r}{rx^r} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{r} = -\infty$$



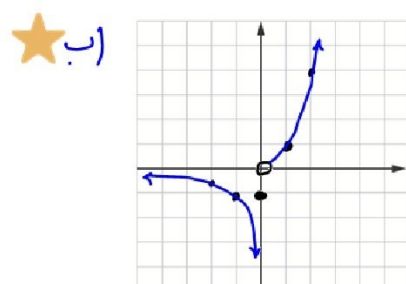
$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

$$\frac{x}{y} \left| \begin{array}{ccc} 0^- & -1 & -1 \\ 1 & -\infty & -1 \end{array} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

آمادگی امتحان نهایی ۱۴۰۳

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \lim_{x \rightarrow (-\infty)^+} f(x) &= +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 2 \\ \lim_{x \rightarrow (-\infty)^-} f(x) &= -\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -1 \end{aligned}$$

نمونه چهارم

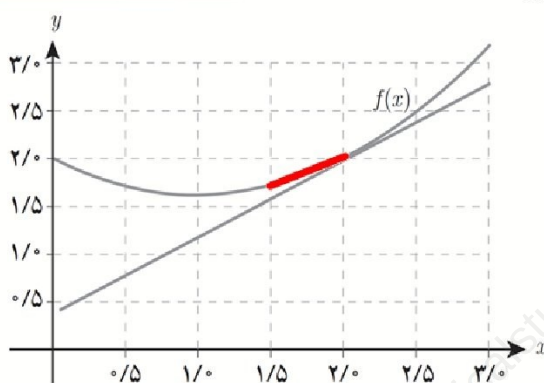
$$m_b < m_c < m_d < m_a - 1$$

$$\text{الف)} \quad \frac{f(1.5) - f(2)}{-0.5} = \frac{1.75 - 2}{-0.5} = \frac{-0.25}{-0.5} = \frac{1}{2}$$

شیب خط قرمز رنگ نشان دهنده همان نزدیک است و در شکل مشخص است که $f(2)$ همان خط مماس بر منحنی در نقطه $x=2$ است.

$$\text{ب)} \quad \text{با توجه به شکل به ازای } h=-2 \text{ این اتفاق رخ خواهد داد}$$

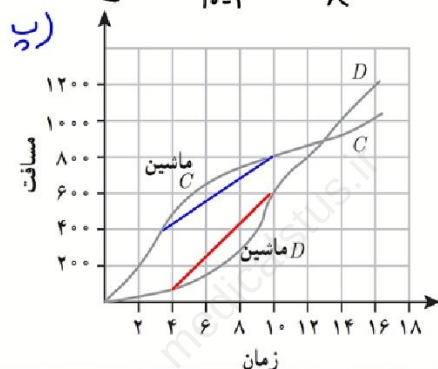
$$f(2-h) = f(2) \rightarrow f(0) = f(2) \quad \text{زیرا}$$



$$\text{الف)} \quad \text{سرعت متوسط } D = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1200 - 0}{14} = 75 \quad \text{سرعت متوسط } C = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1000 - 0}{14} = 42.5$$

$$\text{ب)} \quad \bar{V}_D = \frac{x_h - x_\varepsilon}{h - \varepsilon} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_h - 50}{h - \varepsilon} = 75 \\ \bar{V}_C = \frac{x_1 - x_2}{10 - 2} = \frac{1000 - 200}{8} = 75 \end{array} \right.$$

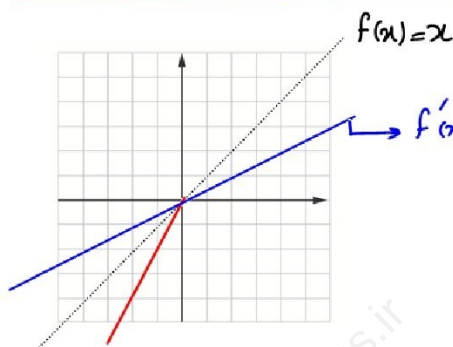
با توجه به شکل $h=1$ به شکل تقریبی می توان جواب داشت.



خط قرمز رنگ (سرعت متوسط ماشین C) شیب کمتری نسبت به سرعت متوسط ماشین D (خط آبی رنگ) در این بازه دارد.

$$\text{الف)} \quad \text{نادیست} \quad (f(x) = 2x \quad x \leq 0)$$

$$\text{ب)} \quad \text{نادیست} \quad (f(x) = \frac{1}{x} \quad x = -2)$$



$$f(x) < x \rightarrow \text{مثلاً } f(x) = 2x \quad x < 0 \rightarrow \text{مثال نقض}$$

پاسخ سوالات ارزشیابی، راهنمای معلم

۵- الف) دو ذره A از ابتدای آنجا با سرعت ثابت در پیرو است اما دو ذره B ابتدا با سرعت کمتر از A و بعد از مدتی با سرعت بیشتر از A عبور می‌کند. ب) در لحظه $t=1.5$ (پ) در لحظه $t=1.5$

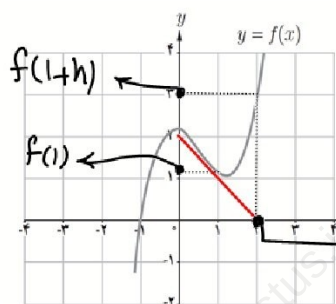
$$x=0 \quad (پ)$$

$$(ب) بازه (۰، ۱)$$

$$۴- الف) بازه (۰، ۱) و (۱، ۲)$$

$$۷- A \rightarrow D \rightarrow III \quad B \rightarrow I \quad C \rightarrow II$$

$$۸- t=4 \rightarrow V(4) = 10 \left(2 - \frac{1}{4} (4) \right)^2 = 10 \left(2 - \frac{2}{4} \right)^2 = 10 \left(\frac{4}{4} \right)^2 = \frac{40}{3}$$



۹- الف) یعنی اگر خط $x=1$ را رسم کنید در نقطه‌ای با کلمه عرض $f(x)$ را قطع می‌کند.
 ب) یعنی اگر خط $x=1+h$ را رسم کنید در نقطه‌ای با کلمه عرض $f(x)$ را قطع می‌کند.
 ج) یعنی نقطه‌ای به فاصله h از نقطه $x=1$ روی شکل مشخص شده است.
 د) شبیه خط معاص (رنگه) $x=1$ برابر حاصل این عملیات.
 ه) مقدار این حد تقریباً برابر شبیه خط معاص (رنگه) $x=1$ و برابر ۱ است.

$$۱۰- f(5)=6, f'(5) = \frac{f(5)-f(0)}{5-0} = \frac{6-2}{5-0} = \frac{4}{5} \quad @riaziat_fatemi$$

$$۱۱- \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m \rightarrow \frac{mx_2+b-mx_1-b}{x_2-x_1} = \frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = m \rightarrow \frac{y}{x} = m \rightarrow y = mx$$

$$۱۲- ۱) y' = 2x^2 - 3 \quad ۲) y' = 1 + (k-kx)(x+1) + (fx-x^2) \quad ۳) y' = (x^2-kx)^3 + 3(kx-x)(x^2-kx)(x+r) \\ ۴) y' = 2(2fx^2-1)(12x^3-x+5) \quad ۵) y' = \frac{2x^2-2x(2x-5)}{2x^2} \quad ۶) y' = \frac{(12x^2-fx)(x+r) - (fx^2-2x^2+1)}{(x+r)^2}$$

$$۱۳- الف) $f(x) = 2x^2 \rightarrow f'(0) = m = 0 \rightarrow y = 0$$$

$$ب) $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 = m \rightarrow y = x + b \xrightarrow{(1,1)} 1 = 1 + b \rightarrow b = 0 \rightarrow y = x$$$

$$۱۴- f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow f'(2,5) = \frac{1}{\sqrt{2,5}} = \frac{1}{\sqrt{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f'(2,5) = \frac{f(2,54) - f(2,5)}{2,54 - 2,5} = \frac{1}{3} - \frac{14-15}{0,04} = \frac{1}{3} - \frac{1}{0,04} = \frac{1}{3} - \frac{25}{1} = \frac{1-75}{3} = \frac{-74}{3} = -\frac{74}{3}$$

$$۱۵- S(t)=0 \rightarrow -\omega t^2 + 2_0 t = 0 \rightarrow -\omega t(t-2_0/\omega) = 0 \quad \begin{cases} t=0 \\ t=2_0/\omega \end{cases} \rightarrow \text{لحظه توقف} \\ S'(t) = \text{سرعت} = -2\omega t + 2_0 \xrightarrow{t=2_0/\omega} -2\omega \cdot \frac{2_0}{\omega} + 2_0 = -2_0 + 2_0 = 0 \rightarrow \text{سرعت صفر}$$

$$۱۶- \frac{f(r+h) - f(r)}{h} = \frac{1}{9} \rightarrow \frac{r+h + \frac{1}{r+h} - \frac{1}{r}}{h} = \frac{1}{9} \rightarrow 9h + \frac{9}{r+h} - \frac{9}{r} = 1h$$

$$\rightarrow 9h - 1h = \frac{9}{r} - \frac{9}{r+h} \rightarrow h = \frac{18 + 9h - 18}{r(r+h)} \rightarrow h = \frac{9h}{r(r+h)} \rightarrow rh(r+h) = 9h$$

$$rh + rh^2 = 9h \rightarrow rh^2 - 9h = 0 \rightarrow h(rh - 9) = 0 \xrightarrow{h \neq 0} rh = 9 \rightarrow r = \frac{9}{h}$$

آمادگی امتحان نهایی ۱۴۰۳

$$V'(t) = 250 \times (2) \times (14-t)(-1) \xrightarrow{t=4} V'(4) = -500(14-4) = -500 \times 10 = -5000 \quad -17$$

یعنی آب در لحظه $t=4$ با آهنگ ۵۰۰۰ لیتر تخلیه می شود و دوازدهم حجم آب بسته می شود.

$$f'(x)=3 \rightarrow f'(1)=3 \quad x=1 \text{ در نقطه } x \geq 1 \text{ در نقطه } x=1 \text{ خط مماس بر منحنی تابع به ازای } x=1 \text{ است.} \quad -18 \star$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h^2) - f(1)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h^2) + 1 - 3 - 1}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 3h^2 - 3}{h^2} = 3$$

$$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \rightarrow y'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - f(1) \cdot g'(1)}{g^2(1)} \rightarrow 3 = \frac{-4 \cdot g(1) - 0 \cdot g'(1)}{g^2(1)} \quad -19 \star$$

$$\Rightarrow 3g^2(1) = -4g(1) \rightarrow 3g^2(1) + 4g(1) = 0 \rightarrow g(1)(3g(1) + 4) = 0 \begin{cases} g(1) = 0 \quad \times \\ g(1) = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$y'(x) = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} \quad x = \frac{1}{e} \rightarrow \frac{-\frac{1}{e} + 1}{(1+\frac{1}{e})^2} = \frac{\frac{e-1}{e}}{(\frac{e+1}{e})^2} = \frac{1}{e} \quad -20$$

$$\text{شرط مشتق پذیری چپ درست} \rightarrow 3(x+1)^2 = a \xrightarrow{x=0} 3 = a$$

$$\text{شرط مشتق پذیری راست} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} ax + a + b \rightarrow 1 = a + b \xrightarrow{a=3} b = -2 \quad -21 \star$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \lim_{x \rightarrow 1^-} ax - a = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - x \rightarrow 0 = 0 \quad -22$$

$$\text{شرط مشتق پذیری چپ درست: } a = 2x - 1 \xrightarrow{x=1} \rightarrow a = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1)}{h} = 3 \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)}{h} = 3 \quad -23 \star$$

$$f'(1) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)}{h} = 3 \rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)}{h} = 3 - f'(1)$$

$$3 - f'(1) = 0 \rightarrow f'(1) = 3 \quad \text{مشخص است که } f(1) = 0 \text{ پس داریم:}$$

$$x+y=9 \rightarrow y=9-x$$

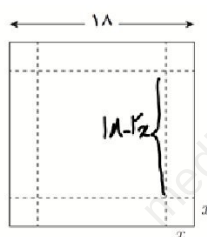
$$A = x^2 + y^2 \quad A(x) = x^2 + (9-x)^2 = x^2 + x^2 - 18x + 81 = 2x^2 - 18x + 81 \rightarrow A'(x) = 0 \rightarrow 4x - 18 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2}$$

x	y
$A'(x)$	- 0 +
$A(x)$	↘ ↗

min
مطلق

پس اگر $x = \frac{9}{2}$ و $y = \frac{9}{2}$ باشد حاصل جمع مربعات آن ها کمترین مقدار ممکن خواهد بود.

پاسخ سوالات ارزشیابی، راهنمای معلم



$$V(x) = (18-2x)^2 x \quad 0 < x \leq 9$$

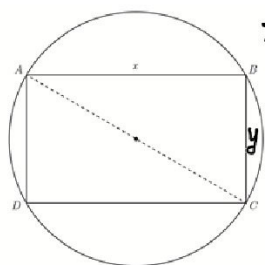
$$V'(x) = (18-2x)^2 + 2(-2)(18-2x)x = 0$$

$$\rightarrow (18-2x)(18-2x-4x) = 0 \quad \begin{cases} 18-2x=0 \rightarrow x=9 \\ 18-6x=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

پس اندازهٔ ضلع‌های بریده شده به ۳ سانتی متر باشد تا حجم بیشترین مقدار ممکن گردد.

x	۳	۹
$V'(x)$	$+$	$-$
$V(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

max
مطلق



$$x^2 + y^2 = (10)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 100 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2} \quad 0 \leq x \leq 10$$

$$S = xy \rightarrow S(x) = x(\sqrt{100 - x^2}) \rightarrow S'(x) = 0$$

$$\sqrt{100 - x^2} + \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} x = 0 \rightarrow \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \rightarrow 2x^2 = 100 \rightarrow x^2 = 50 \rightarrow x = \sqrt{50}$$

$$x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 100 - 50 \rightarrow y = \sqrt{50}$$

$$xy = k \rightarrow y = \frac{k}{x}$$

$$x, y > 0$$

۴- مقدار ثابت حاصلضرب را k (در نظر بگیریم).

$$S = x + y \rightarrow S(x) = x + \frac{k}{x} \xrightarrow{S'(x)=0} 1 - \frac{k}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - k}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - k = 0 \rightarrow x^2 = k \rightarrow x = \pm \sqrt{k} \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{k}$$

$$xy = k \xrightarrow{x=\sqrt{k}} \sqrt{k}y = k \rightarrow y = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$$

x	$-\sqrt{k}$	$\sqrt{k}$
$S'(x)$	0	0
$S(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

min
مطلق

پس $x = y = \sqrt{k}$ است و اثبات شده که مجموع دو عدد مثبت که حاصلضرب آن‌ها برابر یک عدد ثابت باشد، در دو عدد برابر است.

@riaziat_fatemi

$$x + y = k \rightarrow y = k - x$$

$$x, y > 0$$

۵- حاصل جمع دو عدد را برابر مقدار ثابت k (در نظر بگیریم).

$$P = xy \rightarrow P(x) = x(k - x) = kx - x^2 \xrightarrow{P'(x)=0} k - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{k}{2} \quad y = \frac{k}{2}$$

x	$\frac{k}{2}$
$P'(x)$	$+$
$P(x)$	$\nearrow$

max
مطلق

پس حاصلضرب دو عدد برابر k خواهد بود که دو عدد برابر باشند.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 + 2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{(x^2 + 1)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} 2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm i$$

x	$-i$	i
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

پس نقاط بحرانی تابع عبارت اند از $-i$ و i و 0 .

با توجه به جدول مشخص است که حاصلضرب مطلق تابع (ادامه) و صیغه مطلق آن (ادامه) است.

آمادگی امتحان نهایی ۱۴۰۳

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=-2 \end{matrix} \rightarrow -f = a+b-3 \rightarrow a+b=-1$$

$$\rightarrow a=1, b=-2$$

-۷

$$y'(1)=0 \rightarrow 2ax+b=0 \xrightarrow{x=1} 2a+b=0$$

$$f'(x)=0 \rightarrow f'(x)=4x^2-4mx=0 \rightarrow 4x(x-m)=0 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=m \end{matrix}$$

-۸

x	0	m
f'(x)	+	-
f(x)	↗	↘

در صورتی که $m > 0$ در نظر گرفته شود، مقدار حالزیم نمی شود و در صورتی که $m < 0$ صحیحاً منفی است.

x	m	0
f'(x)	+	-
f(x)	↗	↘

$$\rightarrow f(m)=8 \xrightarrow{x=m} 2m^3-3m^3=8 \rightarrow -m^3=8 \rightarrow m=-2$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 4x^2-3=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$$

x	-1	1	2
f(x)	1/8	1/4	1/2

پس نقاط -1 و 1 و 2 نقاط بحرانی تابع هستند.

-۹

با توجه به جدول مشخص است که نقطه $(2, 1/2)$ حالزیم مطلق و نقطه $(-1, 1/8)$ مینیمم مطلق تابع است.

$$h'(t)=0 \rightarrow 2-10t=0 \rightarrow t=1/5$$

$$h(1/5)=4-45=41$$

-۱۰

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -x^2+1=0 \rightarrow x=\pm 1$$

x	-1	1
f'(x)	-	+
f(x)	↘	↗

با توجه به جدول تغییرات مشخص است که تابع در بازه $[1, 2]$ صعودی است.

پس بیشترین مقدار برابر $b-a=2$ است.

-۱۱

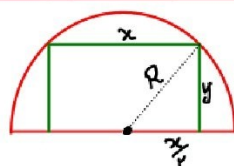
$$f'(x)=4x^2-4x-12$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 4(x^2-x-3)=0 \rightarrow 4(x-3)(x+1)=0 \rightarrow \begin{matrix} x=-1 \\ x=3 \end{matrix}$$

x	-1	3
f'(x)	+	-
f(x)	↗	↘

تابع در بازه $(-1, 3)$ صعودی و در بازه $(3, \infty)$ نزولی است.

-۱۲



$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + y^2 = R^2 \rightarrow \frac{x^2}{r^2} + y^2 = R^2 \rightarrow y^2 = R^2 - \frac{x^2}{r^2} \rightarrow y = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{r^2}}$$

$$S = xy \rightarrow S(x) = x \left(\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{r^2}} \right) \rightarrow S'(x) = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{r^2}} + \frac{-x^2/r^2}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{r^2}}} \times x = 0$$

$$\frac{R^2 - \frac{x^2}{r^2} - \frac{x^2}{r^2}}{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{r^2}}} = 0 \rightarrow \frac{x^2}{r^2} = R^2 \rightarrow x = \sqrt{r}R \quad y^2 = R^2 - \frac{rR^2}{r^2} = \frac{R^2}{r} \rightarrow y = \frac{R}{\sqrt{r}} \quad S = \sqrt{r}R \times \frac{R}{\sqrt{r}} = R^2$$

بیشترین مساحت

پاسخ سوالات ارزشیابی، راهنمای معلم

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0 \xrightarrow{x=2} x^2 + y^2 - 4 + 4y + 4 = 0 \rightarrow y^2 + 4y = 0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \rightarrow A(2,0) \\ y=-4 \rightarrow B(2,-4) \end{cases}$$

منظم

$$C(x, -\frac{y+4}{x}) \rightarrow C(x, -3)$$

با توجه به اینکه مثلث در رأس C مسایق قائم است پس:
حالا در معادله دایره $y = -3$ قرار می دهیم تا x بیست آید.

$$x^2 + 9 - 4x - 18 + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

@riaziat_fatemi

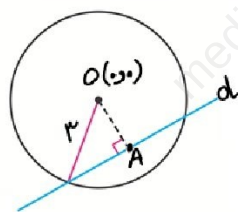
پس نقطه $C_1(-1, -3)$ یا $C_2(5, -3)$ می تواند رأس سیم باشد. در صورتی که این دو گزینه وجود دارد.

(ب)

$$\left. \begin{matrix} A(2,0) \\ B(2,-4) \\ D(x,y) \end{matrix} \right\} \rightarrow m_{AD} \times m_{BD} = -1 \rightarrow \frac{y-0}{x-2} \times \frac{y+4}{x-2} = -1 \rightarrow \frac{y(y+4)}{(x-2)^2} = -1 \rightarrow y^2 + 4y = -(x-2)^2$$

$$\rightarrow (x-2)^2 + y^2 + 4y = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 8 + y^2 + 4y = 4 \rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

با توجه به اینکه معادله خواسته شده همان معادله دایره است.
پس هر نقطه‌ای روی معادله D روی دایره اعتبار دارد و چنین دایره‌ای خواهد داشت.



$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2} \rightarrow m_d \times m_{OA} = -1 \rightarrow m_d = -2$$

$$d: y = -2x + b \xrightarrow{A(2,1)} 1 = -4 + b \rightarrow b = 5 \rightarrow y = -2x + 5$$

۳- (سوال مخصوص علاقه مندان)

$$\left. \begin{matrix} A(1,0) \rightarrow |OA| = \sqrt{(1-1)^2 + \beta^2} \\ B(2,0) \rightarrow |OB| = \sqrt{(2-1)^2 + \beta^2} \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} (1-1)^2 + \beta^2 = (2-1)^2 + \beta^2 \\ (1-1)^2 = (2-1)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha - 1 = \alpha - 2x \\ \alpha - 1 = -\alpha + 2 \end{cases} \rightarrow \alpha = 3/2$$

$$O(\alpha, \beta) \begin{cases} |ax + by + c| \\ \alpha: y - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|B - 1|}{\sqrt{(1)^2}} = |B - 1| = |OA| = |OB| \Rightarrow |B - 1| = \sqrt{(2 - 1)^2 + \beta^2} \rightarrow (B - 1)^2 = (2 - 1)^2 + \beta^2$$

$$\rightarrow \beta^2 - 2\beta + 1 = 1 + \beta^2 \rightarrow 2\beta = -2 \rightarrow \beta = -1$$

$$O\left(\frac{-2-2}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) \rightarrow O(-2, 2)$$

۴- با توجه به اینکه در سطر بزرگ، مشخص است که بیضی افقی است.

$$2b = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow B_1(-2, 2+2) \rightarrow B_1(-2, 4), \quad B_2(-2, 2-2) \rightarrow B_2(-2, 0)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{\substack{a=2 \\ b=2}} 4 = 4 + c^2 \rightarrow c^2 = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$F_1(-2 + 2\sqrt{2}, 2) \rightarrow F_2(-2 - 2\sqrt{2}, 2)$$

$$O\left(\frac{-(-4)}{2}, \frac{-(4)}{2}\right) \rightarrow O(2, -2) \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (4)^2 - 4(12)} = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2$$

$$O(2, -2) \quad r' = 2r \rightarrow r' = 4 \rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 16$$

آمادگی امتحان نهایی ۱۴۰۳

۲- (مفروض داشتیم آلفا و بتا علامه منفی)
این ۳ نقطه بر روی محیط این دایره در نظر می گیریم، بهترین موقعیت برای دکل، مرکز دایره است که از این ۳ نقطه می گذرد.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{(0,1)} \alpha^2 + (1-\beta)^2 = r^2 \\ \xrightarrow{(1,2)} (1-\alpha)^2 + (2-\beta)^2 = r^2 \\ \xrightarrow{(2,-1)} (2-\alpha)^2 + (-1-\beta)^2 = r^2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha^2 + 1 - 2\beta + \beta^2 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 + 4\beta + 4 \rightarrow 4\beta - 4\alpha = -12 \rightarrow \beta - \alpha = -3 \\ \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 + 4\beta + 4 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 + 2\beta + 1 \rightarrow 2\alpha - 2\beta = 3 \rightarrow \alpha - \beta = 1.5 \end{array}$$

با این دو معادله می توانیم جواب را پیدا کنیم. پس چنین امکان وجود ندارد (اصطلاحاً سوال غلط است)

$$O(3\alpha, \alpha) \rightarrow (x-3\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 = r^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{(1,1)} (1-3\alpha)^2 + (1-\alpha)^2 = r^2 \\ \xrightarrow{(3,2)} (3-3\alpha)^2 + (2-\alpha)^2 = r^2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 + \alpha^2 - 4\alpha + 4 \\ 14\alpha = 14 \rightarrow \alpha = 1 \end{array}$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = r^2 \xrightarrow{(1,1)} (1-3)^2 + (1-1)^2 = r^2 \rightarrow r^2 = 4$$

$$\text{محلول دایره} \quad (x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$$

۸- منظور سوال این است که دایره ای که بزرگترین از مجموعه ی محققات معادلات باشد، با توجه به محققات مرکز، در دایره:

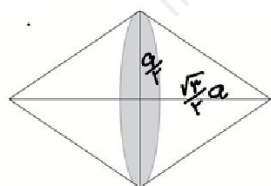
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = (2)^2 \rightarrow \text{معادله ی دایره} \quad , \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = (1)^2 \rightarrow \text{معادله ی دایره}$$

$$O\left(\frac{1+1}{2}, \frac{3+3}{2}\right) \rightarrow O(1, 3) \quad A(1, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow |OA| = r \rightarrow \sqrt{(1-1)^2 + (3-3)^2} = r \rightarrow r = 0 \\ \text{محلول دایره: } (x-1)^2 + (y-3)^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$r = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow r = \frac{|f(2) - 3(-1) - 1|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|1 + 3 - 1|}{5} = 1$$

$$O(0, 2) \rightarrow m_{OA} = \frac{2-2}{-1-0} = -1, \quad m_L \times m_{OA} = -1 \rightarrow m_L = 1 \rightarrow y = x + b \xrightarrow{(0,2)} 2 = 0 + b \rightarrow b = 2$$

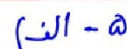
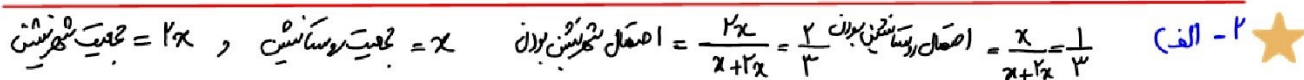
$$\text{محلول دایره: } y = x + 2$$



۱۲- شکل حاصل از دو مخروط که از یک دایره به هم متصل هستند تشکیل شده است.

$$\text{حجم شکل} = 2 \times \frac{1}{3} \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a = \frac{\sqrt{3} a^3}{12} \pi$$

فضل هفتم



احتمال اینکه هیچ اتفاقی از قبیل سراف
مردمان قبیل در آنجا

$$= \frac{4+2}{2+1+4+2} = \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

آمادگی امتحان نهایی ۱۴۰۳

(ب) با در نظر گرفتن بخش الف

احتمال اینکه
جواهر استغای
از جعبه استغای
بغیر باشد

$$\rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

